MATHEMATICS FOR ENGINEERS

BY
RAYMOND W. DULL
Consulting Engineer; Member, American Society of Mechanical Engineers; Member, Western Society of Engineers

FIRST EDITION
FIFTH IMPRESSION

McGRAW-HILL BOOK COMPANY, Inc.
NEW-YORK 370 SEVENTH AVENUE

РАЙМОНД В. ДЭЛЛ

СПРАВОЧНАЯ КНИГА ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ И СТУДЕНТОВ ВТУЗОВ

перевод с английского
инженеров
С. С. ЕРМАН и И. З. МАРГОЛИНА

★

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
проф. А. М. ЖУРАВСКОГО

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕНИНГРАД 1933 МОСКВА

2-я типография ОНТИ им. Евг. Соколовой. Ленинград, просп. Красных Командиров, 29.

ОТ РЕДАКТОРА

Книга Дэлла „Справочная книга по математике“ занимает среднее положение между руководством и справочником по математике. Её цель обслужить инженерно-технического работника, нуждающегося в освежении своих познаний по математике, и дать ему необходимые справки и указания.

В книге охвачены те разделы математики, которые входят обычно в большинство технических справочников. Так как книга рассчитана на читателя, желающего не только получить требуемую ему справку, но и соответствующие достаточно простые и наглядные к ней объяснения, то справочник принял форму руководства.

Однако книгу нельзя назвать руководством в полном смысле этого слова. Изложение не везде носит систематический характер. Автор не стремится к последовательному развитию положений, не гонится за доказательствами. Он стремится возможно полнее и нагляднее раскрыть основные понятия и показать их связь с повседневной работой техника. Поясняя на примерах математические приемы и правила, автор не загромождает их излишними техническими подробностями, справедливо полагая, что для техника, обращающегося к математике, не они играют первую роль. Стремление к возможно большей наглядности побудило автора широко воспользоваться геометрической интерпретацией аналитических приемов. С этой стороны книга содержит богатый материал, могущий оказаться полезным и при прохождении начал высшей математики во втузе.

При переводе книги на русский язык английские меры, непривычные для русских читателей, заменены метрическими и в числовых примерах сделан пересчет.

В отдельных местах, где приводимые формулы было желательно дополнить выводом, сделаны примечания. Это относится по большей части к выводам формального характера. Были приложены усилия к тому, чтобы по возможности полностью передать непосредственность изложения оригинала и никаких дополнений в направлении уточнения доказательств или придания им большей строгости сознательно не делалось. Это не отвечало бы задачам, поставленным перед книгой, и вносило бы известный диссонанс в изложение.

В главе о логарифмической линейке сохранено описание американской логарифмической линейки. Мотивы к этому такие. Правило действий и устройство шкал (кроме шкалы синусов) таковы же, что и на употребительных у нас 25-сантиметровых линейках. Благодаря сделанным примечаниям лицо, познакомившееся с американской линейкой, безо всякого труда сможет работать на линейках обычного типа.

Инженерно-техническому работнику, не имеющему в своей деятельности постоянного контакта с математикой, в известные моменты приходится прибегать к ее помощи. В этом случае наиболее желательной для него является книга, где в известной последовательности в простой и наглядной форме дается изложение основных математических положений по возможности в таком виде, как это чаще всего встречается в практических приложениях.

Такая книга дает возможность в кратчайший срок освежить когда-то усвоенное и вспомнить забытое.

Нам думается, что книга Д э л л а, довольно близко отвечающая этим требованиям, будет полезной для наших инженерно-технических работников.

А. Журавский.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА.

Настоящая книга предназначается главным образом для инженеров, причем мы имели в виду, во-первых, тех из них, которые нуждаются в быстром получении справки, во-вторых — желающих восстановить свои прежние математические познания и, наконец, в-третьих — инженеров, нуждающихся в пособии по математике.

Обычно для получения соответствующих сведений инженер обращается либо к техническим справочникам, либо к учебникам. Первые слишком кратки, и место, отводимое в них математике, весьма ограничено.

Учебники же предназначаются для сообщения учащимся соответствующих знаний, а также для воспитания в них уменья пользоваться методами математики. Промежуточные рассуждения при этом умышленно пропускаются, предполагается знакомство с предыдущими отделами, совершенно не обращается внимания на время, необходимое для получения желаемого решения, а иногда даже развитие важных положений предоставляется учащемуся.

Поэтому автор, желая во время практической деятельности быстро получать нужные справки по математике, был вынужден составить соответствующие заметки. Первоначально он не имел намерения опубликовывать указанные заметки, но многие инженеры, просматривавшие их, высказывали мнение о полезности их издания.

Следуя этим пожеланиям, автор произвел тщательный просмотр своих заметок и внес в них многочисленные дополнения, в результате чего и появился настоящий труд.

Значительное место в нем отведено рассмотрению вопроса об абсолютной и относительной погрешностях, который обычно в учебниках не разбирается.

Там, где это было возможно, одновременно с аналитическими решениями приведены и графические. Во всех важных случаях даются пояснительные примеры.

Уменье пользоваться счетной линейкой необходимо каждому инженеру; поэтому в настоящей книге автор нашел нужным сообщить основные сведения, касающиеся пользования ею.

Вместо того, чтобы заставлять читателя запоминать целый ряд сложных правил, здесь даны простые указания, охватывающие все практически важные случаи.

Ознакомление с линейкой начинается со шкалы равных делений, а затем рассматриваются и остальные шкалы. Этот порядок отличается от обычного, принятого в учебниках.

Так как настоящая книга предназначена для повторения математики, то она составлена таким образом, что различные отделы связаны между собой, а не отделены друг от друга, как это обычно делается в учебниках. Так, например, автор пользуется методами аналитической геометрии в приложении к алгебре, что делает последнюю более ясной, а геометрию — практически более приложимой.

В главе III рассмотрено употребление циркуля для пропорционального деления, которым весьма часто приходится пользоваться инженеру. В учебниках он обычно не рассматривается вовсе.

Элемент времени подробно рассматривается в отделе тригонометрических функций по той причине, что с каждым годом возрастает значение периодических зависимостей и инженер должен быть с ними более основательно ознакомлен.

Автор надеется, что отделы, в которых изложены дифференциальное и интегральное исчисления, будут весьма полезны для многих читателей. Графическим методам в этих отделах отведено значительное место. Функции от функции рассматриваются более широко, чем это обычно делается в учебниках.

Кроме того, обращено внимание на то значение, которое имеет в дифференциальном исчислении понятие о пределе скорости изменения, а в интегральном — представление об интеграле как о произведении двух переменных, выражающем площадь.

Автор глубоко признателен м-ру Ирвингу Меткаф за его помощь при подготовке рукописи к печати, а также профессору Корнелльского университета Вальтеру Б. Кэрверу за многочисленные полезные указания.

Раймонд В. Дэлл.

Чикаго, Иллинойс.
Июнь 1926 г.

Глава I.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОСРЕДСТВОМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФОРМУЛ.

1. Сложение столбцами. При сложении цифр, находящихся в одном столбце, например в столбце единиц, не следует производить это действие в уме.

В уме нужно отмечать лишь результаты последовательного сложения, а именно:

$$2 - 11 - 18 - 23 - 28 - 32.$$

Рекомендуется писать сумму цифр каждого столбца отдельно, а не переносить десятки в следующий столбец.

Проверку начинают с левого столбца.

Самое сложение следует производить на отдельном листе бумаги и после проверки переносить полученные ответы на соответствующее место.

$$\begin{array}{r}
8742\\
5279\\
8267\\
3425\\
8765\\
9874\\
\hline
32\\
32\\
30\\
41\\
\hline
44352
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\text{Проверка}\\
41\\
30\\
32\\
32\\
\hline
44352
\end{array}$$

2. Банковский способ сложения. По этому способу десятки, получившиеся от сложения цифр какого-нибудь столбца, прибавляются к единицам суммы цифр следующего столбца. При этом не приходится складывать суммы, полученные от сложения отдельных столбцов, как в § 1, а просто последние цифры сумм сносятся вниз.

$$\begin{array}{r}
5280\\
9760,50\\
349\\
4006,75\\
6522,89\\
132,12\\
\hline
16\\
22\\
21\\
25\\
20\\
26\\
\hline
26051,26
\end{array}$$

3. Периодическое сложение. При этом способе слагаемые располагают в столбец и последовательно их складывают, пока сумма не будет несколько меньше 20.

Эту сумму разбивают на два слагаемых, одно из которых равно десяти, а второе — оставшемуся числу единиц. Второе слагаемое складывается с последующими, и когда сумма будет опять близка к 20, поступают, как описано выше.

$$
\begin{array}{l}
8 \\
3 \\
4 \\
2\ (17) = 10 + 7, \text{ сносим } 7 \\
6 \\
1\ (14) = 10 + 4, \text{ сносим } 4 \\
7 \\
8\ (19) = 10 + 9, \text{ сносим } 9 \\
5 \\
3\ (17) = 10 + 7, \text{ сносим } 7 \\
6 \\
4\ (17) = 10 + 7, \text{ сносим } 7 \\
7\ (14) = \text{последней сумме} \\
\underline{50} = 5 \cdot 10 \\
64\ \text{(О т в е т).}
\end{array}
$$

4. Сложение в уме двузначных чисел. Сложение следует начинать с первого числа (25) и попеременно прибавлять в уме сначала единицы (6) следующего числа, а затем десятки (40). Это удобнее, чем прибавлять сразу единицы и десятки. Таким образом имеем:

$$
\begin{array}{r}
25 \\
46 \\
81 \\
92 \\
66 \\
\hline
310
\end{array}
$$

$$25 + 6,\ 31 + 40,\ 71 + 1,\ 72 + 80 \text{ и т. д.}$$

Рекомендуется отмечать в уме только ответы:

$$25 — 31 — 71 — 72 — 152 — 154 — 244 — 250 — 310.$$

5. Сложение в уме трехзначных чисел. Такое сложение производится точно так же, как и в случае двузначных чисел (§ 4).

После прибавления десятков прибавляют сотни. Так, в примере, написанном справа, действие произведено таким образом:

$$
\begin{array}{r}
237 \\
764 \\
541 \\
\hline
1542
\end{array}
$$

$$237 — 241 — 301 — 1001 — 1002 — 1042 — 1542.$$

6. Вычитание посредством сложения. Разность можно найти как слагаемое; для этого рассматриваем уменьшаемое как сумму, а вычитаемое—как одно из слагаемых.

$$\begin{array}{r} 17953 \\ -\ \ 8726 \\ \hline 9227 \end{array}$$

Пусть, например, требуется вычесть 8726 из 17953.

Рассуждаем так:

Сколько надо прибавить единиц к 6, чтобы получить сумму, оканчивающуюся цифрой 3? Очевидно, 7.

От сложения 6 и 7 должны получиться три единицы и один десяток, который мы и прибавили к двум десяткам в вычитаемом.

Сколько десятков нужно прибавить к трем десяткам, чтобы получить сумму, оканчивающуюся цифрой 5? Очевидно, 2 и т. д.

Итак:

$$\begin{array}{r} 6+\mathbf{7}=13 \\ 3+\mathbf{2}=\ \ 5 \\ 7+\mathbf{2}=\ \ 9 \\ 8+\mathbf{9}=17 \end{array}$$

Цифры, напечатанные жирным шрифтом, должны быть написаны в ответе.

7. Вычитание при помощи дополнений. Пусть требуется вычесть 8 из 27.

Дополнение 8 до 10 равно 2. Если оба числа увеличить на 2, то очевидно вычитание упрощается:

$$\begin{array}{r} 27+2=\mathbf{29} \\ 8+2=\mathbf{10} \\ \hline \mathbf{19} \end{array}$$

Вычтем 94 из 173:

$$173-94=(173+6)-(94+6)=179-100=79.$$

8. Совместное сложение и вычитание. Если некоторые из чисел, стоящих в столбце, должны быть прибавлены, а другие вычтены, то применяют один из следующих методов:

1. Сначала складывают отдельно все положительные числа, затем—все отрицательные. После этого находят разность полученных чисел.

2. Последовательно складывают и вычитают числа, стоящие в каждом столбце.

$$\begin{array}{r} 7483 \\ 4829 \\ -\ 3182 \\ -\ 6334 \\ 8371 \\ -\ 1217 \\ \hline +\ 20683 \\ -\ 10733 \\ \hline 9950 \end{array}$$

9. Для упрощения вычислений рекомендуется изучить следующую таблицу умножения:

Таблица умножения.

13 × 1 = 13	**14** × 1 = 14	**15** × 1 = 15	**16** × 1 = 16
2 = 26	2 = 28	2 = 30	2 = 32
3 = 39	3 = 42	3 = 45	3 = 48

13 × 4 = 52	**14** × 4 = 56	**15** × 4 = 60	**16** × 4 = 64
5 = 65	5 = 70	5 = 75	5 = 80
6 = 78	6 = 84	6 = 90	6 = 96
7 = 91	7 = 98	7 = 105	7 = 112
8 = 104	8 = 112	8 = 120	8 = 128
9 = 117	9 = 126	9 = 135	9 = 144
10 = 130	10 = 140	10 = 150	10 = 160
11 = 143	11 = 154	11 = 165	11 = 176
12 = 156	12 = 168	12 = 180	12 = 192
13 = 169	13 = 182	13 = 195	13 = 208
	14 = 196	14 = 210	14 = 224
		15 = 225	15 = 240
			16 = 256

17 × 1 = 17	**18** × 1 = 18	**19** × 1 = 19
2 = 34	2 = 36	2 = 38
3 = 51	3 = 54	3 = 57
4 = 68	4 = 72	4 = 76
5 = 85	5 = 90	5 = 95
6 = 102	6 = 108	6 = 114
7 = 119	7 = 126	7 = 133
8 = 136	8 = 144	8 = 152
9 = 153	9 = 162	9 = 171
10 = 170	10 = 180	10 = 190
11 = 187	11 = 198	11 = 209
12 = 204	12 = 216	12 = 228
13 = 221	13 = 234	13 = 247
14 = 238	14 = 252	14 = 266
15 = 255	15 = 270	15 = 285
16 = 272	16 = 288	16 = 304
17 = 289	17 = 306	17 = 323
	18 = 324	18 = 342
		19 = 361

10. Как давать сдачу. 1) Назовите стоимость товара; 2) добавьте мелочь до „ровного счета“; 3) прибавьте крупные монеты.

Пример. Стоимость предмета — 33 коп. Покупатель дает 50 коп.

1) Отмечаем, что стоимость товара — 33 коп.; 2) добавляем 2 коп. до 35 коп.; 3) добавляем 15 коп.

11. Другие сокращенные способы вычислений. *Чтобы умножить на 0,025*, следует отделить один десятичный знак справа и разделить полученное число на 4.

Чтобы умножить на 0,0(3), следует отделить один десятичный знак справа и разделить полученное число на 3.

Чтобы умножить на 0,05, следует отделить один десятичный знак справа и разделить полученное число на 2.

Чтобы умножить на 0,075, следует отделить один десятичный знак справа и вычесть из полученного числа $\frac{1}{4}$ его.

Чтобы умножить на 0,1125, следует отделить один десятичный знак справа и прибавить к полученному числу $\frac{1}{8}$ его.

Чтобы умножить на 0,1(3), следует отделить один десятичный знак справа и прибавить к полученному числу $\frac{1}{3}$ его.

Чтобы умножить на 0,1375, следует отделить один десятичный знак и прибавить к полученному числу $\frac{1}{4}$ его, плюс $\frac{1}{2}$ от $\frac{1}{4}$.

Чтобы умножить на 0,18, рассуждают так:

$$0{,}18 = 0{,}20 - 0{,}02 = \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{10} \text{ от } \frac{1}{5}\right).$$

Таким образом, следует разделить на 5 и вычесть 0,1 полученного числа.

Чтобы умножить на 0,2(3), рассуждают так:

$$0{,}2(3) = 0{,}20 + 0{,}0(3) = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \text{ полученного числа.}$$

Таким образом, следует разделить на 5 и прибавить к полученному числу $\frac{1}{6}$ его.

Чтобы умножить на 0,24, рассуждают так:

$$0{,}24 = 0{,}25 - 0{,}01 = \frac{1}{4} - 0{,}01.$$

Таким образом, следует разделить данное число на 4 и отнять от полученного числа 0,01 первоначального.

Чтобы умножить на 0,275, рассуждают так:

$$0{,}275 = 0{,}25 + 0{,}025 = \frac{1}{4} + \frac{1}{10} \text{ от } \frac{1}{4}.$$

Таким образом следует разделить на 4 и прибавить к полученному числу $\frac{1}{10}$ его.

Чтобы умножить на 0,45, рассуждают так:

$$0{,}45 = 0{,}50 - 0{,}05 = \frac{1}{2} - \frac{1}{10} \text{ от } \frac{1}{2}.$$

Поэтому следует разделить данное число на 2 и вычесть из полученного числа $\frac{1}{10}$ его.

Чтобы умножить число на 25, следует перенести запятую на два знака вправо и разделить полученное число на 4.

Чтобы умножить число на 75, следует перенести запятую на два знака вправо, разделить полученное число на 4 и умножить на 3.

Чтобы умножить число на 125, следует перенести запятую на три знака вправо и полученное число разделить на 8.

Чтобы умножить число на 250, следует перенести запятую на три знака вправо и полученное число разделить на 4.

Обратно:

Чтобы разделить число на 25, следует перенести запятую на два знака влево и умножить полученное число на 4.

Чтобы разделить число на 75, следует перенести запятую на два знака влево, умножить полученное число на 4 и разделить результат на 3.

Чтобы разделить число на 125, следует перенести запятую на три знака влево и умножить полученное число на 8.

Чтобы разделить число на 250, следует перенести запятую на три знака влево и умножить полученное число на 4.

12. Арифметические действия часто могут быть упрощены при помощи алгебраических формул. Пользование последними удобнее, чем применение сложных правил, которые к тому же трудно вспоминать.

Применение нескольких таких формул дано ниже.

13. Возвышение в квадрат чисел, оканчивающихся цифрой 5.

Рассмотрим число, состоящее только из единиц и десятков, т. е. двузначное число.

Пусть число десятков равно a, тогда

$$(10a+5) = \text{данному числу.}$$

$$(10a+5)^2 = 100a^2 + 100a + 25$$
$$= 100a\,(a+1) + 25.$$

Поэтому, если мы умножим число десятков на него самого плюс единица и припишем справа к полученному произведению 25, то получим квадрат данного числа.

Пример. Возвысить в квадрат число 35.

$$\begin{array}{lr} \text{Имеем: } 100\cdot3\cdot4 = & 1200 \\ \text{Добавляем} & 25 \\ \hline & 1225 \end{array}$$

Можно не умножать на 100, а просто иметь в виду, что первое из полученных чисел дает сотни искомого квадрата, число же 25 — последние две цифры его.

Преимущество пользования таблицей умножения, приведенной в § 9, ясно из следующего примера.

Пример. Возвысить в квадрат 145.

$$\begin{array}{lr} \text{Имеем: } 14\cdot(14+1) = 14\cdot15 = & 210 \\ \text{приписываем} & 25 \\ \hline & 21025. \end{array}$$

В этом случае в данном числе имеется 14 десятков.

14. Возвышение в квадрат чисел с дробной частью $\frac{1}{2}$. Для возвышения в квадрат числа $\left(n+\frac{1}{2}\right)$ следует просто умножить целое число n на ближайшее большее целое число и к полученному прибавить $\frac{1}{4}$. Так, например,

$$\left(7\frac{1}{2}\right)^2 = (7\times8) + \frac{1}{4} = 56\frac{1}{4}$$

$$\left(10\frac{1}{2}\right)^2 = 110\,\frac{1}{4} \text{ (см. § 13).}$$

15. Возвышение в квадрат чисел, близких к 50. Находим избыток данного числа над 50, прибавляем его к 25, тогда получим сотни искомого числа. Затем добавляем квадрат упомянутого избытка:

$$(56)^2 = 100\,(25+6) + 6^2 = 3136$$

$$(53)^2 = 100\,(25+3) + 3^2 = 2809.$$

В самом деле

$$(50+a)^2=2500+100a+a^2=(25+a)\cdot 100+a^2.$$

Если число меньше чем 50, то сперва находим разность между ним и 50. Чтобы найти сотни искомого квадрата, вычитаем эту разность из 25. К полученным сотням прибавляем квадрат указанной разности. Так, например:

$$47^2=(25-3)\ 100+3^2=2209$$

$$41^2=(25-9)\ 100+9^2=1681.$$

16. Вычисление произведения двух чисел, оканчивающихся на 5, если десятки у обоих либо четные, либо нечетные. Обозначим буквой a число десятков первого числа и буквой b число десятков второго числа. Тогда первое число можно изобразить так:

$$(10a+5),$$

а второе

$$(10b+5).$$

$$(10a+5)\ (10b+5)=100ab+50b+50a+25.$$

Таким образом

$$100ab=a\cdot b\cdot 100$$

$$50a+50b=\frac{a+b}{2}\cdot 100.$$

Следовательно, для получения искомого числа поступаем так: складываем полусумму десятков с их произведением и приписываем к полученному числу справа 25.

Заметим, что a и b должны быть либо оба четными, либо оба нечетными, иначе их сумма не будет нацело делиться на 2, нельзя будет применить указанное правило.

Пример 1. Умножить в уме 65 на 45.

$$\frac{6+4}{2}=5$$

$$6\times 4=24$$

Сумма	29
Приписываем	25
	2925 (Ответ).

Пример 2. Умножить 175 на 195.

$$\frac{17+19}{2} = 18$$

$$17 \times 19 = 323$$

$$\text{Сумма} \quad 341$$

Приписываем 25

$$34125 \quad \text{(Ответ).}$$

В следующем параграфе рассмотрен случай, когда цифра десятков в одном числе четная, а в другом нечетная.

17. Вычисление произведения двух чисел, оканчивающихся цифрой 5, если в одном из них число десятков четное, а в другом нечетное. Обозначим четную цифру десятков в первом числе буквой a, а нечетную цифру их во втором— буквой b; имеем:

$$(10a+5)\ (10b+5) = 100ab + 50a + 50b + 25,$$

где, по условию, a — четное, b — нечетное. Если уменьшить b на единицу, чтобы сделать его четным, можно было бы производить дальнейшие действия так же, как и в § 16. В этом случае необходимо к полученному результату прибавить 50, так как это число является коэффициентом при b. Итак, имеем:

$$100ab = a \cdot b \cdot 100$$

$$50\ (b-1) + 50a = \frac{a+(b-1)}{2} \cdot 100$$

Прибавляем 25

и 50

(Ответ).

Для получения искомого числа следует поступать так:

Прибавляем произведение цифр десятков к полусумме цифры четных десятков и цифры нечетных, уменьшенной на единицу.

К полученной сумме (являющейся числом сотен в искомом произведении) приписываем справа 75. Тот же результат получим, если прибавить цифру десятков, разделенную на 2, отбрасывая получающийся при этом остаток.

Пример 1. Умножить 45 на 55.

Имеем: $4 \times 5 = 20$

$$\frac{4+(5-1)}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\text{Сумма} \quad 24$$

Приписываем 75

$$2475 \quad \text{(Ответ).}$$

Пример 2. Умножить 165 на 135.

Имеем: $16 \times 13 = 208$

$$\frac{16+12}{2} = 14$$

Сумма 222

Приписываем 75

22275 (Ответ).

Применение алгебраических формул при умножении.

18. Формула $a\ (b-c)$. Раскрывая скобки, получаем:

$$a\ (b-c) = ab - ac.$$

Пример. Умножить 945 на 998.

$$945 \times 998 = 945\ (1000-2) = 945000 - (945 \cdot 2) = \\ = 945000 - 1890 = 943110.$$

19. Формула $a\ (cb+c) = acb + ac.$

Пример. Умножить 384 на 246.

$$246 = (6 \times 40) + 6.$$

Отсюда $384 \times 246 = 384\ [(6 \times 40) + 6]$

$$384 \times 6 = 2304,\ 2304 \times 40 = 92160$$

$$92160 + 2304 = 94464 \text{ (Ответ).}$$

Удобнее умножать сначала на 6, а затем на 40.

Самое действие располагается так:

$$\begin{array}{r} 384 \\ 246 \\ \hline 2304 \\ 40 \times 2304 = 9216 \\ \hline 94464 \end{array}.$$

20. Формула $ab = ba$. Иногда оказывается удобным переставить множители. Так, например, 89% от 25 рублей равны 25% от 89 рублей, т. е. одной четверти от последнего числа.

21. Формула $(a+b)\ (a-b) = a^2 - b^2$.

Пример 1. Перемножить в уме 52 и 48.

Сравнивая с формулой, имеем:

$$(50+2)\ (50-2) = 50^2 - 2^2 = 2500 - 4 = 2496.$$

Заметим, что a^2 является квадратом среднего арифметического данных чисел, а b^2 — квадратом разности между последним и данными числами.

Пример 2. Умножить 75 на 65.

$$(70+5)(70-5)=4900-25=4875.$$

Пример 3.

$$97\times 103=(100+3)(100-3)=9991.$$

Пример 4.

$$31\times 29=(30+1)(30-1)=900-1^2=899.$$

Если задана разность квадратов чисел, то порядок действий — обратный.

Пример 5. Найти величину выражения 81^2-62^2.

Здесь $a=81,\ b=62$.

$$(a-b)(a+b)=19\times 143=2717.$$

Эту формулу удобно применять в том случае, когда в прямоугольном треугольнике заданы гипотенуза и один из катетов, причем требуется найти второй катет.

Пусть: a — длина гипотенузы, b — длина известного катета, x — длина неизвестного катета.

Очевидно

$$x=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{(a+b)(a-b)}.$$

Пример 6. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 5, а один из катетов равен 3. Определить длину второго катета.

$$x=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{(5+3)(5-3)}=\sqrt{8\cdot 2}=4.$$

22. Формулы $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

Пример 1. Вычислить в уме $(54)^2$. Имеем:

$$54^2=(50+4)^2=50^2+(2\times 50\times 4)+4^2=2500+400+16=2916$$

Пример 2. Вычислить в уме $(49)^2$.

$$49^2=(50-1)^2=2500-(2\times 50\times 1)+1^2=2500-100+1=2401.$$

23. Формула $(a+b)(a+c)=a^2+(b+c)a+bc$.

Пример 1. Умножить в уме 121 на 126.

$$(120+1)(120+6)=14400+(7\times 120)+6=14400+840+6=15246.$$

Если задача такого вида не может быть решена в уме, то, применяя этот способ, можно сильно сократить время, требующееся для вычислений.

Пример 2. Умножить 76 на 81.

Имеем:

$$(80+1)\ (80-4)=6400-240-4=6156,$$

или, иначе,

$$(70+6)\ (70+11)=4900+1190+66=6156.$$

Заметим, что в этом случае число десятков должно быть одним и тем же в обоих числах. Произведение двух чисел, имеющих одно и то же число десятков, равно квадрату десятков плюс произведение десятков на сумму единиц плюс произведение единиц.

24. Формула $(a+b)\ (c+b)=ac+(a+c)\ b+b^2$. Следует обратить внимание на то, что число единиц в обоих числах одинаково.

Пример. Умножить в уме 42 на 72.

$$\begin{array}{rl} ac= & 40\times 70=2800 \\ (a+c)b= & (40+70)\times 2= \ \ 220 \\ b^2= & 2\times 2 \qquad = \quad\ \ 4 \\ \hline & \qquad\qquad\quad 3024 \end{array}$$

Итак, произведение двух чисел, у которых число единиц одинаково, равно квадрату единиц плюс произведение единиц на сумму десятков плюс произведение десятков.

Рекомендуется сравнить это правило с произведением в n^0 23 и заметить разницу между ними.

25. Формула $(a+b)\ (c+d)=ac+bc+ad+bd$.

$$\begin{array}{r} 83 \\ 94 \\ \hline 7212 \\ 27 \\ 32 \\ \hline 7802 \end{array}$$

Произведение двух чисел равно сумме произведения единиц, произведения десятков и произведений десятков на единицы.

Напишем произведение единиц (12), а непосредственно перед ними произведение десятков (72). Числа 27 и 32 суть произведения единиц на десятки и должны быть написаны под сотнями и десятками числа 7212. Заметьте, что при этом способе нет необходимости переносить какие бы то ни было величины.

Следует помнить, что для произведения единиц необходимо оставить места двух последних десятичных знаков. Если же это произведение является однозначным, то на место второго знака помещается нуль. Так, например:

$$\begin{array}{r} 8\ 4' \\ 6\ 2 \\ \hline 4808 \\ 24\ \ \\ 16\ \ \\ \hline 5208 \end{array}$$

Рекомендуется употреблять таблицы умножения, приведенные в n⁰ 9:

$$\begin{array}{r} 1\ 4\ 3 \\ \underline{1\ 8\ 6} \\ 25218 \\ 84 \\ \underline{54} \\ 26598 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 3\times 6=18 \qquad\qquad 14\times 18=252 \\ \qquad 6\times 14=84 \\ \qquad 3\times 18=54 \end{array}$$

Если указанных таблиц не имеется, то для отыскания нужных произведений располагают действия аналогично предыдущему:

$$\begin{array}{r} 1\ 4 \\ \underline{1\ 2} \\ 108 \\ \underline{6} \\ 168 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\ 5 \\ \underline{1\ 5} \\ 125 \\ \underline{10} \\ 225 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\ 6 \\ \underline{1\ 7} \\ 142 \\ \underline{13} \\ 272 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\ 8 \\ \underline{1\ 9} \\ 172 \\ \underline{17} \\ 342 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\ 9 \\ \underline{1\ 9} \\ 181 \\ \underline{18} \\ 361 \end{array}$$

Последнее действие можно формулировать в виде следующего простого правила:

Прибавьте 100 к произведению единиц, а затем прибавьте сумму единиц, предварительно сдвинув ее на один знак влево.

26. Умножение на 21, 31, 41 и т. д. или на 401, 601 и т. д.

Пример 1. Умножить 287 на 41.

$$287\times 4=1148. \qquad \begin{array}{r} \dot{2}\ 8\ 7 \\ \underline{4\ 1} \\ \underline{1148} \\ 11767 \end{array}$$

Прибавим 287 к 1148, передвинув 287 на один знак вправо. После некоторой практики, удается прибавлять множимое к произведению его на десятки множителя без повторного переписывания, по мере хода умножения. Сперва должна быть написана цифра 7, цифру 8 следует прибавить к произведению 4×7 и т. д.

Пример 2. Умножить 458×601.

$$\begin{array}{r} 4\ 5\ 8 \\ \underline{6\ 0\ 1} \\ 2752\ 58 \end{array}$$

Снесем 58.

Умножим на 6 и прибавим 4 к последней цифре полученного произведения.

27. Умножение по методу избытка и недостатка.

Пример. Умножить 107×104.

Данные числа больше 100 соответственно на 7 и 4 (то есть 7 и 4 являются избытком для данных чисел).

1. Найдем произведение избытков $7\times 4=28$; число 28 дает две последние цифры искомого произведения.

2. Прибавьте избыток одного из данных сомножителей к другому и полученную при этом сумму припишите слева к произведению избытков:

$$107+4=111.$$

Поэтому

$$11128 = \text{Ответ}.$$

Пример. Умножить 97 на 96.

Недостатки данных сомножителей до 100 будут соответственно 3 и 4.

1. Произведение недостатков дает последние цифры ответа $3 \times 4 = 12$.

2. Вычтем недостаток одного из данных сомножителей из другого: $96 - 3 = 93$; полученную разность припишем слева к произведению недостатков. Таким образом, получим ответ 9312.

28. Аликвотные части. Аликвотной частью данного числа называется такое число, которое содержится в данном большем целое число раз.

Таким образом

$$25 = \frac{1}{4} \text{ от } 100, \quad 10 = \frac{1}{5} \text{ от } 50.$$

Удобство пользования аликвотными частями при вычислениях видно из следующих примеров:

Пример 1. Стоимость 16 часов работы по 25 коп. за час: 25 коп. есть $\frac{1}{4}$ от 1 руб.

$$16 \times \frac{1}{4} = 4 \text{ рубля.}$$

Пример 2. Оплата за 60-часовой заработок из расчета по 75 коп. за час: 75 коп. есть $\frac{3}{4}$ от 1 руб.

$$60 \times \frac{3}{4} = 45 \text{ руб.}$$

Если приходится часто производить вычисления, аналогичные приведенным примерам, то весьма удобно пользоваться аликвотными частями, помещенными в нижеследующей таблице 1 для шестнадцатых долей.

Таблица 1.

$^1/_{16}$				$6^1/_4\%$	$^9/_{16}$				$56^1/_4$
	$^1/_8$			$12^1/_2$		$^5/_8$			$62^1/_2$
$^3/_{16}$				$18^3/_4$	$^{11}/_{16}$				$68^3/_4$
		$^1/_4$		25			$^3/_4$		75
$^5/_{16}$				$31^1/_4$	$^{13}/_{16}$				$81^1/_4$
	$^3/_8$			$37^1/_2$		$^7/_8$			$87^1/_2$
$^7/_{16}$				$43^3/_4$	$^{15}/_{16}$				$93^3/_4$
			$^1/_2$	50					

Пример 3. 48 час. по $18\frac{3}{4}$ коп. составляют $\frac{3}{16}$ от 48, т. е. 9 руб.

Указанным способом можно составлять платежные списки, вычислять торговый учет и т. д. Твердое знание свойств шестнадцатых и восьмых долей необходимо инженерам, потому что различные измерения часто производятся в указанных долях.

Весьма полезна также нижеприведенная таблица 2 двенадцатых долей.

Таблица 2.

$^1/_{12}$					$8^1/_3\%$
	$^1/_6$				$16^2/_3$
		$^1/_4$			25
			$^1/_3$		$33^1/_3$
$^5/_{12}$					$41^2/_3$
				$^1/_2$	50
$^7/_{12}$					$58^1/_3$
			$^2/_3$		$66^2/_3$
		$^3/_4$			75
	$^5/_6$				$83^1/_3$
$^{11}/_{12}$					$91^2/_3$

$$50 \text{ коп.} - 8\frac{1}{3} \text{ коп.} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12} = 41\frac{2}{3} \text{ коп.}$$

$$1 \text{ руб.} - 41\frac{2}{3} \text{ коп.} = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12} = 58\frac{1}{3} \text{ коп.}$$

$$16\frac{2}{3} \text{ коп.} + 58\frac{1}{3} \text{ коп.} = \frac{1}{6} + \frac{7}{12} = \frac{3}{4} = 75 \text{ коп.}$$

60 *кв. м* черепицы по $91\frac{2}{3}$ коп. $= \frac{11}{12}$ от 60 руб. $= 55$ руб.

Руб. 120 по $16\frac{2}{3}\%$ учета $= 120 - \frac{1}{6}$ от $120 = 120 - 20 =$ $=$ руб. 100.

Проценты на 240 руб. по $8\frac{1}{3}\%$ в год. $\frac{1}{12}$ от 240 руб. $=$ $= 20$ руб.

29. Определение места запятой. Запятая должна быть поставлена только после тщательного выяснения ее места. В случае вычислений, производимых при помощи упрощенных способов, а также на счетной линейке, найти место запятой обычным приемом весьма затруднительно, почему и рекомендуем нижеследующие способы.

Пример. Умножить 4652 на 3,1416.

Заметим, что ответ должен быть немного более множимого, взятого три раза, при этом он будет иметь пять цифр слева от запятой.

Если множитель есть 3141,6, то принимаем его за число 3 с запятой, передвинутой на три знака вправо; 3×4652 будет содержать пять цифр плюс три нуля, что в результате дает восемь знаков слева от запятой.

Если множитель есть 0,0000031416, принимаем его за число 3 с запятой, передвинутой на шесть знаков влево; 3×4652 будет иметь пять знаков, но перенесение запятой назад на шесть знаков даст в результате один нуль перед первой значащей цифрой.

30. Положение запятой при делении. При делении десятичных дробей переносим запятую в знаменателе (в уме) за первую значащую цифру. Затем переносим запятую в числителе или в делимом на столько же знаков и в том же направлении, что и в знаменателе или в делителе. Ставим запятую на соответствующее место после его определения.

Примеры.

$$\frac{2,717}{31416} = \frac{0,0002717}{3,1416} = 0,0000865 \approx 0,00009 \text{ (Ответ).}$$

$$\frac{31,416}{0,002717} = \frac{31416,}{2,717} = 11\,558 \approx 10\,000 \text{ (Ответ).}$$

31. Если в данном выражении необходимо перемножить и разделить несколько чисел, то найти положение запятой без применения специальных приемов, предназначенных для этой цели, весьма затруднительно. Для определения положения запятой рекомендуется исследовать задачу, прежде чем производить указанные действия. При этом работа упрощается, так как числа можно предварительно округлить.

Для определения положения запятой, а также приближенного ответа, поступаем так:

Разбиваем каждое из входящих в данное выражение чисел на два множителя. Одним множителем является число, получающееся из данного путем перенесения запятой за первую слева значащую цифру; вторым — число 10, возведенное в такую степень, чтобы произведение обоих множителей равнялось первоначальному числу. Так, например:

$$4000 = 4{,}000 \times 10 \times 10 \times 10 = 4 \times 10^3.$$

Точно так же

$$523 = 5{,}23 \times 10^2.$$

Показатель степени при 10 равен числу десятичных знаков, на которое была передвинута запятая. Если запятая была передвинута на три знака влево, как в приведенном примере, и 4 является единственным целым числом, то показатель положителен. Если же запятая передвинута на два знака вправо ($0{,}04 = 4 \times 10^{-2}$), показатель отрицателен и равен (-2).

Точно так же, если в знаменателе имеется число 10 в какой-либо степени, то его можно перенести в числитель, изменив при этом знак показателя на обратный:

$$10 = 1 \times 10^1 \qquad \frac{1}{10} = 1 \times \frac{1}{10} = 1 \times 10^{-1}$$

$$200 = 2 \times 10^2 \qquad \frac{1}{100} = 1 \times \frac{1}{10} = 10^{-2}$$

$$3000 = 3 \times 10^3 \qquad \frac{0}{0{,}1} = 1 \times \frac{1}{10^{-1}} = 1 \times 10^1$$

$$0{,}1 = 1 \times 10^{-1} \qquad \frac{1}{0{,}02} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{10^{-2}} = \frac{1}{2} \times 10^2$$

$$0{,}01 = 1 \times 10^{-2}$$

$$0{,}001 = 1 \times 10^{-3}$$

32. Применение способов, указанных в n° 31. Рассмотрим следующий пример:

$$\frac{22684 \times 0{,}0713}{0{,}00189 \times 83 \times 6} \approx \frac{(2 \times 10^4)\quad(7 \times 10^{-2})}{(2 \times 10^{-3})\ (8 \times 10)\ (6)}.$$

Выделяя множители, представляющие собою степени 10 (это мы делаем на практике, конечно, без промежуточных объяснений, изложенных выше), имеем:

$$\frac{2 \times 7}{2 \times 8 \times 6} \times 10^{4-2+3-1};$$

сокращаем на 2:

$$\frac{7}{48} \times 10^4 = \frac{7}{4{,}8} \times 10^3 = 1{,}459 \times 10^3 = 1459.$$

Это и дает положение запятой. Мы теперь знаем достаточно точно, каков должен быть ответ, и можем легко указать степень приближения каждого числа в том случае, если желаем иметь более точный результат.

Пример.

$$\frac{4{,}89\times986}{373\times0{,}07\times472}=\frac{5\times1}{4\times7\times5}\times10^{3-2+2-2}=\frac{1}{2{,}8}=0{,}36.$$

33. Деление. В детстве нас учили определять, сколько раз делитель содержится в делимом, путем проб. Для этого следовало делить первые цифры делимого на первую слева цифру делителя; величина произведения полученного частного на первую цифру делителя сразу показывала, не было ли пробное частное взято слишком большим.

Если пробное частное умножить на **в т о р у ю** цифру делителя и прибавить результат к произведению первой цифры делителя на указанное частное, то полученное при этом число будет лучше служить для сравнения.

Сравним старый способ с новым. Имеем

$$113{,}344\ \Big|\ \frac{2456}{5}$$

По старому способу следовало бы считать, что цифра 5 взята удачно, так как 5×2 меньше 11. Однако, если мы умножим вторую цифру делителя, т. е. 4, на 5, — мы должны будем прибавить 2 к 5×2, причем получим 12. Это сразу покажет, что цифра 5 велика; вместо нее следует взять 4.

34. Деление посредством разложения на множители. Разложим делитель на множители и произведем деление сокращенным способом (если возможно — в уме), при этом выписываем только ответы.

Пример 1. Разделить 504 на 42.
Множителями числа 42 являются: 2, 3 7 или 6 и 7.

$$\begin{array}{r|l}504 & 2\\ 252 & 3\\ 84 & 7\end{array}\qquad \text{или}\qquad \begin{array}{r|l}504 & 6\\ 84 & 7\end{array}$$

12 = О т в е т.   12 = О т в е т.

К этому результату можно притти, разложив предварительно делимое и делитель на множители и сократив те из них, которые являются общими

Пример 2.

$$\begin{array}{r|l} 504 & 2 \\ 252 & 2 \\ 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & \end{array} \qquad 504 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 \qquad \begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & \end{array}$$

Остающиеся в делимом после сокращения множители:

$$2 \times 2 \times 3 = 12 \text{ (Ответ).}$$

Указанный прием не всегда требует меньше времени, но зато обычно дает более верные результаты.

Проверка арифметических действий девятками.

35. Сложение. Складываем цифры, образующие каждое из данных чисел; полученные при этом суммы делим на 9 и сравниваем сумму получающихся здесь остатков с тем остатком, который образуется при делении на 9 суммы цифр нашего ответа (суммы данных чисел).

Пример.

$$\begin{array}{r} 3448 \\ 7128 \\ 8873 \\ 4123 \\ \hline 22 \\ 15 \\ 14 \\ 22 \\ \hline 23572 \end{array}$$

$$\frac{3+4+4+8}{9} = \frac{19}{9} = \text{в остатке } 1.$$

$$\frac{7+1+2+8}{9} = \frac{18}{9} = \text{в остатке } 0.$$

$$\frac{8+8+7+3}{9} = \frac{26}{9} = \text{в остатке } 8.$$

$$\frac{4+1+2+3}{9} = \frac{10}{9} = \text{в остатке } \underline{1.}$$

$$\frac{10}{9} = \text{в остатке}$$

$$\frac{2+3+5+7+2}{9} = \frac{19}{9} = \text{в остатке } 1.$$

36. Вычитание. Рассматриваем уменьшаемое как сумму вычитаемого и остатка; затем поступаем так же, как и при проверке сложения.

Пример.

$$\begin{array}{r} 4829 \\ \hline 3347 \\ \hline 1482 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 4+8+2+9 = \text{в остатке } 5 \\ 3+3+4+7 = \text{в остатке } 8 \\ 1+4+8+2 = \text{в остатке } 6 \end{array}$$

$$\frac{8+6}{9} = \text{в остатке } 5.$$

37. Умножение. Находим остатки множимого и множителя, получающиеся при делении каждого из них на 9; перемножаем эти остатки и делим их произведение на 9; получающийся при этом остаток должен быть равен остатку от деления на 9 произведения данных двух чисел.

Пример.

$$\begin{array}{r} 365 \\ 56 \\ \hline 2190 \\ 1825 \\ \hline 20440 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5 \\ 2 \\ \hline 10 \end{array} = \text{в остатке } 1.$$

$$2+0+4+4+0=10, \text{ т. е. в остатке } 1.$$

38. Деление. Рассматриваем делимое как произведение частного на делитель и поступаем так, как и при проверке умножения.

39. Упрощение действий при проверке девятками. Пусть сумма данных чисел 2689143; разделим сумму цифр на 9; получим $33:9$, что дает в остатке 6.

Можно получить этот же результат и более быстрым путем. Складываем сначала цифры данного числа, а затем цифры полученной суммы, т. е. $3+3=6$, и сразу получаем искомый остаток вместо того, чтобы находить его делением 33 на 9.

40. Другой сокращенный способ состоит в вычеркивании всех цифр, образующих вместе 9 [1]).

Возьмем число 2689143; группируем цифры его так: $6+3$, $8+1$, 9; остающиеся цифры 2 и 4 дают в сумме 6, что и является остатком.

41. Признаки делимости. Все четные числа делятся на 2.

Число делится на 3, если сумма цифр его делится на 3.

Пример. 4782. $4+7+8+2=21$, число 21 делится на 3, поэтому 4782 также делится на 3.

Число делится на 4, если его две последние цифры сами делятся на 4 или образуют число, делящееся на 4.

Число, оканчивающееся на 0 или на 5, делится на 5.

Четное число делится на 6, если сумма его цифр делится на 3.

7, 11, 13 делят число 1001, а также любое число, в которое 1001 входит сомножителем, как например 5005, 8008, 12012 и т. д.

---

[1]) Второй способ принципиально не отличается от первого. Разница только в технике выполнения счета. В самом деле, по второму способу мы откладываем все цифры, дающие в сумме девять. Считая же первым способом, мы также их не учтем, потому что при делении общей суммы цифр числа на 9 такие цифры не будут влиять на величину остатка при делении.

Прим. ред.

Число делится на 8, если оканчивается тремя нулями или если его последние три цифры образуют число, делящееся на 8, как например 125000 или 164896.

Число делится на 9, если сумма цифр его делится на 9.

Число, оканчивающееся на 0, делится на 10.

Число делится на 25, если оно оканчивается двумя нулями или если его последние две цифры образуют произведение 25 на какое-либо число.

Число делится на 125, если оно оканчивается тремя нулями или если его последние три цифры образуют произведение 125 на какое-либо число.

Множитель данного числа является также множителем во всех произведениях данного числа.

Общий множитель двух чисел является также и множителем их суммы или разности.

Пример. 4 есть общий множитель 20 и 36. Число 4 является множителем 56 и 16.

42. Извлечение квадратного корня при помощи алгебраической формулы. Здесь применяется формула:

$$(a+b)^2=a^2+2\,ab+b^2=a^2+(2a+b)\,b.$$

Обратно

$$\sqrt{a^2+2\,ab+b^2}=a+b$$

$$\begin{array}{r|l} & a^2 \\ \hline 2a+b & \quad 2\,ab+b^2 \\ b & \quad 2\,ab+b^2 \end{array}$$

Пример. Найти квадратный корень из 1156.

$$\begin{array}{lr|l} & & \sqrt{11'56} = \overset{a+b}{30+4} \\ & a^2 = & 900 \\ \text{Пробный делитель} & 2a=60 & \overline{256} \\ & \underline{b=4} & \\ \text{Полный делитель } (2a+b) & =64 & \underline{256} \end{array}$$

43. Сокращенный метод извлечения квадратного корня. Если величина b весьма мала, то без большой погрешности можно пренебречь членом b^2.

Тогда мы получаем

$$(a \pm b)^2 \approx a^2 \pm 2ab.$$

Приведем пример, чтобы показать порядок действий на основе этой формулы.

Пример. Найти квадратный корень из 327,12. Выбираем число, квадрат которого близок к данному числу. Это можно сделать или путем испытаний чисел, или при помощи таблицы либо квадратов либо квадратных корней в том случае, когда употребление таблицы логарифмов нецелесообразно. Испытаем $a = 18$; тогда $a^2 = 324$, получили число немного меньше данного 327,12.

Разность между данным числом 327,12 и 324 при этом равняется $+2ab$, т. е.

$$327{,}12 - 324 = 2 \times 18 \times b,$$

откуда

$$b = \frac{3{,}12}{36} = 0{,}087.$$

Так как $a + b$ есть корень квадратный из $(a + b)^2$, то

$$a + b = 18 + 0{,}087 = 18{,}087;$$

полученное число 18,087 и есть приближенное значение квадратного корня из данного числа 327,12.

В случае, когда квадрат испытуемого числа больше данного числа, имеем

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab \text{ приблизительно.}$$

Тогда, чтобы найти квадратный корень из данного числа, найденного таким же путем, что и выше, значение b вычитается из a.

44. Извлечение кубичного корня при помощи алгебраической формулы. Здесь применяется формула

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = \\ = a^3 + (3a^2 + 3ab + b^2)\,b.$$

$$\sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} = a + b$$

$$\begin{array}{r|l} & a^3 \\ \hline 3a^2 + 3ab + b^2 & 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ b & 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

Пример. Найти кубичный корень из 405224 [1]).

$$\sqrt[3]{405'224} = \overset{a+b}{70+4}$$

a^3	$=$		343 000
$3a^2$	$=$	14700	62 224
$3ab$	$=$	840	
b^2	$=$	16	
$3a^2+3ab+b^2$	$=$	15556	
$(3a^2+3ab+b)\,b$	$=$		62 224
$(15556 \times 4 = 62224)$			

45. Сокращенный способ извлечения кубичного корня.

При условии, что b весьма малая величина, этот метод подобен сокращенному методу извлечения квадратного корня. Мы принимаем

$$(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2b \text{ приблизительно.}$$

Пример. Найти приближенное значение кубичного корня из 2050,16. Путем проб устанавливаем, что ближайший к данному числу куб есть число $(13)^3 = 2197$, которое больше данного числа. Поэтому берем $a = 13$.

Разность между полученным кубом и данным числом

$$2197 - 2050{,}16 = 146{,}84 = -3\,a^2b$$

$$-3a^2b = -3 \times (13)^2 \times b = 146{,}84$$

$$-3 \times 169 \times b = 146{,}84$$

$$b = -0{,}29.$$

Отсюда выражение $(a - b)$, представляющее собою кубичный корень из $(a-b)^3$, равно

$$13 - 0{,}29 = 12{,}71.$$

Поэтому

$$\sqrt[3]{2050{,}16} = 12{,}71.$$

Более точное значение: 12,703.

---

[1]) Для нахождения величин a и b следует поступить так: взять цифру a с расчетом, чтобы куб числа, образованного цифрой a с соответствующим числом нулей, был наибольшим кубом такого вида, заключающимся в данном числе. В рассматриваемом примере $a = 7$, ибо 70 есть такое число, что его куб, равный 343 000, есть наибольший среди кубов двузначных чисел, состоящих из значащей цифры с нулем, который содержится в заданном числе 405 224.

Для определения b следует выделить полученный куб из данного числа и разность разделить на $3a^2$. В нашем примере $3a^2 = 14\,700$. Разность равна 62 224. Частное от деления равно 4.

В соответствии с формулой куба суммы нужно составить числа $3ab$ и b^2. Для данного примера эти числа равны 840 и 16. Числа $3a^2$, $3ab$, b^2 нужно сложить и сумму умножить на b. Вычтя это произведение, получим новую разность, относительно которой можем продолжать то же действие, если только полученная разность не будет равна нулю.

В нашем примере произведение равно 62 224 и разность равна нулю.

Прим. ред.

Глава II.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ. АБСОЛЮТНАЯ И ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТИ.

46. Приближенные значения величин. Инженеры часто производят вычисление, пользуясь величинами, полученными посредством измерений, отсчетов на инструментах или из справочников, бесцельно сохраняя при этих вычислениях излишнее количество десятичных знаков. Такие вычисления занимают очень много времени и дают ложное впечатление точности. Результат каждого измерения есть приближенное число, причем степень точности его должна зависеть от той цели, для которой данное измерение предназначается.

Пусть, например, инженер желает сравнить размер вала барабана подъемника, изготовленного во Франции, с размером вала, изготовленного в Америке.

На французской синьке показан размер диаметра, равный 24 *см*. Вероятно, инженер обратится к таблицам для перевода мер и увидит, что 1 *см* равен 0,3937 дюйма. После этого он умножит в уме 24 на 0,4 и найдет число дюймов в 24 *см*. Если же он предполагает закрепить на валу зубчатое колесо при помощи скрепляющих колец (надеваемых в горячем виде), то при вычислении диаметра расточки в ступице колеса придется принять в расчет точное значение постоянной, т. е. 0,3937.

47. Округленные числа. Число *округляется* посредством отбрасывания справа одной или нескольких цифр, причем если последняя из отброшенных цифр есть 5, 6, 7, 8 или 9, то предшествующую цифру следует увеличить на единицу.

Таким образом последовательные приближенные значения числа π получаются путем округления 3,14159 и равняются

$$3{,}1416 \quad 3{,}142 \quad 3{,}14 \quad 3{,}1 \quad 3.$$

48. Значащие цифры. Степень точности измерения определяется числом значащих цифр, получившихся в результате данного измерения. Значащими цифрами называются 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, а также нули, стоящие между ними или сохраненные при округлении числа.

Так, число 3 496 000,0 имеет восемь значащих цифр, так как нуль, стоящий после запятой, по принятому обозначению, указывает на то, что данное число является точным до десятых долей единицы. Отсюда ясно, что в указанном случае нуль есть значащая цифра и должен быть принят во внимание. Точно так же, если мы имеем число 3999,7 и округляем путем отбрасывания 0,7, то получим число 4000, которое следует рассматривать как имеющее четыре значащих цифры.

Если в результате измерения некоторой длины мы получили 14,1 *см*, то это значит, что указанная величина является точной *до десятой доли сантиметра*. Если же измерение было произведено с точностью до ближайшей сотой сантиметра и результат совпал с предыдущим, то следовало бы написать, что длина равна 14,10 *см*.

Другими словами, выражение $x = 14{,}1$ означает, что точное значение x находится между 14,05 и 14,15, а выражение $x = 14{,}10$ означает, что истинное значение x лежит между 14,095 и 14,105.

49. Верные цифры. Цифры, которые при округлении числа не были заменены нулями, называются *верными цифрами*.

Так, если вместо 247 895 взято 248 000, то в последнем числе имеются три верных цифры.

50. Абсолютной величиной какого-нибудь числа называется его положительное значение независимо от его знака. Абсолютная величина числа обозначается двумя вертикальными линиями, стоящими по обе стороны его, например так:

$$|a|.$$

Если a — положительно, то $|a|$ означает то же самое, что и a; но если оно отрицательно, то абсолютная величина $|a|$ соответствует *положительному* значению данного количества $(-a)$.

В дальнейшем будем называть 1, 10, 100 соответственно единицами первого, второго и третьего порядка, а 0,1, 0,01, 0,001 — единичными десятичными дробями первого, второго и третьего порядка.

51. Абсолютной погрешностью мы будем в дальнейшем называть разность между приближенным и точным значениями данной величины. Если, например, мы в вычислениях употребили, вместо точного значения величины, равного 2,457, ее приближенное значение 2,46, то абсолютная погрешность равняется

$$2{,}46 - 2{,}457 = 0{,}003.$$

Абсолютная погрешность положительна, если приближенное значение величины больше точного ее значения, и отрицательна, если приближенное значение меньше точного. Так, если взять 37,142 вместо 37,14247, то абсолютная погрешность равна

$$37{,}142 - 37{,}14247 = -0{,}00047.$$

52. Относительной погрешностью называется *отношение абсолютной погрешности к точному значению данной величины.* Так как относительная погрешность есть отношение, то она выражается отвлеченным числом и часто задается в процентах.

53. Предельная погрешность. Если наибольшее допустимое значение абсолютной или относительной погрешности результата вычислений произвольно установлено или определяется условиями задачи, его называют *предельной погрешностью* результата.

Если *предельная абсолютная погрешность* числа, точное значение которого равно 81,666, есть 0,01, то числа 81,67 и 81,66 имеют погрешность меньшую 0,01. Абсолютные погрешности будут равны соответственно 0,004 и 0,006.

Выражение: „абсолютная предельная погрешность 0,01" означает, что численная величина абсолютной погрешности результата не должна быть больше 0,01.

Всякое число между 81,657 и 81,675 имеет погрешность меньшую 0,01, ибо точное значение данной величины есть 81,666.

Точно так же выражение: *относительная предельная погрешность 1%* означает, что относительная погрешность результата вычислений по абсолютной величине меньше 1%.

54. Погрешности в числах. Если вместо 212,667 взято 212,700, то абсолютная погрешность равна 33, а относительная есть $\frac{33}{212667}$.

Если вместо 212,667 взято 212,7, то абсолютная погрешность равна 0,033, а относительная есть $\frac{0,033}{212,667}$.

Если вместо 0,212667 взято 0,2127, то абсолютная погрешность равна 0,000033, а относительная есть $\frac{0,000033}{0,212667}$.

$$\frac{33}{212667}=\frac{0,033}{212,667}=\frac{0,000033}{0,212667}.$$

На величину относительной погрешности влияет только число отброшенных цифр, положение же запятой на нее не влияет. Во всех трех случаях относительная погрешность равна, приблизительно, 0,00015.

Возьмем теперь вместо 212 667 число 212 600; тогда относительная погрешность будет равняться $\frac{-67}{212667}$, причем

$$\left|\frac{-67}{212667}\right| < \frac{100}{212667} = \frac{1}{2126,67} < \frac{1}{1000} = 0,001.$$

Таким образом относительная погрешность составляет величину, меньшую 0,001 от данного числа, или меньшую единичной десятичной дроби третьего порядка. Порядок на одну единицу меньше числа верных цифр (4) (см. n⁰ 49).

Если вместо 212 667 взять число 213 000, то абсолютная погрешность равна 333, а относительная есть $\frac{333}{212667}$.

Тогда

$$\frac{333}{212667} = \frac{0,333}{212,667} < \frac{1}{212,667} < \frac{1}{100} = 0,01.$$

Следовательно, относительная погрешность меньше 0,01 или единичной десятичной дроби второго порядка (см. n⁰ 50). Таким образом порядок относительной погрешности на единицу меньше числа верных цифр (3) (см. n⁰ 49).

Если вместо 212 637 взять число 212 600, то абсолютная погрешность равна (— 37), а относительная равна $\frac{-37}{212637}$.

Но

$$\frac{-37}{212637} = \frac{-0,37}{2126,37}$$

$$\left|\frac{-0,37}{2126,37}\right| < \frac{1}{2126,37} < \frac{1}{1000} = 0,001.$$

Абсолютная величина относительной погрешности меньше 0,001.

55. Для округления числа в случае, когда предельная относительная погрешность меньше единичной десятичной дроби определенного порядка, следует сохранить в числе на одну верную цифру больше, чем порядок указанной дроби. Обратно, если нужно найти приближенное значение данного числа путем округления, то абсолютная величина относительной погрешности не превысит единичной десятичной дроби, порядок которой на единицу меньше числа верных цифр.

Поэтому для округления числа таким образом, чтобы относительная погрешность была меньше некоторой предельной, равной например $1^0/_0$, т. е. 0,01, следует сохранить три верные цифры. Если же погрешность не должна превышать 0,001, следует оставить четыре цифры.

Таким образом, в случае необходимости округлить числа 314 159, 31 415,9, 3,14159, 0,0314159 с предельной относительной погрешностью, меньшей 0,001, то нужно оставить четыре цифры, взяв соответственно числа 314 200, 31 420, 3,142 и 0,03142.

Обратно, если вместо 3,2142 мы взяли 3,21, то погрешность не превзойдет предельной, равной 0,01 или 1%.

При рассмотрении погрешностей суммы, разности, произведения и частного, которые получаются в результате сложения, вычитания, умножения и деления чисел, в дальнейшем мы будем считать эти числа положительными.

56. Абсолютная погрешность при сложении. Абсолютная погрешность суммы нескольких округленных чисел равна алгебраической сумме погрешностей слагаемых.

Здесь мы ограничимся рассмотрением случаев, когда при округлении чисел отбрасываются дробные десятичные части, так как при сложении целые числа отбрасываются редко.

Если число слагаемых не превышает 20 и предельная абсолютная погрешность есть единичная десятичная дробь некоторого порядка, то число знаков после запятой, оставленное в слагаемых, должно быть на единицу больше порядка погрешности.

В самом деле, ответ будет правильным до одной сотой, если складывается не больше 20 чисел и количество знаков после запятой в каждом из слагаемых равно трем. Абсолютная погрешность в этом случае меньше 0,0005, а погрешность суммы двадцати слагаемых будет меньше $0{,}0005 \times 20$, т. е. меньше 0,01.

Если число слагаемых меньше 10, то максимальная погрешность суммы не может превзойти 0,005, так что при округлении ее не следует прибавлять единицы к последней верной цифре.

Если выбирать приближенные значения чисел таким образом, чтобы приблизительно уравновесить положительные и отрицательные погрешности, то абсолютная погрешность суммы может быть уменьшена.

Пример. Сложить 4,3416, 9,81643, 0,7295, 21,6844, 0,0037 и 762,123 так, чтобы сумма имела два верных знака после запятой.

$$\begin{array}{r} 4{,}342 \\ 9{,}816 \\ 0{,}730 \\ 21{,}684 \\ 0{,}004 \\ 762{,}123 \\ 1{,}284 \\ \hline 799{,}983 \end{array}$$

Если имеется более 20, но менее 200 слагаемых, необходимо удержать на два знака после запятой больше порядка предельной погрешности суммы.

57. Относительная погрешность суммы. Относительная погрешность суммы нескольких чисел равна абсолютной погрешности суммы, деленной на эту сумму, т. е.

$$\text{относительная погрешность суммы} = \frac{\text{абсол. погрешность суммы}}{\text{сумма}},$$

откуда

абсолютная погрешность суммы = относительной погрешности суммы $\times$ сумму.

Итак, *предельная абсолютная погрешность* каждого слагаемого не должна быть больше, чем

$$\frac{\textit{предельная абсолютная погрешность суммы}}{\textit{число слагаемых}}.$$

К сожалению, в начале сложения сумма еще неизвестна; однако путем грубого приближения можно найти приблизительное значение предельной абсолютной погрешности, которая не должна быть превзойдена в каждом из слагаемых.

Обычно, для получения приближенной величины суммы можно отбросить все цифры, кроме первых, причем при сложении больших и малых чисел последними можно пренебречь.

После небольшой практики получаются очень хорошие результаты.

Пример. Найти приближенное значение суммы данных ниже чисел с погрешностью, не превышающей 1% истинной величины этой суммы.

Можно с первого же взгляда сказать, что сумма близка к 7000.

Отсюда

$$\frac{7000}{5} = 1400.$$

$$\begin{array}{r} 2868{,}146 \\ 3380{,}433 \\ 845{,}314 \\ 27{,}841 \\ 343{,}50 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2870 \\ 3380 \\ 850 \\ 30 \\ 340 \\ \hline 7470 \end{array}$$

Умножение на 0,01 дает 14. Это и есть предельная абсолютная погрешность каждого слагаемого.

Если отбросить единицы, то сумма будет иметь погрешность меньше 1%, так как абсолютная ошибка каждого слагаемого меньше 14.

Выполнение действия показано слева, однако при вычислениях не нужно переписывать слагаемые. Лучше всего при сложении десятков производить округление в уме.

58. Абсолютная погрешность при умножении. При умножении точного числа на приближенное, если задана предельная абсолютная погрешность произведения, следует рассуждать следующим образом.

Пусть:

a — точный первый множитель,
b — приближенный второй множитель,
Δ — абсолютная погрешность второго множителя (положительная или отрицательная),
A — абсолютная погрешность произведения.

Тогда:

$b-\Delta$ — точное значение второго множителя,
ab — приближенное значение произведения,
$a(b-\Delta)$ — точное значение произведения.

Разность между приближенным и точным значениями произведения равна его абсолютной погрешности.

Таким образом

$$A = ab - a\,(b-\Delta) = ab - ab + a\Delta = a\Delta.$$

Если в произведении предельная абсолютная погрешность не должна превосходить 0,01, то величина Δa не должна быть больше 0,01 или абсолютная погрешность множителя b должна быть больше $\frac{0,01}{a}$.

Погрешность рассмотренного произведения будет положительной или отрицательной в зависимости от того, является ли погрешность Δ числом положительным или отрицательным. В первом случае приближенное значение произведения будет больше точного, а во втором — меньше.

Если в произведении можно допустить предельную погрешность 0,001, то предельная абсолютная погрешность приближенного или округленного числа должна быть не более $\frac{0,001}{a}$.

Пример. Точное число 391,8 нужно умножить на 3,1415926. Второй множитель следует округлить так, чтобы абсолютная погрешность произведения не превышала 0,01.

Если взять Δ меньшим чем $\frac{0{,}01}{391{,}8}$ или (перенося запятую) меньшим $\frac{0{,}00001}{0{,}3918}$, то, приняв за предельную погрешность множителя величину $\frac{0{,}00001}{1}$ или 0,00001, мы получим произведение, имеющее погрешность меньше заданной, т. е. (0,01).

Оставив пять десятичных знаков после запятой, получим число 3,14159, имеющее абсолютную погрешность 0,0000026, т. е. меньше 0,00001.

Правило. *В приближенном множителе следует сохранять столько десятичных знаков после запятой, сколько их имеется до запятой в другом множителе, плюс число десятичных знаков в предельной абсолютной погрешности произведения* [1]).

Так как

$$A = \Delta a \quad \text{или} \quad \Delta = \frac{A}{a},$$

то Δ будет иметь либо столько десятичных знаков, сколько указано правилом, либо на один знак меньше. Поэтому, если следовать этому правилу, то абсолютная погрешность произведения будет меньше предельной погрешности.

Число 391,8 имеет три десятичных знака до запятой, а 0,01 — два десятичных знака. Приближенный множитель должен иметь пять знаков после запятой. Таким образом будем иметь

$$391{,}8 \times 3{,}14159.$$

Если предельная погрешность произведения должна быть меньше 0,001, то в приближенном множителе следует оставить после запятой шесть десятичных знаков, т. е. он должен быть равен 3,141593.

---

[1]) Величина абсолютной погрешности, которая получится в произведении, если следовать указанному правилу, будет не только меньше заданной предельной погрешности, но будет меньше пяти единиц следующего десятичного порядка

59. Если оба множителя — приближенные и произведение должно иметь погрешность, меньшую некоторой абсолютной предельной погрешности, то рассуждаем так:

Пусть:

a — точное значение первого множителя,
c — точное значение второго множителя,
Δ_1 — абсолютная погрешность первого множителя (положительная или отрицательная),
Δ_2 — абсолютная погрешность второго множителя (положительная или отрицательная),
A — абсолютная погрешность произведения.

Тогда:

$a+\Delta_1$ — приближенное значение первого множителя,
$c+\Delta_2$ — приближенное значение второго множителя,
ac — точное значение произведения,
$(a+\Delta_1)(c+\Delta_2)=ac+c\Delta_1+a\Delta_2+\Delta_1\Delta_2$ — приближенное значение произведения.

Приближенное произведение меньше точного на абсолютную погрешность его, т. е.

$$A=ac+c\Delta_1+a\Delta_2+\Delta_1\Delta_2-ac=c\Delta_1+a\Delta_2+\Delta_1\Delta_2.$$

Так как Δ_1 и Δ_2 — величины малые, а произведение $\Delta_1\Delta_2$ по сравнению с $c\Delta_1+a\Delta_2$ — величина еще более малая, то ею можно пренебречь. Поэтому имеем (приближенно)

$$A=c\Delta_1+a\Delta_2,$$

откуда

$$|A|\leqq|c\Delta_1|+|a\Delta_2|.$$

Если каждый из множителей округлен так, как это было указано в правилах n⁰ 58, то абсолютная погрешность произведения будет меньше предельной.

В n⁰ 58 абсолютная погрешность произведения равнялась $a\Delta$, в данном же случае она будет состоять из двух частей: $c\Delta_1$ и $a\Delta_2$, каждая из которых меньше половины предельной погрешности.

Правило. *При умножении во множимом следует сохранить столько десятичных знаков после запятой, сколько их имеется до нее во множителе, плюс число десятичных знаков в предельной погрешности произведения.*

Во множителе необходимо взять столько знаков после запятой, сколько их имеется во множимом до нее, плюс число десятичных знаков в предельной погрешности.

Пример. Округлить числа 30,87541 и 6,21832 так, чтобы абсолютная погрешность произведения была меньше 0,01.

Согласно правилу, в первом множителе следует сохранить три знака после запятой, а во втором — четыре:

$$30{,}875 \times 6{,}2183 = 191{,}99.$$

Если итти дальше и округлять числа так, чтобы знаки погрешности были противоположны, то часто абсолютная погрешность окажется меньшей, чем если бы знаки были одинаковыми.

60. Относительная погрешность при умножении. Пусть требуется найти произведение точного числа на приближенное число таким образом, чтобы относительная погрешность его не превышала некоторой заданной величины или, иначе говоря, чтобы относительная погрешность произведения была меньше определенного числа процентов от него.

Пусть:

a — точный множитель,
c — точное значение второго множителя,
Δ — абсолютная погрешность второго множителя,
r — его относительная погрешность,
R — относительная погрешность произведения.

Тогда:

$c + \Delta$ — приближенное значение второго множителя,

$r = \frac{\Delta}{c}$ — его относительная погрешность,

ac — точное значение произведения,

$a(c + \Delta)$ — приближенное значение произведения,

$a(c + \Delta) - ac = a\Delta$ — абсолютная погрешность произведения,

$\frac{a\Delta}{ac} = \frac{\Delta}{c} = R = r$ — относительная погрешность произведения (положительная или отрицательная).

Относительная погрешность произведения в данном случае будет равна относительной погрешности приближенного множителя.

Если необходимо получить произведение с точностью до нескольких процентов его, то приближенный множитель можно округлить так, чтобы его относительная погрешность была меньше предельной для произведения.

Пример 1. Умножить точное число 527,8 на 3,1415926 так, чтобы погрешность произведения не превышала 1%.

В числе, погрешность которого не должна превышать 1%, т. е. 0,01, следует оставить три цифры (n⁰ 55). Поэтому умножаем

$$527{,}8 \times 3{,}14.$$

Если в приближенном числе взять положительную относительную погрешность, то погрешность полученного произведения будет также положительной, а само произведение будет больше своего точного значения.

Рассмотрение относительной погрешности множителя показывает, что и при небольшом числе верных цифр в нем произведение может быть достаточно точным (n⁰ 49). Таким образом, если в приведенном примере вместо 3,1415926 взять величину 3,1, то относительная погрешность равна приблизительно —0,013 (n⁰ 54), что не на много превышает 1%.

Во многих случаях, особенно когда пользуются счетной линейкой, данные числа приходится округлять, ибо точные их значения отсутствуют на шкалах линейки. Принимая во внимание относительную погрешность, можно получить результат, менее отличающийся от точного значения искомой величины.

Пример 2. Умножить точное число 3,55 на приближенное 21,245. В числе 21,245 следует сохранить три верных цифры, т. е. взять 21,2, и тогда сможем найти на счетной линейке соответствующее деление. Относительная погрешность равна, приблизительно, —0,002 (см. n⁰ 54).

Знак минус указывает на то, что приближенное произведение меньше точного и равняется, приблизительно, $\frac{998}{1000}$ от него. Добавочное действие, заключающееся в том, что найденное произведение делят на 0,988, позволяет получить результат, весьма близкий к точному значению данного выражения. Если при вычислении не пользуются счетной линейкой, то следует просто взять 0,002 от приближенного произведения, проделав это в уме.

61. Если оба множителя — числа приближенные *и их произведение должно быть вычислено с точностью до некоторого числа процентов, т. е. иметь определенную относительную погрешность*, то поступаем следующим образом:

Пусть:

a — точное значение первого множителя,

c — точное значение второго множителя,

Δ_1 — абсолютная погрешность первого множителя,

Δ_2 — абсолютная погрешность второго множителя,
r_1 — относительная погрешность первого множителя (положительная или отрицательная),
r_2 — относительная погрешность второго множителя (положительная или отрицательная),
R — относительная погрешность произведения.

Тогда:

$a+\Delta_1$ — приближенное значение первого множителя,
$c+\Delta_2$ — приближенное значение второго множителя,
$r_1=\frac{\Delta_1}{a}$ — относительная погрешность первого множителя,
$r_2=\frac{\Delta_2}{c}$ — относительная погрешность второго множителя,
ac — точное произведение,

$$(a+\Delta_1)(c+\Delta_2)=ac+c\Delta_1'+a\Delta_2+\Delta_1\Delta_2\approx ac+c\Delta_1+a\Delta_2$$

(где $\Delta_1\Delta_2$ - отброшено) (n^0 59) — приближенное значение произведения [1]).

$R=\frac{(ac+c\Delta_1+a\Delta_2)-ac}{ac}=$ относительной погрешности произведения $=\frac{c\Delta_1+a\Delta_2}{ac}=\frac{c\Delta_1}{ac}+\frac{a\Delta_2}{ac}=\frac{\Delta_1}{a}+\frac{\Delta_2}{c}=r_1+r_2$.

Таким образом

$$|R|=|r_1+r_2|\leqslant|r_1|+|r_2|.$$

Если r_1 и r_2 имеют разные знаки, то R — меньше, чем в том случае, когда они имеют одинаковые знаки.

Если в приближенном произведении допускается предельная погрешность в 1%, то в каждом множителе следует оставить три верные цифры. В этом случае погрешность произведения не превзойдет 0,01, даже если относительные погрешности сомножителей будут иметь одинаковые знаки.

Итак, ***в каждом множителе следует оставить на одну верную цифру больше, чем имеется знаков после запятой в предельной погрешности.***

---

[1] Знак $\approx$ есть знак приближенных равенств.
Пример. $3{,}7511\approx 3{,}75$. *Прим. ред.*

Пример 1. Найти произведение 314,15928 и 27,18281828 с точностью до 1%.

В каждом множителе следует оставить три верные цифры, поэтому имеем:

$$314 \times 27{,}2 = 8540{,}8.$$

Для сравнения приводим точное произведение:

$$8539{,}735.$$

Если предельная погрешность равна 0,001, т. е. 0,1 от 1%, то следует оставлять в каждом множителе четыре верные цифры (если до этого не вычислены в уме относительные погрешности множителей).

Если r_1 приблизительно равно r_2, но противоположно по знаку, то в каждом множителе можно оставить только по две значащие цифры, и все-таки погрешность произведения не будет превышать 1%.

Пример 2. Округлить числа 31 885 и 113,84 так, чтобы погрешность произведения не превышала 1%.

Если вместо 31 885 взять 32 000, то относительная погрешность равняется $\frac{115}{31885}$, т. е. 0,0036.

Если вместо 113,84 взять 110, то относительная погрешность равна $\frac{3{,}84}{113{,}84} = -0{,}0033.$

$$|R| = 0{,}0036 - 0{,}0033 = 0{,}0003.$$

62. Если перемножается несколько чисел, то относительная погрешность произведения приблизительно равна алгебраической сумме относительных погрешностей сомножителей.

Если оставить в каждом множителе на одну верную цифру (n^0 49) больше, чем число знаков после запятой в предельной погрешности (n^0 53), то алгебраическая сумма относительных погрешностей может оказаться большей, чем предельная погрешность. Во избежание этого, рекомендуется при округлении некоторых из сомножителей брать знаки погрешностей их противоположными знакам остальных.

В тех случаях, когда требуется выбрать множитель, резко влияющий на величину суммы относительных погрешностей, следует взять тот из них, у которого цифры, стоящие слева, невелики, например 112 875.

В самом деле, если округлить 112 875 до 112 000 и получить при этом отрицательную погрешность, или 111 125 округлить до 112 000, получив при этом положительную погрешность, то указанные погрешности будут больше, чем при округлении чисел 893 875 или 892 125 (у которых стоящие слева цифры велики) до 893 000.

Пример. Какова будет погрешность, если в каждом из множителей произведения

$$928{,}41 \times 27{,}621 \times 33{,}462 \times 813{,}16$$

оставить три верные цифры?

Напишем приблизительные значения относительной погрешности каждого множителя над ними:

$$\overset{-0{,}0005}{928} \times \overset{-0{,}0009}{27{,}6} \times \overset{+0{,}001}{33{,}5} \times \overset{-0{,}0002}{813} = 697\,577\,414{,}4.$$

Приблизительная величина относительной погрешности произведения будет

$$-0{,}0005 - 0{,}0009 + 0{,}001 - 0{,}0002 = -0{,}0006.$$

Третий множитель округлен так, чтобы получить положительную погрешность вместо отрицательной, что до некоторой степени уравновешивает погрешности.

Для уточнения действия, особенно при вычислении со счетной линейкой, можно разделить приближенное произведение на 0,9994 или умножить его на 0,006 и затем прибавить результат к вышеуказанному произведению.

Если бы мы оставили в каждом из множителей две верные цифры, то получили бы

$$\overset{+0{,}002}{930} \times \overset{-0{,}025}{27} \times \overset{+0{,}02}{34} \times \overset{-0{,}004}{810} = \overset{-0{,}007}{691\,529\,400}$$

Рекомендуется вычислять относительные погрешности в уме по мере хода вычислений. Если величины получающихся погрешностей чрезмерно велики, то следует вводить поправочный множитель.

63. Влияние отбрасывания цифр справа в множимом и множителе показано на следующем примере:

```
            2456786
            3134652
         ---------------
    (      4913 / 572     )
  A {     12283 / 930     |
    (    14740 / 716      |
         ---------------  |
          9827 / 144      }B
         7370 / 358       |
        2456 / 786        |
       7370 / 358         |
      ----------------
      7701 / 169148472
```

Если в множителе последовательно отбрасывать числа 2, 5 и 6, то соответственно исчезнут первый, второй и третий ряды, указанные буквой *A*.

Если же отбрасывать цифры 6, 8 и 7 в множимом, то исчезнут ряды, отмеченные буквой *B*. Совершенно очевидно, что числа на площадях *A* и *B*, полученные от перемножения цифр, отброшенных нами во множимом и множителе, изменят произведение. Если, например, оставить по четыре верных цифры, то мы можем ожидать в ответе не более четырех верных цифр.

64. Видоизменение последнего метода, позволяющее упростить умножение. После того, как определено число значащих цифр, следует приписать нуль к множимому, а затем умножить его на первую слева цифру множителя.

$$
\begin{array}{r}
27{,}170 \times 3{,}142 \\
\hline
8\ 510 \\
2717 \\
108547 \\
\hline
85365 \approx 85{,}37
\end{array}
$$

Отбросим последнюю цифру множимого и умножим его на вторую цифру множителя. Отбросим следующую цифру множимого, после чего умножим его на третью цифру множителя. Прибавляем однако произведение отброшенной цифры на соответствующую цифру множителя. Так, например, отбрасывая 7 и умножая на 4, мы говорим: $4 \times 7 = 28$, сносим 3, $4 \times 1 + 3 = 7$ и т. д.

При обычном способе, если мы умножаем $14{,}3256 \times 2{,}68446$ и хотим получить в ответе три верные цифры после запятой, то замечаем, что всего в ответе должно быть пять цифр. Поэтому (n^0 59): следует удержать четыре знака после запятой во множимом и пять во множителе, и таким образом

$$14{,}3256 \times 2{,}68446 = 38{,}456.$$

При сокращенном умножении следует прибавлять еще одну значащую цифру к множимому.

Если нужно перемножить два числа, например 14,32 и 2,68443, из которых первое получено путем измерения и соответственно округлено, то во втором множителе следует сохранить только четыре знака после запятой:

$$14{,}32 \times 2{,}6844.$$

65. Абсолютная погрешность при делении. Если делитель — число точное, а делимое — приближенное, то для нахождения частного с некоторой определенной абсолютной погрешностью поступаем следующим образом.

Пусть:

a — точное делимое,
c — точный делитель,
Δ — абсолютная погрешность делимого,
A — абсолютная погрешность частного.

Тогда:

$\frac{a}{c}$ — точное значение частного,

$\frac{a+\Delta}{c}$ — приближенное значение частного,

$A = \frac{a+\Delta}{c} - \frac{a}{c} = \frac{\Delta}{c}$ — абсолютная погрешность частного.

Поэтому

$$\Delta = Ac.$$

Абсолютная погрешность делимого не должна быть больше произведения делителя на предельную абсолютную погрешность частного.

Пример. Вычислить частное

$$216{,}58373 : 435,$$

если погрешность его не должна быть больше 0,001. Делитель — число точное.

Δ не должно быть больше чем $0{,}001 \times 435 = 0{,}435$. Поэтому берем число 217, имеющее погрешность 0,42, т. е. меньшую 0,435:

$$217 : 435 = 0{,}499.$$

Более точное частное есть 0,49879, так что абсолютная погрешность получилась равной 0,0011, т. е. немного больше предельной, вследствие того, что частное 0,4989 округлено до 0,499.

Если в делимом взята положительная погрешность, то в частном погрешность будет также положительной.

66. Относительная погрешность при делении. Рассмотрим случай, когда делитель есть число точное, а делимое — приближенное, причем требуется, чтобы относительная погрешность не превосходила некоторой заданной.

Пусть:

a — точное значение делимого,
c — точное значение делителя,
Δ — абсолютная погрешность делимого,
r — относительная погрешность делимого,
Q — относительная погрешность частного.

Тогда:

$a+\Delta$ — приближенное значение делимого,

$r=\frac{\Delta}{a}$ — относительная погрешность делимого,

$\frac{a+\Delta}{c}$ — приближенное значение частного,

$\frac{a+\Delta}{c}-\frac{a}{c}=\frac{\Delta}{c}$ — абсолютная погрешность частного,

$Q=\frac{\frac{\Delta}{c}}{\frac{a}{c}}=\frac{\Delta}{a}=r$ — относительная погрешность частного.

Относительная погрешность частного в том случае, когда делитель — число точное, а делимое — приближенное, равна относительной погрешности делимого.

Таким образом, если относительная погрешность делимого взята не больше, чем относительная предельная погрешность частного, то относительная погрешность последнего не превысит заданной. Если по условию частное должно иметь относительную погрешность не бо́льшую 1%, то в делимом следует оставить три значащих цифры. Если предельная относительная погрешность частного должна быть менее 0,001, то в делимом необходимо сохранить четыре значащих цифры (n^0 55).

Пример. Разделить 483,51 на точное число 84 так, чтобы погрешность частного не превышала 1% его.

Очевидно (n^0 55) в делимом следует оставить три цифры, т. е. взять его равным 484:

$$484:84=5{,}74.$$

67. Если делимое и делитель — числа приближенные, то, так как делимое равно произведению делителя на частное, *относительная погрешность частного приблизительно равна алгебраической разности* между относительной погрешностью делимого и делителя. Таким образом, если Q, r_1 и r_2 — соответственно относительные погрешности частного, делимого и делителя, то имеем, приближенно,

$$Q=r_1-r_2,$$

откуда

$$|Q|<|r_1|+|r_2|.$$

Относительные погрешности $| r_1 |$ и $| r_2 |$ делимого и делителя должны быть по возможности либо обе положительными, либо обе отрицательными, ибо при этом относительная погрешность Q частного (равная алгебраической разности погрешностей делимого и делителя) уменьшается. Относительная погрешность частного будет иметь при этом тот же знак, что и погрешность делимого[1]). Если возможно, округление делимого и делителя следует производить так, чтобы они оба увеличивались или оба уменьшались.

Если относительные погрешности делимого и делителя имеют одинаковые знаки, то погрешность частного не будет превосходить каждую из них.

Итак, *если относительные погрешности делимого и делителя имеют одинаковые знаки и не превосходят предельной, то относительная погрешность частного будет меньше, чем предельная.*

Если r_1 и r_2 будут иметь противоположные знаки, то относительная погрешность частного делается по абсолютной величине равной сумме относительных погрешностей делимого и делителя.

Для того, чтобы определить, какой знак погрешностей дает *численно меньшую разность* их значений, следует в уме исследовать делимое и делитель, а затем соответственно их округлить.

Один пробный подсчет разности относительных погрешностей достаточен для определения, сколько верных цифр следует сохранить в делимом и делителе.

Пример. Разделить 214,68 на 32,477 с погрешностью меньшей 0,1%.

Для пробы сохраним в обоих числах по три верных цифры, округлив их так, чтобы погрешности были положительными. Погрешность частного равна $(0{,}0015) - (+0{,}0007) \approx 0{,}0008$, т. е. менее предельной, равной 0,001.

68. Сокращенное деление. Рассмотрим следующий пример (см. рис. на стр. 50).

Если отбросить в делителе несколько цифр справа, а именно 786 (n⁰ 47), то цифры, заключенные в параллелограмме $ABDC$, исчезнут.

Если отбросить в делимом несколько цифр справа, например 148472, цифры в треугольнике BED изменятся.

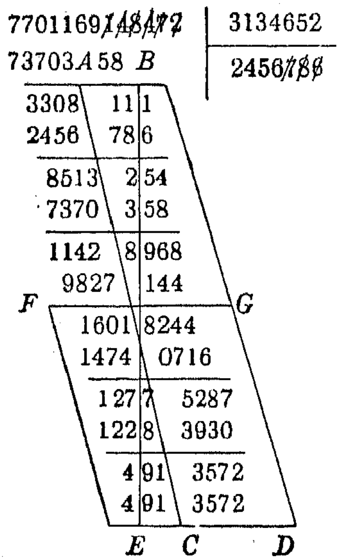
Если некоторые из стоящих справа членов частного не вычислены, то числа, заключенные в параллелограмме $FGDE$, исчезнут.

---

1) Это справедливо лишь при условии

$$|r_1| > |r_2|$$

Если при каждом последовательном действии отбрасывать в делителе цифры справа, то ни одно из чисел справа от вертикальной линии BE не получится, и эта замена меньше всего влияет на частное.



Точность частного зависит от числа, цифр, сохраненных в делителе и делимом.

Сперва нужно определить наглаз целую часть частного (n^0 30), а затем решить, сколько знаков после запятой следует сохранить, иначе говоря—определить абсолютную погрешность. Тогда мы получаем число значащих цифр в частном.

Из n^0 33 мы узнали, что для определения верной цифры частного надо воспользоваться, по крайней мере, двумя цифрами делителя, стоящими слева. Таким образом, чтобы получить верную последнюю цифру в частном, мы должны иметь две цифры в остатке для последнего действия после отбрасывания в каждом из предыдущих действий по одной цифре. Таким образом в делителе должно быть сохранено на одну цифру больше, чем в частном.

69. Сокращенное деление производится как и обыкновенное, но при каждом последовательном умножении в делителе отбрасывается справа по одной цифре. Здесь необходимо сохранить на одну значащую цифру больше, чем при обычном способе деления.

Пример. Разделить 77,01169148472 на 24,56786 так, чтобы иметь в ответе три верных цифры.

Исследуя делимое и делитель (n^0 67), как и в случае обыкновенного деления, видим, что они должны иметь две верных цифры после запятой, т. е. всего 4 значащих цифры. При данном же методе необходимо сохранить по пяти значащих цифр. Если первая значащая цифра делается больше первой значащей цифры делимого, то в делимом следует оставить еще одну цифру сверх указанных выше.

Перед тем как отбрасывать цифры в делителе, необходимо выяснить, сколько следует снести и прибавить к произведению сокращенного делителя на отдельные цифры частного.

Итак, делимое будет 77,012, а делитель — 24,567.

	77012	24567 / 3134	
	73703		$3\times8=24$ сносим 2; $3\times7+2=23$
Отбрасываем	3309		
в делителе 7	2457		$1\times7=7$ сносим 1; $1\times6+1=7$
Отбрасываем	852		
в делителе 6	737		$3\times6=18$ сносим 2; $3\times5+2=17$
Отбрасываем	115		
в делителе 5	98		$4\times5=20$ сносим 2; $4\times4+2=18$
24 остается в делителе	17		

Другой способ заключается в том, чтобы сохранить в делителе и делимом одну лишнюю цифру, пренебрегая сноской от отброшенных цифр.

70. Относительная погрешность при совместном умножении и делении. Относительная погрешность выражений

$$\frac{a\times b\times c}{d\times e\times f};\quad \frac{a\times b\times c}{d\times e}\quad \text{или}\quad \frac{a\times b}{d\times e\times f}$$

приблизительно равна разности алгебраической суммы относительных погрешностей множителей числителя и алгебраической суммы множителей знаменателя.

Указанные множители можно округлить так, что погрешность результата будет очень невелика.

Пример. Вычислить

$$\frac{24{,}44\times3{,}1416\times8}{54{,}682\times10{,}94\times5{,}22}.$$

Для решения следует либо подобрать погрешности числителя и знаменателя так, чтобы свести алгебраическую сумму их к минимуму, или сравнить погрешности множителей в числителе и знаменателе, имеющие одинаковые знаки. Последний метод позволяет сокращать погрешности.

$$\frac{\overset{-0{,}02}{24}\times\overset{+0{,}02}{3{,}2}\times8}{\underset{+0{,}006}{55}\times\underset{-0{,}004}{10{,}9}\times\underset{-0{,}004}{5{,}2}}$$

Разность алгебраических сумм равна

$$(-0{,}02+0{,}02)-(+0{,}006-0{,}004-0{,}004)=0{,}002 \text{ (приблизительно).}$$

Окончательная относительная погрешность должна показать, достаточное ли число цифр сохранено, нужно ли вводить поправочный множитель и нужно ли увеличить число верных цифр. Этот вопрос следует решить до выполнения вычислений.

71. Относительная погрешность при возвышении в степень или извлечении корня. Относительная погрешность степени равна относительной погрешности основания, умноженной на показатель степени. Справедливость сказанного очевидна, так как в n^0 61 было доказано, что относительная погрешность произведения приблизительно равна алгебраической сумме погрешностей множителей. Если имеется n одинаковых множителей, то произведение их будет иметь относительную погрешность в n раз бо́льшую, чем погрешность множителя.

Точно так же относительная погрешность корня приблизительно равна относительной погрешности подкоренного количества, деленной на показатель корня.

Дробные степени также имеют относительные погрешности, равные погрешностям оснований, умноженных на дробные показатели.

72. Новый метод умножения. Автор предлагает следующий способ умножения. Преимущество заключается в том, что числа высшего порядка (т. е. стоящие слева) получаются в самом начале действия. После них следуют числа всё меньшего и меньшего порядка. Таким образом последние могут быть в случае надобности отброшены.

Пусть, например, требуется умножить 345 на 234. Напишем цифры одну под другой, как и при обычном методе умножения. Затем представим себе прямую линию, вращающуюся вокруг центра, помещенного посредине между двумя первыми цифрами, расположенными на одной вертикали. При каждом последующем действии центр вращения переносится вправо на половину расстояния между цифрами, и берутся произведения тех чисел, которые пересекаются прямой во время полного ее оборота.

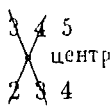
Поместим сперва центр посредине между 2 и 3 и проведем вертикаль. Первое произведение равняется 6.

345
| центр
234

При дальнейшем вращении линия не пересечет других двух чисел, кроме указанных 3 и 2, поэтому указанное число 6 является окончательным произведением для данного положения центра. Теперь передвинем центр направо в середину между первым столбцом (где стоят сотни) и вторым (где стоят десятки).

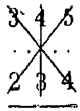
При каждом передвижении центра следует передвигать произведение вправо на один знак.

Для второго положения центра при вращении прямой получим два произведения, а именно:



$$2 \times 4 \text{ и } 3 \times 3.$$

Передвинем центр в следующее положение; тогда он расположится под цифрой 4 верхней строки, т. е. между 4 и 3. При вращении прямой будем иметь три произведения:



$$4 \times 3,\ 5 \times 2 \text{ и } 4 \times 3.$$

Нет необходимости чертить самую прямую. Достаточно просто ставить точку, соответствующую центру, имея при этом в виду, что линия, отделяющая в множимом две цифры слева, отделит в множителе две единицы справа.

Теперь начнем действие сначала и продолжим его до конца. Способ умножения показан справа [1].

8	сложим
9	в уме
12	
10	сложим в уме
12	
16	сложим
15	в уме
20	
80730	

---

[1] Предлагаемый автором метод есть не что иное как приложение к умножению чисел известного правила составления коэффициентов произведения многочленов, расположенных по степеням x:

$$(a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n)(b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m) =$$
$$= a_0b_0x^{n+m} + (a_0b_1 + a_1b_0)x^{m+n-1} + (a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2)x^{m+n-2} + \ldots + a_nb_m.$$

Если расположить коэффициенты многочленов в виде двух строк:

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$$

$$b_0, b_1, b_2, \ldots, b_m$$

и составлять отдельные суммы, перемножая коэффициенты, стоящие в верхней стороне, на коэффициенты, стоящие в нижней, тем способом, как это указано в тексте, то получаются коэффициенты произведения.

Полагая $x = 10$, приходим к правилу, высказываемому автором.

Пример.

$$345 \times 234 = (3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5)(2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 4) = 3 \cdot 2 \cdot 10^4 + (3 \cdot 3 + $$
$$+ 4 \cdot 2) \cdot 10^3 + (3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2) \cdot 10^2 + (4 \cdot 4 + 5 \cdot 3) \cdot 10 + 5 \cdot 4.$$

Прим. ред.

В нижеследующем примере следует обратить внимание на то, что во втором положении центра прямая пересечет не только 3 и 7, но также 3 и 4.

Точки помогают выполнению действия.

Как было указано ранее, при описанном методе мы получаем сперва самые важные части произведения. Дальнейшее продолжение действия позволяет внести поправку в результат и получить его с желательной степенью точности. Этот метод может быть с успехом применен также и при умножении с помощью счетов или обычной счетной машины. При этом следует сдвигать на один знак вправо каждый раз, когда центр переносится в новое положение, причем машина дает окончательный результат без добавочного сложения.

```
  4 3 2 1
  . . . . .
       73
 --------
  28
   33
    23
     13
        3
 --------
  315433
```

Пример. Перемножить

$$246{,}4182 \text{ и } 211{,}7432$$

так, чтобы погрешность произведения не превышала $0{,}1\%$.

Каждое число должно иметь четыре верных цифры. Одно из чисел должно быть округлено так, чтобы погрешность была положительной.

```
 2 464 182
 2 117 432
 ---------
 4
 10
   18
    32
     38
      46
       28
 ---------
 5 216 288
```

Формулы для приближенных вычислений.

73. Формулы

$$(1+x)\,(1+y)=1+x+y+xy$$

$$(1+x)\,(1-y)=1+x-y-xy.$$

Если x и y суть малые дроби, то их произведением xy можно пренебречь. В таком случае произведение можно считать равным

$$1+x\pm y\,.$$

Пример 1.

$$1{,}0015\times 1{,}0024$$

$$(1+0{,}0015)\,(1+0{,}0024)=1+0{,}0015+0{,}0024=1{,}0039 \text{ (приблизительно)}.$$

Пример 2.

$$1{,}032 \times 0{,}996$$

$(1+0{,}032)\ (1-0{,}004) = 1+0{,}032-0{,}004 = 1{,}028$ (приблизительно).

74. Формула

$$(1+x)(1+y)(1+z) = 1+x+y+z+xy+yz+xz+xyz.$$

Если x, y и z достаточно малы, то последние четыре члена могут быть отброшены, и произведение можно считать приблизительно равным

$$1+x+y+z.$$

Пример.

$$1{,}011 \times 1{,}008 \times 0{,}998 = (1+0{,}011)\ (1+0{,}008)\ (1-0{,}002) = 1+0{,}011+ \\ +0{,}008-0{,}002 = 1{,}017.$$

75. Формулы

$$\frac{1}{1-x} = 1+x \text{ (прибл.) } ^{1)}$$

$$\frac{1+x}{1+y} = 1+x-y \text{ (прибл.) } ^{2)}$$

---

[1]) В справедливости равенства

$$\frac{1}{1-x} \approx 1+x$$

можно убедиться следующим простым рассуждением:

$$(1-x)\ (1+x) = 1+x^2,$$

откуда следует, что

$$1+x = \frac{1}{1-x} - \frac{x^2}{1-x} \approx \frac{1}{1-x}$$

с точностью до малых величин высшего порядка.

Таким же образом можно установить приближенное равенство:

$$\frac{1}{1+x} \approx 1-x.$$

Прим. ред.

[2]) Справедливость равенства

$$\frac{1+x}{1+y} \approx 1+x-y$$

устанавливается так.

Согласно предыдущей формуле имеем

$$\frac{1+x}{1+y} = (1+x)\cdot\frac{1}{1+y} \approx (1+x)\ (1-y)$$

и далее:

$$(1+x)\ (1-y) \approx 1+x-y.$$

Отсюда вытекает, что

$$\frac{1+x}{1+y} \approx 1+x-y.$$

Прим. ред.

76. Формула

$$(1 \pm x)^n = (1 \pm x)\ (1 \pm x)\ldots(n \text{ раз}) = \\ = 1 \pm x \pm x \pm \ldots = 1 \pm nx.$$

Величина n может быть положительной, отрицательной, дробной, целой или иррациональной. В этом случае

$$(1+x)^2 = 1 + 2x \ \text{(прибл.)};\ \sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x \ \text{(прибл.)}\ ^{1)};$$

---

1) Если две величины a и b разнятся друг от друга на малую величину Δ так, что в равенстве

$$a = b + \Delta$$

этой величиной можно пренебречь, заменив его приближенным

$$a \approx b, \qquad (*)$$

то и в равенстве

$$a^k = b^k + \Delta'$$

величиной Δ' можно пренебречь, заменив это равенство приближенным

$$a^k \approx b^k. \qquad (**)$$

Это можно сделать в силу того, что величины Δ и Δ' одинакового порядка малости.

Действительно, заметив, что

$$\Delta' = a^k - b^k = (b + \Delta)^k - b^k,$$

находим, что

$$\Delta' \approx kb^{k-1}\Delta,$$

т. е. что величины Δ' и Δ — малые одного порядка. Если пренебрегаем одной, то следует опускать и другую. Таким образом из приближенного равенства (**) следует, наоборот, приближенное равенство (*) с точностью до малых величин того же порядка

Положив

$$a = \sqrt[k]{A},\ b = \sqrt[k]{B},$$

можем утверждать, что из равенства

$$A \approx B \qquad (***)$$

следует, что

$$\sqrt[k]{A} \approx \sqrt[k]{B} \qquad (****)$$

с точностью до величин того же порядка.

Положим в равенстве (***)

$$A = \left(1 \pm \frac{1}{2}x\right)^2,\ B = 1 \pm x.$$

Имеем с точностью до величин второго порядка малости при малом x равенство

$$\left(1 + \frac{1}{2}x\right)^2 \approx 1 \pm 2\cdot\frac{1}{2}x = 1 \pm x.$$

$$(1-x)^2 = 1-2x \text{ (прибл.)}; \quad \sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x \text{ (прибл.)};$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1-\frac{1}{2}x \text{ (прибл.)}; \quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1+\frac{1}{2}x \text{ (прибл.)}.$$

Пример 1.

$$(1{,}093)^4 = (1+0{,}093)^4 = 1+(0{,}093\times 4) = 1{,}373 \text{ (прибл.)}.$$

Пример 2. Найти корень квадратный из 145.

$$\sqrt{145} = \left[144\left(1+\frac{1}{144}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = 12\left(1+\frac{1}{144}\right)^{\frac{1}{2}} = 12\left(1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{144}\right) =$$
$$= 12\left(1+\frac{1}{288}\right) = 12+\frac{1}{24} = 12{,}0416.$$

77. Формула

$$(a\pm b)^n = a^n \pm na^{n-1}b \text{ (прибл.)},$$

если b — малая величина.

Равенство (****) показывает, что

$$\sqrt{1\pm x} \approx 1\pm\frac{1}{2}x$$

с точностью до малых величин 2-го порядка.

Если положить

$$A = \frac{1}{1\pm x}, \; B = \left(1\mp\frac{1}{2}x\right)^2,$$

то в силу указанных приближенных равенств следует, что

$$A = \frac{1}{1\pm x} \approx 1\mp x$$

$$B = \left(1\mp\frac{1}{2}x\right)^2 \approx 1\mp x,$$

т. е. с точностью до малых величин высшего порядка имеет место равенство

$$A\approx B.$$

Отсюда следует, что с точностью до малых величин того же порядка справедливо равенство

$$\sqrt{A}\approx\sqrt{B}$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{1\pm x}} \approx 1\mp\frac{1}{2}x.$$

Прим. ред.

Пример 1. Найти корень квадратный из 105.

$$\sqrt{105} = \sqrt{100+5} = (100+5)^{\frac{1}{2}} = 100^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}100^{-\frac{1}{2}} \times 5 =$$
$$= 10 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} \times \frac{5}{1} = 10 + \frac{1}{4} = 10{,}25 \text{ (прибл.)}.$$

Пример 2. Найти корень квадратный из 620.

Имеем:

$$\sqrt{620} = (625-5)^{\frac{1}{2}} = 625^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \times 625^{-\frac{1}{2}} \times 5 = 25 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{25} \times 5 = 24{,}99$$
(прибл.)

Пример 3. Найти корень кубичный из 7,85.

$$\sqrt[3]{7{,}85} = (8-0{,}15)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times 0{,}15 = 2 - 0{,}0125 = 1{,}985 \text{ (прибл.)}.$$

78. Формула

$$\frac{a}{1 \pm x} = a \mp ax,$$

если x мало.

Пример.

$$\frac{8}{0{,}9996} = 8 + 8(0{,}0004) = 8{,}0032.$$

79. Приближенные значения обратных величин. Величины, обратные $1 \pm x$, при x достаточно малом приближенно равны:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + (\text{погрешность} < x^2, \text{ если } 0 < x < 1);$$
$$= 1 - x + x^2 - (\text{погрешность} < x^3, \text{ если } 0 < x < 1).$$
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \left(\text{погрешность} < x^2 + 2x^3, \text{ если } \frac{1}{2} > x > 0\right);$$
$$= 1 + x + x^2\left(\text{погрешность} < x^3 + 2x^4, \text{если } \frac{1}{2} > x > 0\right).$$

$$\frac{1}{a \pm b} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 \pm x}, \text{ где } x = \frac{b}{a}.$$

Глава III.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ. ОТНОШЕНИЕ И ПРОПОРЦИЯ. ДВУЧЛЕНЫ, ТРЕХЧЛЕНЫ, МНОГОЧЛЕНЫ [1]). РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ. РАДИКАЛЫ.

Алгебраические обозначения.

80. Алгебраические знаки. Если в каком-либо выражении последовательно стоят только знаки $+$ и $-$ или только знаки $\times$ и $:$, то действия производятся в порядке слева направо.

Если в выражении имеются знаки $\times$ и $:$, а также $+$ и $-$, то в том случае, когда не указан другой порядок действий, сперва производятся умножение и деление.

При раскрывании скобок, перед которыми стоит минус, знак каждого члена, стоящего внутри них, следует переменить на обратный.

Отношение и пропорция.

81. Частное, полученное при делении одного числа на другое, называется *отношением*.

Отношение a к b есть $\frac{a}{b}$ или $a:b$.

Так как отношение имеет вид дроби, то все правила, касающиеся дробей, могут быть применены и к отношениям.

Равенство двух отношений называется *пропорцией*; например

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{6} \text{ или } a:b=c:d$$

суть пропорции.

Первый и четвертый члены ее называются *крайними*, а второй и третий — *средними* членами.

Если второй и третий члены равны, то каждый из них является *средним пропорциональным* между первым и четвертым членами:

$$a:b=b:c,$$

откуда

$$b=\sqrt{ac}.$$

Если

$$ad=bc,$$

---

[1]) Часто вместо выражений „двучлен“, „трехчлен“, „многочлен“ употребляют греческие названия их: „бином“, „трином“, „полином“.

то:

$$a:b=c:d$$
$$b:a=d:c$$
$$a:c=b:d$$
$$c:a=d:b.$$

Так как в каждом из этих случаев произведение крайних равно произведению средних или $ad=bc$, то любая пара членов может служить крайними, а другая пара — средними членами пропорции.

82. Докажем, что $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$, если $\frac{a}{b}=\frac{d}{c}$.

Так как $ad=bc$ или $bc=ad$, то, умножая на 2, получим:

$$2bc=2ad.$$

Последнее равенство можно переписать так:

$$bc+bc=ad+ad.$$

Перенося члены, имеем:

$$bc-ad=ad-bc.$$

Прибавляя к обеим частям равенства $ac-bd$, получим:

$$ac+bc-ad-bd=ac-bc+ad-bd,$$

откуда

$$c(a+b)-d(a+b)=c(a-b)+d(a-b),$$

или, вынося за скобки общие множители,

$$(a+b)(c-d)=(a-b)(c+d).$$

Делим обе части на $(a-b)(c-d)$:

$$\frac{(a+b)(c-d)}{(a-b)(c-d)}=\frac{(a-b)(c+d)}{(a-b)(c-d)}$$

или

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

Если $ad=bc$, то подобным же образом можно доказать справедливость следующих пропорций:

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}; \qquad \frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c};$$

$$\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}; \qquad \frac{a+c}{a-c}=\frac{b+d}{b-d};$$

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}; \qquad \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

Произведения соответствующих членов двух или более пропорций также составляют пропорцию.

Если

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \text{и} \quad \frac{m}{n}=\frac{p}{q},$$

то

$$\frac{am}{bn}=\frac{cp}{dq}.$$

Умножение или деление обоих членов отношения на одно и то же число не изменяет величину отношения:

$$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}.$$

Если

$$a:b=c:d,$$

то

$$ma:mb=nc:nd$$

или

$$\frac{a}{m}:\frac{b}{m}=\frac{c}{n}:\frac{d}{n}.$$

Если четыре числа составляют пропорцию, то их одинаковые степени, а также корни одной и той же степени из них составляют пропорцию.

При $a:b=c:d$, справедливы пропорции:

$$a^n:b^n=c^n:d^n \quad \text{и} \quad a^{\frac{1}{n}}:b^{\frac{1}{n}}=c^{\frac{1}{n}}:d^{\frac{1}{n}}.$$

В случае ряда пропорций: $a:b=c:d=e:f=g:h$ сумма первых (предыдущих) членов относится к сумме вторых (последующих) так же, как каждый из предыдущих относится к своему последующему:

$$\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}= \text{и т. д.},$$

или, если

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=r \text{ (постоянное отношение)},$$

то

$$\left(\frac{a+b+c+\ldots}{x+y+z+\ldots}\right)=r.$$

Если задача требует нахождения двух чисел, которые относятся друг к другу как $m:n$, то рекомендуется представлять эти неизвестные в виде mx и nx.

Если $a:b=b:c=c:d$, то $b=\sqrt[3]{a^2d}$ и $c=\sqrt[3]{ad^2}$.

Обе эти величины являются средними геометрическими между a и d.

83. Циркуль для пропорционального деления представляет собою инструмент, применяемый главным образом для перенесения размеров с данной фигуры, с целью получения подобной ей в увеличенном или уменьшенном виде. Кроме того, он весьма удобен для графического решения задач (см. nn^0 200, 202, 203, 208).

Зажимной штифт циркуля может перемещаться в прорезах инструмента, что дает возможность получить различные отношения расстояний между остриями ножек на обоих концах.

Для каждого определенного положения штифта это отношение остается постоянным.

Величины отношений между линейными размерами указаны на одной из наружных сторон инструмента. Если штифт подведен к делению шкалы, обозначенному цифрой 2, то расстояние между остриями на одном конце вдвое больше расстояния между остриями на другом.

Длина образцового циркуля, служащего эталоном для изготовления инструментов, выпускаемых в продажу [1]), разделена на 2000 равных частей. На обычных же циркулях имеется только около 1000 делений.

Таким образом, на образцовом циркуле длиной в 10 дюймов на каждый дюйм приходится по 200 делений, которые можно отсчитывать при помощи верньера. К сожалению, как было указано выше, на обычных инструментах число имеющихся делений значительно меньше.

Установка образцового циркуля (с 2000 делений) производится, как показано на рис. 1:

---

[1]) Речь идет об изготовлении и применении циркуля в САСШ.

Пусть:

y — меньший член отношения,

x — больший член отношения,

S — деление, приходящееся против штифта на шкале, разделенной на 2000 частей.

Тогда

$$\frac{y}{x}=\frac{S}{2000-S}$$

или

$$2000\,y-yS=xS$$

$$2000\,y=xS+yS=(x+y)\,S$$

$$S=\frac{2000\,y}{x+y}.$$

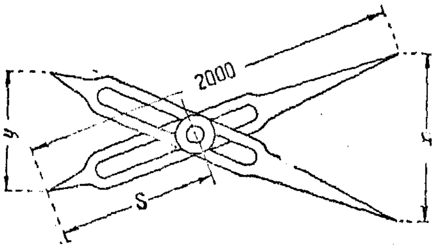


Рис. 1.

Пример.

Для отношения $1:2$, $y=1$ $x=2$ и $S=\frac{2000\cdot 1}{2+1}=667$ единиц.

Удобный способ установки циркуля в случае, если на нем не имеется деления, соответствующего нужному отношению, заключается в следующем:

Выбирают масштаб, имеющийся на обыкновенной трехгранной чертежной линейке, и берут на нем отрезки, находящиеся в данном отношении.

На указанной линейке (рис. 2) нанесены шкалы с 10, 20, 30, 40, 50 и 60 делениями на одном дюйме; поэтому какой-

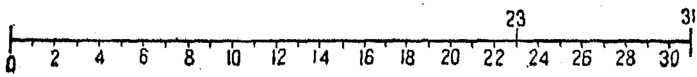


Рис. 2.

нибудь из них окажется пригодным для этой цели. Так, например, чтобы получить отношение 23 к 31, применяют шкалу с шестьюдесятью делениями и отмечают на ней двадцать третье и тридцать первое. Передвигая штифт, добиваются того, чтобы между остриями на короткой части циркуля помещалось 23 деления, а на длинной части — 31 деление.

Для получения нужного результата бывает достаточно двух-трех попыток.

Если требуется установить циркуль для отношения 8 к 15, применяют масштаб с 30 делениями на дюйм. Если же требуется иметь отношение 0,72 к 1, то берут масштаб с 20 делениями и ищут на нем числа 2, 7 и 10, соответствующие данным, увеличенным в 10 раз.

84. Формула бинома Ньютона для целого положительного показателя. Эта формула служит для разложения $(a+b)^n$. Простым перемножением можно, например, найти:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$
$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.$$

Если через n обозначить показатель степени, в которую возвышается бином в приведенных выше случаях, то результат можно представить в общем виде таким образом:

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3+\ldots$$
$$\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(r-1)}a^{n-r+1}b^{r-1}+\ldots+b^n \quad [1].$$

Члены этого выражения изменяются по определенному закону, а именно:

1) Показатель буквы a в первом члене разложения равен показателю степени бинома (в левой части равенства) и уменьшается на единицу в каждом последующем члене. В последнем члене он равен нулю.

2) Показатель буквы b увеличивается на единицу в каждом последующем члене. Будучи нулем в первом члене, он достигает в последнем той же величины, что и показатель степени бинома.

3) Для нахождения коэффициента любого члена, следует умножить коэффициент предыдущего на показатель в нем буквы a и разделить произведение на число предшествующих членов.

4) Если a и b положительны, то перед каждым членом разложения стоит знак плюс, если же b отрицательно, то четные члены (т. е. второй, четвертый и т. д.) будут иметь знак минус.

Справедливость такого разложения для целых положительных показателей может быть легко доказана и в общем виде.

Формула бинома для n дробного и отрицательного дана в n⁰ 458.

85. Удобный способ разложения по формуле бинома заключается в следующем:

Сперва пишут буквы с соответствующими показателями. Под ними помещают коэффициенты каждого члена, а затем их знаки. Наконец полученные члены соединяют вместе.

Пример. Найти, посредством формулы бинома, пятую степень выражения $(b-y)$.

Имеем:

$$(b-y)^5 =$$

Буквы с показателями	b^5	b^4y	b^3y^2	b^2y^3	by^4	y^5
Коэффициенты	1	5	10	10	5	1
Знаки	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$

$$b^5 - 5b^4y + 10b^3y^2 - 10b^2y^3 + 5by^4 - y^5$$

Примечание. Коэффициент четвертого члена получается умножением коэффициента третьего члена на показатель буквы b, т. е. $10 \cdot 3 = 30$, и делением на 3 — порядковый номер этого члена (или число членов, предшествовавших четвертому).

86. Для нахождения r-того члена разложения $(a+x)^n$ подставляем значения n и r в выражение

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ .\ .\ .(n-r+2)}{1\cdot 2\cdot 3\ .\ .\ .(r-1)}a^{n-r+1}\,x^{r-1}.$$

Пример. Найти шестнадцатый член разложения бинома $(a+x)^{20}$.

Здесь $r=16$, $n=20$, поэтому имеем:

$$(n-r+2) = (20-16+2) = 6$$

$$\frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}\,a^5\,x^{15}.$$

Сокращая одинаковые множители в числителе и знаменателе, получим окончательно:

$$\frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\,a^5\,x^{15} = 15\,504\,a^5\,x^{15}.$$

87. Если мы обозначим коэффициенты членов разложения буквой c (с соответветствующим порядковым значком), то получим:

$$(a+b)^n = a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n = a^n + c_1a^{n-1}\,b + c_2a^{n-2}b^2 + \\ + c_3a^{n-3}b^3 + \ .\ .\ .,$$

где

$$c_1 = n$$

$$c_2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$$

$$c_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$c_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

88. Представляя коэффициенты указанным образом, можно установить связь между знаком при c и величиной коэффициента.

Взяв например c_3, заметим, что числитель в выражении для него состоит из трех множителей. Знаменатель есть 3 факториал [1]).

Отметим, кроме того, что

$$c_1 = n$$

$$c_2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} = c_1 \frac{n-1}{2}$$

$$c_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = c_2 \frac{n-2}{3}$$

$$c_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = c_3 \frac{n-3}{4}.$$

Каждый коэффициент равен предыдущему, умноженному на дробь, числитель которой на единицу меньше, а знаменатель на единицу больше, чем у дроби, соответствующей предыдущему коэффициенту.

---

[1]) Факториалом k называется произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots k$. Это произведение обозначается знаком !

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k = k!$$

В английской и американской литературе можно встретить обозначение:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k = \underline{|k}.$$

Прим. ред.

Пример. Разложить $\left(2y-\frac{1}{2x}\right)^7$.

$$c_1=\frac{7}{1}$$

$$c_2=c_1\frac{6}{2}=7\cdot 3=21 \quad \text{или } \frac{7}{1}\cdot\frac{7-1}{1+1}$$

$$c_3=c_2\frac{5}{3}=21\cdot\frac{5}{3}=35$$

$$c_4=c_3\frac{4}{4}=35\cdot 1=35$$

$$c_5=c_4\frac{3}{5}=35\cdot\frac{3}{5}=21$$

$$c_6=c_5\frac{2}{6}=21\cdot\frac{1}{3}=7$$

$$c_7=c_6\frac{1}{7}=7\cdot\frac{1}{7}=1$$

$$\left(2y-\frac{1}{2x}\right)^7=(2y)^7+7(2y)^6\left(-\frac{1}{2x}\right)+21(2y)^5\left(-\frac{1}{2x}\right)^2+$$
$$+35(2y)^4\left(-\frac{1}{2x}\right)^3+35(2y)^3\left(-\frac{1}{2x}\right)^4+21(2y)^2\left(-\frac{1}{2x}\right)^5+$$
$$+7(2y)\left(-\frac{1}{2x}\right)^6+\left(-\frac{1}{2x}\right)^7=128y^7-224y^6\frac{1}{x}+$$
$$+168y^5\frac{1}{x^2}-70y^4\frac{1}{x^3}+35y^3\frac{1}{2x^4}-21y^2\frac{1}{8x^5}+7y\frac{1}{32x^6}-\frac{1}{128x^7}.$$

89. Треугольник Паскаля. Если расположить коэффициенты разложения биномов $(a+b)^0$, $(a+b)^1$, $(a+b)^2$ и т. д. в том порядке, который указан ниже, то каждый из этих коэффициентов равен сумме двух других, ближайших к нему и расположенных справа и слева на предыдущей сверху строке.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1

Вторые цифры в каждой строке показывают значения n для каждого случая.

Треугольником Паскаля можно пользоваться для определения коэффициентов членов разложения, не прибегая к вычислениям.

90. Выражения вида $(a-b-c)^3$ могут быть разложены посредством формулы бинома:

$$(a-b-c)^3=[(a-b)-c]^3=(a-b)^3-3(a-b)^2c+$$
$$+3(a-b)c^2-c^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3-$$
$$-3c(a^2-2ab+b^2)+3ac^2-3bc^2-c^3=a^3-3a^2b+3ab^2-$$
$$-b^3-3a^2c+6abc-3b^2c+3ac^2-3bc^2-c^3.$$

Пример. Разложить $(a+b+c)^3$.

$$(a+b+c)^3=[(a+b)+c]^3=(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3=$$
$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3ac^2+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2+c^3.$$

Аналогичным способом выражение $(a+b-c-d)^3$ может быть представлено в виде $[(a+b)-(c+d)]^3$ и разложено. Описанный способ весьма упрощает вычисления.

91. Умножение при помощи отделения коэффициентов. Пользуясь обычным способом умножения, имеем:

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & 4x^2+ & 6x & +2 \\
 & & 2x^2- & 5x & -1 \\
\hline
8x^4+ & 12x^3+ & 4x^2 & & \\
 & -20x^3- & 30x^2- & 10x & \\
 & & -4x^2- & 6x & -2 \\
\hline
8x^4- & 8x^3- & 30x^2- & 16x & -2
\end{array}$$

При помощи метода отделения коэффициентов это действие можно произвести так:

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & 4+ & 6+ & 2 \\
 & & 2- & 5- & 1 \\
\hline
8+ & 12+ & 4 & & \\
 & -20- & 30- & 10 & \\
 & & -4- & 6- & 2 \\
\hline
8- & 8- & 30- & 16- & 2
\end{array}$$

Употребляя полученные числа в качестве коэффициентов членов ряда степеней x, получим

$$8x^4-8x^3-30x^2-16x-2.$$

Необходимо следить, чтобы степени были расположены в убывающем или возрастающем порядке.

Степени членов множимого и множителя следует располагать в одном и том же порядке. Отсутствующие степени заменяют нулями, например

$$3x^3+0+4x+25.$$

92. Деление при помощи отделения коэффициентов.

Пример. Разделить $12x^4+7x^3-7x^2+15x-3$ на $4x^2-3x+3$.

$$\begin{array}{l|l} 12+7-7+15-3 & 4-3+3 \\ \underline{12-9+9} & \overline{3+4-1} \\ \quad 16-16+15 & \\ \quad \underline{16-12+12} & \\ \qquad -4+3-3 & \\ \qquad -4+3-3 & \end{array}$$

Таким образом частное равно $3x^2+4x-1$.

Умножение и разложение на множителей.

93. Произведение двух биномов, имеющих общий член, например

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab.$$

В этом случае произведение равно сумме следующих членов: квадрата общего члена, произведения суммы неодинаковых членов на общий и произведения неодинаковых членов.

Пример.

$$(x+2)(x+5)=x^2+(2+5)x+2\cdot5=x^2+7x+10.$$

94. Произведение двух биномов, имеющих подобные члены. Пусть, например, имеем: $(2x-5)\ (3x+4)$.

Произведение должно содержать член с x^2, член с x и постоянный член.

Первый из них есть результат перемножения $2x$ и $3x$.

Второй представляет собой сумму частных произведений:

$$-5\cdot3x \text{ и } 2x\cdot4.$$

Свободный или постоянный член есть результат перемножения -5 и 4.

Таким образом

$$\begin{array}{l} 2x-5 \\ \underline{3x+4} \\ 6x^2-7x-20. \end{array}$$

95. Возвышение многочленов в квадрат.

$$(a+b+c+d+\ldots)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+\ldots+2a(b+c+d+\ldots)+2b(c+d+\ldots)+2c(d+\ldots)+2d(\ldots)+\ldots$$

Это выражение получено путем сложения квадратов всех членов, взятых в отдельности, и удвоенных произведений каждого члена на сумму всех следующих после него.

96. Одночленный множитель. Одночлен является множителем многочлена, если он входит в *каждый член* последнего. Так, например, x является множителем выражения

$$ax+bx+cx.$$

Выносся x за скобки, получим:

$$(a+b+c)x.$$

Перемещая и группируя соответствующим образом члены можно иногда вынести за скобки общих множителей. Так, например,

$$ax+ay+bx+by=a(x+y)+b(x+y)=(a+b)(x+y).$$

Часто возможность вынесения общего множителя недостаточно очевидна, как это следует из нижепомещенного примера:

Пример. Разложить на множителей выражение

$$a^3+2a^2b+2ab^2+b^3.$$

Представим $2a^2b$ в виде a^2b+a^2b, и $2ab^2$ — в виде ab^2+ab^2. Тогда выражение примет вид

$$a^3+a^2b+a^2b+ab^2+ab^2+b^3.$$

Далее

$$a^2(a+b)+ab(a+b)+b^2(a+b)$$

или

$$(a+b)(a^2+ab+b^2).$$

97. Трехчлены, представляющие собой точный квадрат.

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

$$a^2+4ab+4b^2=(a+2b)^2$$

$$9a^2+12ab+4b^2=(3a+2b)^2$$

$$4a^4+4a^2+1=(2a^2+1)^2.$$

Если удвоенное произведение корней квадратных из двух членов трехчлена равно третьему члену, то такой трехчлен есть полный квадрат.

Так, в выражении

$$9a^2+12ab+4b^2=(3a+2b)^2$$

квадратный корень из первого члена есть $3a$, квадратный корень из второго $2b$, удвоенное произведение их равно $12\,ab$, т. е. второму члену.

98. Разность двух степеней.

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$$
$$a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$$
$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+b^{n-1})$$
$$a^n-b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\ldots+b^{n-1}),$$

где n — четное.

$$a^{2n}-b^{2n}=(a^n-b^n)(a^n+b^n)\ [2n\text{ — четное}].$$

99. Сумма двух степеней.

$$a^2+b^2=(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})\ ^{1})$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$a^4+b^4=(a^2+ab\sqrt{2}+b^2)(a^2-ab\sqrt{2}+b^2).$$
$$a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$$
$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\ldots b^{n-1}),$$

если n — нечетное.

100. Трехчлен вида (x^2+bx+c).

$$x^2+bx+c=(x+p)(x+q),$$

где p и q — два числа, сумма которых равна b, а произведение равно c, т. е.

$$p+q=b \text{ и } pq=c.$$

Пример. Разложить на множителей x^2+x-30. Сумма $p+q=1$ произведение $pq=-30$.

Единственные множители числа -30, сумма которых равна единице, суть (6) и (-5), следовательно

$$x^2+x-30=(x+6)(x-5).$$

---

[1]) См. главу XXXVII.

101. Разложение на множителей некоторых трехчленов вида (ax^2+bx+c). Пусть, например, имеем трехчлен

$$3x^2+11x-4.$$

Так как $3x^2$ есть результат перемножения первых членов двух биномов, содержащих x, то сами эти члены суть $3x$ и x.

Величина -4 является результатом перемножения последних членов, которые должны иметь разные знаки. Единственные числа, удовлетворяющие этому условию, будут 4 и -1, -4 и 1 или же 2 и -2. Группируя всевозможными способами эти пары множителей с множителями $3x$ и x, получим:

$$\begin{pmatrix}3x+4\\ x-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3x-1\\ x+4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3x-4\\ x+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3x+1\\ x-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3x+2\\ x-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3x-2\\ x+2\end{pmatrix}.$$

Из них отберем ту пару, которая даст для алгебраической суммы произведений первых членов на последние величину $11x$.

Очевидно, это будет вторая пара:

$$(3x-1) \text{ и } (x+4).$$

Заметим, что если знак последнего члена тринома есть плюс, то знаки обоих последних членов множителей должны быть одинаковы и зависят от знака среднего члена.

Если же перед последним членом стоит знак минус, то знаки последних членов множителей различны.

102. Двучлены и трехчлены, приводимые к виду (a^2-b^2). Некоторые выражения, например a^4+4b^4, могут быть представлены в виде разности двух квадратов посредством прибавления или вычитания какой-нибудь величины, например в данном случае $4a^2b^2$.

Поступая таким образом, имеем:

$$a^4+4a^2b^2+4b^4-4a^2b^2=a^4+4b^4.$$

Но

$$a^4+4a^2b^2+4b^4-4a^2b^2=(a^4+4a^2b^2+4b^4)-4a^2b^2.$$

Полученное равенство может быть представлено в виде произведения суммы двух количеств и их разности

$$(a^2+2ab+2b^2)(a^2-2ab+2b^2).$$

Пример. Разложить на множителей выражение

$$a^4+a^2b^2+b^4.$$

Прибавим и вычтем a^2b^2, тогда получим:

$$a^4+a^2b^2+b^4=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2=(a^4+2a^2b^2+b^4)-a^2b^2=$$
$$=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2).$$

Трехчлены вида

$$p^2x^4+qx^2y^2+r^2y^4$$

можно разложить на множителей, если $\pm 2pr-q$ представляет собой полный квадрат [1]).

103. Четырехчлены, приводимые к виду (a^2-b^2) (см. n° 98).

$$a^2+2ab+b^2-c^2=(a^2+2ab+b^2)-c^2=$$
$$=(a+b+c)(a+b-c).$$

$$a^2-b^2+2bc-c^2=a^2-(b^2-2bc+c^2)=$$
$$=(a-b+c)(a+b-c).$$

$$4a^2-b^2+9x^2-4y^2-12ax+4by=4a^2-12ax+9x^2-b^2+$$
$$+4by-4y^2=(4a^2-12ax+9x^2)-(b^2-4by+4y^2)=$$
$$=(2a-3x)^2-(b-2y)^2=(2a-3x+b-2y)(2a-$$
$$-3x-b+2y).$$

104. Перестановка членов. Многочлен часто может быть разложен на множителей, если переставить его члены соответствующим образом; в противном случае эта возможность может ускользнуть от внимания.

Пример. Разложить на множителей многочлен

$$x^3-7x^2y+14xy^2-8y^3.$$

Переставляя члены, будем иметь:

$$(x^3-8y^3)-(7x^2y-14xy^2)=(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)-7xy(x-2y)=$$
$$=(x-2y)(x^2-5xy+4y^2)=(x-2y)(x-y)(x-4y).$$

105. Многочлены, приводимые к виду (ax^2+bx+c). Переставляя члены таким образом, чтобы привести выражение к виду (ax^2+bx+c), иногда удается разложить его на множителей.

Пример. Разложить на множителей многочлен

$$3x^2-6xy+3y^2-10x+10y+3$$

Имеем:

$$3x^2-6xy+3y^2-10x+10y+3=3(x^2-2xy+y^2)-10(x-y)+3=$$
$$=3(x-y)^2-10(x-y)+3=[3(x-y)-1][(x-y)-3]=$$
$$=(3x-3y-1)(x-y-3).$$

---

[1]) Если выражение

$$\pm 2pr-q=s^2,$$

то трехчлен

$$p^2x^4+qx^2y^2+r^2y^4=p^2x^4\pm 2prx^2y^2-s^2x^2y^2+r^2y^4$$

и может быть представлен в виде

$$(px^2\pm ry^2)-(sxy)^2=(px^2+sxy\pm ry^2)(px^2-sxy\pm ry^2).$$

Прим. ред.

106. Общий метод нахождения двучленного множителя. Если многочлен, содержащий целые положительные степени x, обращается в нуль при замене x числом r, то этот многочлен нацело делится на $(x-r)$.

Действительно, если произведение двух множителей равно нулю, то один из них равен либо нулю, либо выражению равному нулю. Легко доказать, что при этом r должно быть множителем свободного члена.

Пример 1. Разложить на множителей многочлен

$$x^3-x^2-4x+4.$$

Если положить $x=1=r$, то

$$x^3-x^2-4x+4=1-1-4+4=0.$$

Следовательно $(x-r)$, т. е. $(x-1)$ есть множитель данного выражения

$$\frac{x^3-x^2-4x+4}{x-1}=x^2-4=(x-2)(x+2).$$

Таким образом

$$x^3-x^2-4x+4=(x-1)(x-2)(x+2).$$

Пример 2. Найти множителей выражения $17x^3-14x^2-37x-6$. Так как сумма коэффициентов не равна нулю, то $(x-1)$ не является множителем этого многочлена.

При $x=-1=r$

$$17x^3-14x^2-37x-6=-17-14+37-6=0.$$

Следовательно двучлен $x-(-1)=x+1$ будет множителем заданного выражения.

Примечание. x следует заменять только множителями свободного члена (в данном случае — 6), поэтому рекомендуется начинать пробы с наименьшего множителя.

Дальнейшие сведения относительно разложения на множителей имеются в главе X.

107. Некоторые формулы для деления.

$$\frac{x^2-y^2}{x-y}=x+y$$

$$\frac{x^3-y^3}{x-y}=x^2+xy+y^2$$

$$\frac{x^4-y^4}{x-y}=x^3+x^2y+xy^2+y^3$$

$$\frac{x^5 - y^5}{x - y} = x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$$

$$\frac{x^2 - y^2}{x + y} = x - y$$

$$\frac{x^3 - y^3}{x + y} = x^2 - xy + y^2 + \frac{-2y^3}{x + y}\ ^{1)}$$

$$\frac{x^4 - y^4}{x + y} = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3$$

$$\frac{x^5 - y^5}{x + y} = x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 + \frac{-2y^5}{x + y}\ ^{1)}$$

$$\frac{x^2 + y^2}{x - y} = x + y + \frac{2y^2}{x - y}\ ^{1)}$$

$$\frac{x^3 + y^3}{x - y} = x^2 - xy + y^2 + \frac{2y^3}{x - y}\ ^{1)}$$

$$\frac{x^4 + y^4}{x - y} = x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 + \frac{2y^4}{x - y}\ ^{1)}$$

$$\frac{x^5 + y^5}{x - y} = x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 + \frac{2y^5}{x - y}\ ^{1)}$$

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} = x - y + \frac{2y^2}{x + y}\ ^{1)}$$

$$\frac{x^3 + y^3}{x + y} = x^2 - xy + y^2$$

$$\frac{x^4 + y^4}{x + y} = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 + \frac{2y^4}{x + y}\ ^{1)}$$

$$\frac{x^5 + y^5}{x + y} = x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4.$$

Пример. Найти x, если $x + a^3 = 1 - ax$ и $a = 0{,}01$.

$$x + ax = 1 - a^3$$

$$(1 + a)x = 1 - a^3$$

$$x = \frac{1 - a^3}{1 + a} = 1 - a + a^2 + \frac{-2a^3}{1 + a} = 1 - 0{,}01 + 0{,}0001 +$$

$$+ \frac{(-2)(0{,}000001)}{1{,}01}.$$

Пренебрегая дробью в правой части равенства, найдем

$$x = 1 - 0{,}01 + 0{,}0001 = 0{,}9901.$$

1) Если в этих случаях y есть величина малая по сравнению с x, то дробной частью разложения можно пренебречь.

Из приведенных формул можно сделать следующие выводы:

$x^n - y^n$ — всегда делится на $x - y$,

$x^n - y^n$ — делится на $x + y$, только когда n — четное,

$x^n + y^n$ — не делится на $x - y$,

$x^n + y^n$ — делится на $x + y$ только при n — нечетном.

Если делителем является $x - y$, то перед каждым членом частного стоит знак плюс.

Если делителем является $x + y$, то перед членами частного стоят попеременно плюс и минус.

108. Общий метод проверки сложения, вычитания, умножения и деления. Проверка заключается в замене в данном выражении и в ответе величины x на единицу.

Такая проверка является операцией чисто арифметической и подтверждает правильность алгебраических действий, если дает правильный результат. Покажем применение указанного способа для случая умножения и деления.

$$
\begin{array}{rl}
x^2 - 2x + 5 \qquad\qquad & \text{подстановка } x = 1 \text{ дает } 4 \\
x^2 + 3x - 1 \qquad\qquad & \text{подстановка } x = 1 \text{ дает } \underline{3} \\
\hline
x^4 - 2x^3 + 5x^2 \qquad\qquad & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 12 \\
3x^3 - 6x^2 + 15x & \\
- x^2 + 2x - 5 & \\
\hline
x^4 + x^3 - 2x^2 + 17x - 5; & \text{подстановка } x = 1 \text{ дает } 12.
\end{array}
$$

Пусть требуется разделить $3x^2 + 22x + 35$ на $x + 5$. Производя деление, найдем, что частное равно $3x + 7$. Подставляя $x = 1$ в делимое, найдем:

$$3 + 22 + 35 = 60.$$

Подставляя $x = 1$ в делитель (предполагая, что делитель при этом не обращается в нуль), имеем:

$$1 + 5 = 6.$$

Производя ту же подстановку в частном, найдем:

$$3 + 7 = 10.$$

Следовательно, действие произведено правильно, так как

$$\frac{60}{6}=10.$$

109. Общий наибольший делитель. Общим наибольшим делителем двух или нескольких многочленов называется многочлен наивысшей степени из числа входящих множителями во все эти выражения [1]).

Пример. Найти общий наибольший делитель выражений

$$12a^4b^2c \text{ и } 32a^2b^3c^3.$$

Общий наибольший делитель (или множитель) коэффициентов 12 и 32 есть 4.

Общий наибольший делитель a^4b^2c и $a^2b^3c^3$ есть a^2b^2c.

Следовательно, общий наибольший делитель заданных выражений равен $4a^2b^2c$.

Правило. *Для нахождения общего наибольшего делителя следует:*

1) *найти наибольший делитель коэффициентов;*

2) *умножить его на общих буквенных множителей с наименьшим показателем, которэй они имеют в каком-либо из данных выражений.*

Пример. Найти общий наибольший делитель выражений

$$3x^3-3xy^2 \text{ и } 6x^3-12x^2y+6xy^2.$$

$$3x^3-3xy^2=3x(x+y)(x-y)$$

$$6x^3-12x^2y+6xy^2=2\cdot 3x(x-y)(x-y).$$

Следовательно, общий наибольший делитель равен

$$3x(x-y).$$

---

1) Делители, отличающиеся лишь коэффициентами, обычно не считаются за различные. При отыскании общего наибольшего делителя выражений на коэффициент обычно внимания не обращают, принимая его в наибольшем делителе равным единице. Так, для одночленов $12a^4b^2c$ и $32a^2b^3c^3$ помещенного ниже примера выражение

$$Ca^2b^2c,$$

где C—произвольный коэффициент, может быть принято за общий наибольший делитель.

Проще всего взять общий наибольший делитель равным

$$a^2b^2c.$$

Здесь автор несколько отступает от общепринятых соглашений алгебры, принимая за общий наибольший делитель лишь выражение

$$4a^2b^2c.$$

Прим. ред.

110. Нахождение общего наибольшего делителя (метод Евклида). Если имеются два многочлена, в которые входят степени только одной переменной x, то для нахождения их общего наибольшего делителя можно поступить следующим образом:

Прежде всего следует разделить выражение, содержащее переменную в более высокой степени, на выражение, содержащее ее в более низкой. Последнее нужно разделить на остаток от первого деления. Продолжая аналогичным образом, дойдем до такого выражения, которое делит последний остаток нацело. Это и будет искомый наибольший делитель.

Пример. Найти общий наибольший делитель многочленов

$$x^4-5x^3+4x^2+10x-12$$
$$x^3-3x^2-3x+9.$$

Поступая согласно вышесказанному, имеем:

$$\begin{array}{r|l}
x^4-5x^3+4x^2+10x-12 & x^3-3x^2-3x+9 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4-3x^3-3x^2+\ \ 9x\phantom{{}-12}} & x-2 \\
-2x^3+7x^2+\ \ \ x-12 & \\
\underline{-2x^3+6x^2+\ \ 6x-18} & \\
x^2-\ \ 5x+\ \ 6 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
x^3-3x^2-\ \ 3x+\ \ 9 & x^2-5x+6 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3-5x^2+\ \ 6x\phantom{{}+\ \ 9}} & x+2 \\
2x^2-\ \ 9x+\ \ 9 & \\
\underline{2x^2-10x+12} & \\
x-\ \ 3 &
\end{array}$$

$$x^2-5x+6=(x-3)(x-2).$$

Так как $x-3$ (последний остаток) делит нацело x^2-5x+6 (последний делитель), то $x-3$ есть общий наибольший делитель заданных выражений.

111. Общее наименьшее кратное. Общим наименьшим кратным двух или нескольких многочленов называется многочлен наименьшей степени, который делится на каждый из данных без остатка и является произведением всех простых множителей этих многочленов, причем каждый множитель взят наибольшее число раз, которое он встречается в каком-либо из них.

Пример. Найти наименьшее кратное многочленов:

$$x^2-2xy+y^2,\quad y^2-x^2 \text{ и } x^3-y^3.$$
$$x^2-2xy+y^2=(x-y)(x-y)$$
$$y^2-x^2=-(x+y)(x-y)$$
$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2).$$

Искомое общее наименьшее кратное равно

$$(x-y)^2(x+y)(x^2-xy+y^2).$$

112. Другой способ нахождения общего наименьшего кратного двух выражений заключается в делении одного из них на общий наибольший делитель и умножении частного на другое выражение.

Пример. Найти общее наименьшее кратное выражений

$$x^3-2x^2+x+4 \text{ и } x^3-3x^2+2x+6.$$

Общий наибольший делитель равен $x+1$:

$$\frac{x^3-2x^2+x+4}{x+1}=x^2-3x+4.$$

Общее наименьшее кратное равно

$$(x^2-3x+4)(x^3-3x^2+2x+6).$$

113. Действия с нулем. С нулем можно производить все арифметические действия кроме деления на него, а именно:

Прибавлять нуль: $a+0=a$.

Вычитать нуль: $a-0=a$.

Умножать на нуль: $a\times 0=0$.

Возвышать в нулевую степень: $a^0=1$.

Делить нуль на любое число: $\frac{0}{a}=0$.

114. Дроби, принимающие вид $\frac{0}{0}$ в случае приближения x к a.

Пусть имеются выражения

$$y=\frac{a^3-x^3}{a^2-x^2};\quad y=\frac{2(a-x)^2}{3(a^2-x^2)};\quad y=\frac{2(a^2-x^2)}{3(a-x)^2}.$$

Рассматривая их, мы видим, что они теряют определенность при $x=a$.

Выясним, как изменяется значение каждой из этих дробей по мере приближения x к a.

Множитель $a-x$ в этом случае стремится к нулю; однако, будучи общим для числителя и знаменателя, он может быть сокращен, если считать, что $x\neq a$; тогда получим:

$$y=\frac{a^2+ax+x^2}{a+x};\quad y=\frac{2(a-x)}{3(a+x)};\quad y=\frac{2(a+x)}{3(a-x)}.$$

Если x приближается к предельному значению a, то для указанных трех случаев будем соответственно иметь:

y приближается к $\frac{3a}{2}$; y приближается к $\frac{0}{6a}$;

y обращается в бесконечность.

Кроме рассмотренной неопределенной формы $\frac{0}{0}$, имеются и другие, а именно:

$$0 \cdot \infty; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad 0^0; \quad \infty^0; \quad \infty - \infty.$$

Радикалы.

115. Корень из данного числа обозначается знаком $\sqrt{\ }$ (знак радикала), который ставится перед этим числом.

Если корень извлекается точно, то радикал рационален; если же извлечение не может быть произведено точно, то радикал иррационален.

Корень четной степени из отрицательного числа есть число мнимое, все же остальные числа действительные.

Корни четных степеней из положительного числа могут быть числами положительными или отрицательными, однако обычно берется тот знак, который уже имеется перед корнем.

Радикалы всегда следует приводить к простейшей форме, например:

$$\sqrt{25\,a^4 b} = \sqrt{25\,a^4} \cdot \sqrt{b} = 5\,a^2 \sqrt{b}$$

$$\sqrt[4]{48\,a^5 b^{10}} = \sqrt[4]{16\,a^4 b^8} \cdot \sqrt[4]{3\,ab^2} = 2\,ab^2 \sqrt[4]{3\,ab^2}.$$

Как видно из этих примеров, радикал приходится разлагать на два множителя, из которых один является наибольшим рациональным.

После этого следует извлечь указанный корень из рационального множителя и умножить результат на иррациональный:

$$\sqrt[6]{9\,a^2} = \sqrt[6]{(3\,a)^2} = (3\,a)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[3]{3\,a}.$$

116. Для упрощения подкоренного количества, если оно является дробью, следует преобразовать знаменатель так, чтобы показатель степени в нем делился на показатель корня. Это может быть сделано посредством умножения числителя и знаменателя на один и тот же множитель, что не изменит величины дроби, а затем вынести знаменатель из-под знака радикала.

Пример. Упростить выражение $\sqrt{\frac{a^2}{2x^3}}$. Умножая числителя и знаменателя дроби на $2x$, имеем:

$$\sqrt{\frac{a^2 \cdot 2x}{2x^3 \cdot 2x}} = \sqrt{\frac{a^2}{4x^4}} \cdot \sqrt{2x} = \frac{a}{2x^2} \sqrt{2x}.$$

117. Для того, чтобы изменить степень корня, следует помнить, что между степенью корня и показателем степени подкоренного количества существует такое же соотношение, как между знаменателем и числителем дроби. Таким образом, их можно делить и умножать на одно и то же число, не изменяя величины корня.

$2a\sqrt{5b}$ может быть, например, преобразован так:

$$2a\sqrt{5b}=\sqrt{4a^2}\cdot\sqrt{5b}=\sqrt{4a^2\cdot 5b}=\sqrt{20a^2b}.$$

Для приведения $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$ к одной и той же степени корня, поступаем так:

$$\sqrt[4]{3}=(3)^{\frac{1}{4}}=(3)^{\frac{3}{12}}=\sqrt[12]{3^3}=\sqrt[12]{27}$$

$$\sqrt{2}=(2)^{\frac{1}{2}}=(2)^{\frac{6}{12}}=\sqrt[12]{2^6}=\sqrt[12]{64}$$

$$\sqrt[3]{4}=(4)^{\frac{1}{3}}=(4)^{\frac{4}{12}}=\sqrt[12]{4^4}=\sqrt[12]{256}.$$

118. Сложение и вычитание иррациональных одночленов. Несколько иррациональных членов могут быть объединены в один член посредством сложения или вычитания, если они содержат один и тот же радикал.

Пример.

$$\sqrt{50}+2\sqrt[6]{8}+6\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$

$$2\sqrt[6]{8}=2\sqrt{2}$$

$$6\sqrt{\frac{1}{2}}=3\sqrt{2}$$

$$\overline{10\sqrt{2}.}$$

119. Умножение иррациональных одночленов. Сперва следует привести радикалы к одинаковым показателям. Перемножая коэффициенты при радикалах, получим коэффициент произведения. Умножив его на корень из произведения подкоренных множителей, получим искомый результат, который следует после этого упростить.

Примеры.

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}=\sqrt[6]{a^3}\cdot\sqrt[6]{a^2}=\sqrt[6]{a^5}.$$

$$\sqrt{7}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{35}.$$

$$5\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{15}=10\sqrt{45}=10\sqrt{9\cdot 5}=30\sqrt{5}.$$

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 2\sqrt{2}+3\sqrt{3} \\ 5\sqrt{2}-2\sqrt{3} \end{array} \\ \hline 20+15\sqrt{6}. \\ -4\sqrt{6}-18 \\ \hline 20+11\sqrt{6}-18=2+11\sqrt{6}. \end{array}$$

$$\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{4}=\sqrt[6]{2^3}\cdot 3\sqrt[6]{4^2}=\sqrt[6]{2^3}\cdot 3\sqrt[6]{2^4}=3\sqrt[6]{2^7}=6\sqrt[6]{2}.$$

120. Деление иррациональных одночленов. Для деления иррациональных чисел необходимо привести оба корня к одному показателю, а затем разделить оба количества друг на друга. Полученное выражение следует упростить.

Пример.

$$a\sqrt{b}:x\sqrt{y}.$$

$$\frac{a\sqrt{b}}{x\sqrt{y}}=\frac{a}{x}\sqrt{\frac{b}{y}}.$$

Действие сильно упрощается, если радикал представить в виде дробной степени. Так рекомендуется поступать во всех случаях, когда показатель корня выше третьей степени.

121. Иррациональные дроби. Если знаменатель дроби имеет вид $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$, то для уничтожения в нем иррациональности следует умножить и числителя и знаменателя на

$$\sqrt{a}\mp\sqrt{b}.$$

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a-b}$$

Рекомендуется запомнить следующее соотношение:

$$(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})=a^2-b,$$

так как оно часто упрощает уничтожение иррациональности в знаменателе:

$$\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}}\cdot\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}=$$
$$=\frac{6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{(1+2\sqrt{2}+2)-3}=\frac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=$$
$$=\frac{3\sqrt{2}+2+\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{2}.$$

122. Извлечение корня из иррациональных выражений и возвышение их в степень. Прежде всего необходимо привести радикалы к одному показателю.

Примеры.

Возвысить в куб $2\sqrt{ax^3}$.
Имеем:

$$(2\sqrt{ax^3})^3=2^3(ax^3)^{\frac{3}{2}}=8a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{9}{2}}=8\sqrt{a^3x^9}=8ax^4\sqrt{ax}.$$

Возвысить в квадрат $3\sqrt[6]{x^5}$.

$$(3\sqrt[6]{x^5})^2=9(x^5)^{\frac{2}{6}}=9x^{\frac{5}{3}}=9x\sqrt[3]{x^2}.$$

Возвысить в куб $(\sqrt{2}+1)$.

$$(\sqrt{2}+1)^3=(\sqrt{2})^3+3(\sqrt{2})^2\cdot 1+3\sqrt{2}\cdot 1^2+1^3=$$
$$=2\sqrt{2}+6+3\sqrt{2}+1=7+5\sqrt{2}.$$

Найти корень кубичный из выражения: $-27\sqrt{ax}$.
Имеем:

$$\sqrt[3]{-27\sqrt{ax}}=(-27)^{\frac{1}{3}}(ax)^{\frac{1}{6}}=-3\sqrt[6]{ax}.$$

Чтобы найти квадратный корень из двучлена, содержащего иррациональный член, следует разделить последний на 2, а затем разложить частное на два множителя, сумма квадратов которых равна рациональному члену. Вообще

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=x+2\sqrt{xy}+y=x+y+2\sqrt{xy},$$

где x и y — какие угодно числа.

Поэтому, если можно разделить радикал на 2 и разложить частное на два множителя, которые при возвышении каждого из них в квадрат и последующем сложении дадут рациональный член, то данное выражение представляет собой точный квадрат суммы этих двух множителей.

Так, $8+2\sqrt{12}$ можно написать в виде: $6+2\sqrt{12}+2$.

Сравнивая это выражение с общим, написанным выше, имеем:

$x=6, \quad y=2, \quad 2\sqrt{xy}=2\sqrt{12}=2\sqrt{6\cdot 2}=2\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}.$

Следовательно,

$$(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2=6+2\sqrt{12}+2=8+2\sqrt{12}$$

или

$$\sqrt{8+2\sqrt{12}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}.$$

Пример.

Найти квадратный корень из $14+8\sqrt{3}$.

$$\frac{8\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}=\sqrt{48}=\sqrt{6}\cdot\sqrt{8}.$$

$$8+6=14,$$

так что

$$14+8\sqrt{3}=(\sqrt{6}+\sqrt{8})^2 \quad \text{или} \quad \sqrt{14+8\sqrt{3}}=\sqrt{6}+\sqrt{8}.$$

123. Степени и корни.

$$a^n=a\cdot a\cdot a\cdot a\ldots \; n \text{ раз.}$$

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$$

$$(a^m)^n=a^{mn}$$

$$(ab)^n=a^nb^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$$

$$(\sqrt[n]{a})^n=\sqrt[n]{a^n}=a$$

$$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$$

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$$

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}$$

$$a^0=a^{n-n}=\frac{a^n}{a^n}=1$$

$$\frac{a^{-m}}{b^{-n}}=\frac{\frac{1}{a^m}}{\frac{1}{b^n}}=\frac{1}{a^m}\cdot\frac{b^n}{1}=\frac{b^n}{a^m}$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a^m}}=\sqrt[n]{a^{-m}}=a^{-\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[s]{\sqrt[n]{\frac{1}{a^{mr}}}}=\sqrt[s]{\sqrt[n]{a^{-mr}}}=\sqrt[s]{a^{-\frac{mr}{n}}}=a^{-\frac{mr}{ns}}$$

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$$

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{a\cdot a}=\sqrt[n]{a^2}$$

$$(a+b)^n=a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n.$$

Глава IV.

ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ. СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ.

Переменные и функции.

124. Функции. Переменная y называется функцией другой переменной x, если величина первой определяется данным значением второй.

Пример.

$$y=mx+5.$$

Здесь y есть функция x, или $mx+5$, равное y, есть функция x.

Переменная является такой величиной, которая в течение данного исследования принимает ряд различных значений.

Функции обозначаются символами, например $F(x)$, $f(x)$, которые представляют собою выражения, содержащие x. Таким образом $bx + c$ можно обозначить через $f(x)$.

Пример. Резервуар, содержащий 300 л воды, наполняется со скоростью 50 л в час.

В течение x часов резервуар получит $50x$ литров воды. Так как к моменту начала вливания он уже содержал 300 л, а мы обозначаем общее количество воды в резервуаре через y, то получим для y выражение

$$y = 50x + 300.$$

Количество воды есть функция времени:

$$y \text{ — функция } x \text{ или } y = f(x),$$

где $f(x)$ означает $50x + 300$.

Пусть мы имеем тело, брошенное вверх с начальной скоростью v_0; обозначая через s расстояние движущегося тела от начальной точки, а через t — время в секундах, получим следующее равенство:

$$s = v_0 t - 4{,}9t^2.$$

В этом случае расстояние s есть функция времени t.

Положим, нагрев ется некоторый сосуд с водой. Его температура — функция времени.

Скорость трогающегося поезда измеряется счетчиком для измерения скоростей. Скорость поезда — функция времени.

Площадь квадрата — функция его стороны. Площадь эта $A = x^2$.

Объем шара — функция его радиуса.

Объем данного весового количества воды — функция ее температуры.

125. Графики уравнений. Повторяем определение функции как некоторой величины y, которая изменяется по мере изменения переменной x, находясь с последней в определенном соотношении.

Величина x есть независимая переменная, а величина y — зависимая переменная.

Точки, находящиеся на прямой линии, служащей основанием, т. е. на оси x-ов, представляют собою значения независимой переменной x; переменная же высота кривой линии над осью x-ов выражает значения зависимой переменной y, соответствующие различным значениям независимой переменной x. В большинстве случаев эта высота является переменной величиной, которая показывает, как изменяется зависимая переменная по отношению к независимой.

Обычный способ графического изображения функций состоит в том, что на чертеж наносят значения независимой переменной в виде абсцисс, а зависимой — в виде ординат. На рис. 3 графически показан характер изменения функции при различных значениях независимой переменной. Длина ординаты есть значение величины зависимой переменной, т. е. функции, соответствующей частному значению x (рис. 4).

Чтобы иметь возможность получать величину различных ординат и избежать необходимости вычерчивать их в каждом

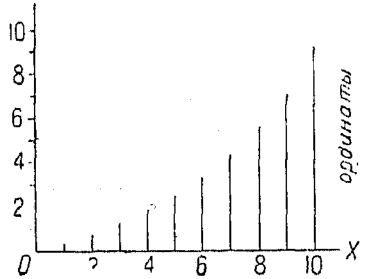


Рис. 3.

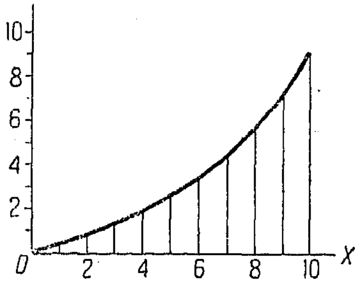


Рис. 4.

отдельном случае, проводят кривую, соединяющую их концы, как это показано на рис. 4.

Она представляет собой средство для нахождения величины ординаты для каждого частного значения независимой переменной.

Необходимо помнить, что переменная высота, о которой мы говорим, представляет собой значения функции.

Если имеется выражение

$$x^2+3x+3,$$

то величина его зависит от значений, которые мы даем независимой переменной x. В таких случаях говорят, что данное выражение есть функция от x. Построение графика состоит в нанесении на чертеж значений функции, вычисленных для различных x.

Если читатель усвоит такую точку зрения, то графические соотношения между зависимой и независимой переменными станут для него вполне ясными (рис. 5).

Наше выражение может быть также обозначено через y или другую букву, в таком случае получим равенство

$$y=x^2+3x+3.$$

Указанное обозначение не изменит первоначального соотношения между абсциссами и ординатами точек кривой, как это видно из рис. 5.

126. Функции первой степени. Функции первой степени часто называются линейными функциями, потому что их график представляет собою прямую линию.

Если функция изменяется точно так же, как и независимая переменная, то мы имеем равенство $y=x$. Если же функция изменяется в два раза быстрее независимой переменной, то получается равенство $y=2x$; если в два раза медленнее, то $y=\frac{1}{2}x$.

При одинаковом изменении y и x, т. е. $y=x$, наш график будет иметь вид, показанный на рис. 6. Если мы даем x раз-

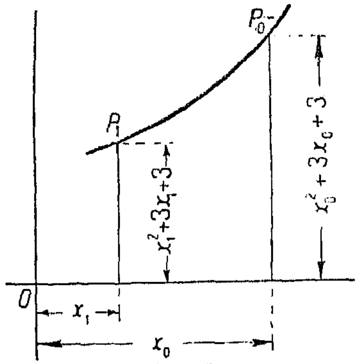


Рис 5.

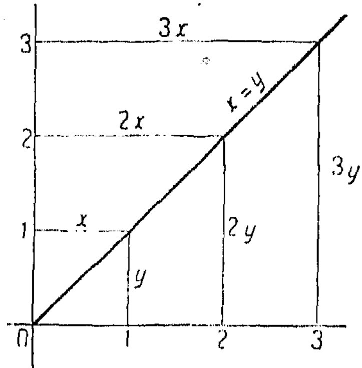


Рис. 6.

личные значения, как например 1, 2, 3 и т. д., то очевидно, что график уравнения $y=x$ представляет собою диагональ квадратов и является прямой линией, имеющей постоянный наклон, равный 1.

Таким же образом, при $y=2x$, для различных значений x, мы имеем ряд прямоугольников с совпадающими диагоналями, как это было и в предыдущем случае. Мы также имеем прямую линию, но лишь с другим наклоном, который в этом случае равняется отношению двух единиц y к одной единице x, т. е. $\frac{2}{1}=2$.

Имея функцию $y=mx$, так же, как и выше, мы получаем, что отношение y к x есть $\frac{y}{x}=m$.

Здесь m может быть любым числом, отличным от 0, как например 6, $\frac{1}{2}$, -3.

Если $m > 1$, y возрастает быстрее x.

Если m — отрицательное число, то y возрастает, в то время как x убывает; в этом случае график образует тупой угол с положительным направлением оси x, в то время как при положительном m — острый угол.

Так как каждый из указанных графиков имеет постоянный наклон, то все они являются прямыми линиями. Если бы изменение y по отношению к x не было постоянным, наклон графика также не был бы постоянен и наша функция не являлась бы функцией первой степени от x. Поэтому всем функциям первой степени соответствуют прямые линии.

127. Изменение функции по отношению к независимой переменной можно рассмотреть еще и другим путем: пусть y увеличилось на величину h, в то время как x возросло на k; тогда наклон m равняется отношению $\frac{h}{k}$. В самом деле, имея первоначальное уравнение

$$y = mx, \tag{1}$$

при указанном изменении y и x получаем:

$$y + h = m(x + k) = mx + mk. \tag{2}$$

Вычтя (1) из (2), имеем:

$$\begin{array}{r} y + h = mx + mk \\ y = mx \\ \hline h = mk \end{array}$$

откуда наклон

$$m = \frac{h}{k}.$$

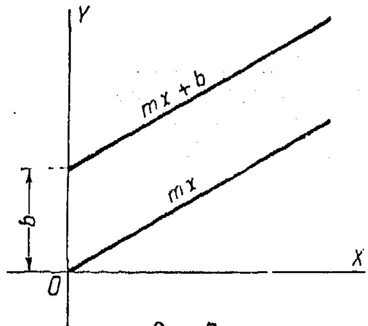


Рис. 7.

128. Функция $mx + b$. График функции $y = mx + b$ приведен на рис. 7.

Если $x = 0$, то $y = b$, т. е. график отсекает на оси Y постоянный отрезок длиною b. Поэтому можно сказать, что все значения функции $y = mx + b$ равны соответствующим значениям функции $y = mx$ плюс постоянная величина b.

В этом случае наклон графика не изменяется, а сам график перемещается в вертикальном направлении кверху (предполагая, что b—положительное число) на расстояние, равное b.

Функция имеет постоянное начальное значение b независимо от значения x.

Применение уравнений и графиков весьма полезно при решении разного рода задач. В настоящей главе будут приведены некоторые примеры, поясняющие вышесказанное.

Пример. Поезд отправляется со станции, находящейся в 10 *км* к западу от Чикаго, со скоростью 30 *км/час* и идет на запад. Где будет находиться поезд через x часов после отправления?

В течение x часов поезд пройдет $30x$ *км*. Если расстояние от Чикаго обозначить через y, мы получаем следующее равенство: $y = 30x + 10$.

Начальное значение y равно 10.

Отношение величины пути, пройденного поездом, к соответственно затраченному времени равно 30, что представляет собою скорость движения или, другими словами, наклон графика.

Другой пример такого же рода дает закон Гука, гласящий, что длина растянутого стального стержня y равняется его первоначальной (до растяжения) длине b плюс удлинение, пропорциональное растягивающей силе x, т. е. $y = mx + b$.

Наклон графика функции $mx + b$ постоянен для взятых двух пар значений переменных, как например (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Имеем:

$$y_1 = mx_1 + b, \quad y_2 = mx_2 + b,$$

откуда

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1) \quad \text{и} \quad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m.$$

Обратно, если отношение скоростей изменения функции y и независимой переменной x постоянно и равно m, то функция имеет такой вид: $y = mx + b$.

Пусть $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$, где Δx есть величина изменения x, а Δy — изменения y; тогда имеем:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{изменение } y}{\text{соответствующее изменение } x}.$$

129. Уравнение. Уравнение, справедливое для частных значений входящих в него переменных, остается справедливым и после того, как над ним произвели любое из следующих действий:

Прибавление любого количества к обеим частям его.

Вычитание любого количества из обеих частей его.

Перенесение любого члена равенства из одной части его в другую (причем необходимо у переносимого члена переменить знак на обратный).

Умножение или деление обеих частей его на любое количество, неравное 0 и не содержащее неизвестных.

Изменение знаков всех членов на обратные.

Логарифмирование обеих частей уравнения (при условии, что обе части положительны).

Кроме того, если найти sin, cos, tg и т. д. для обеих частей уравнения, то указанные тригонометрические величины, взятые для левой и правой частей уравнения, будут равны друг другу.

Необходимо помнить, что возвышение обеих частей уравнения в некоторую степень вносит новые (посторонние) корни, не удовлетворяющие, вообще говоря, первоначальному уравнению. Так, например, уравнение $x = -2$ имеет только один корень, а уравнение $x^2 = 4$ имеет два корня, а именно $x = +2$ и $x = -2$.

Уравнение, не содержащее дроби с неизвестными в знаменателе, называется *целым уравнением.*

Таким образом уравнения

$$3x - y = 15, \quad \frac{3x + 2y}{5} + \frac{5x + 3y}{3} = x + 1$$

оба являются целыми уравнениями, так как они не содержат неизвестных в знаменателях.

Если обе части уравнения умножить на выражение, содержащее неизвестное, то получившееся уравнение имеет все корни данного уравнения, а также и корни того уравнения, которое образуется, если взятый множитель приравнять нулю. Введенные в наше уравнение таким образом корни называются *посторонними корнями.*

Если обе части целого уравнения разделить на целый общий их множитель, содержащий неизвестное, то получившееся при этом уравнение содержит все корни данного за исключением тех, которые имеет уравнение, образующееся при приравнивании нулю сократившегося общего множителя. Для определения всех корней данного уравнения, надо кроме корней, вычисленных из уравнения, получившегося после сокращения на указанный общий множитель, учесть еще и корни уравнения, полученного при приравнивании нулю указанного общего множителя.

130. Составление уравнений по условиям задачи. Обозначаем неизвестное количество через x и из условий, даваемых задачей, *найдем равные между собой выражения, образующие уравнение*. Одно какое-либо выражение можно сделать равным другому, прибавляя к первому или отнимая от него некоторую величину, или же умножая или деля его на некоторое число. Применяя указанные приемы для получения *равных* между собою выражений, сможем написать уравнение.

Многие законы математики, механики и физики часто могут быть изображены равенствами, так например:

Длина $\times$ ширина = площадь прямоугольника.

Скорость $\times$ время = пройденный путь.

Число предметов $\times$ цена каждого = общая стоимость.

Число лиц $\times$ количество долларов, полученных от каждого = число полученных долларов.

Квадрат гипотенузы = сумма квадратов катетов.

Задача может давать равенство и непосредственно.

В этом случае, сообразуясь с условиями задачи, можем написать искомое равенство.

Для пояснения сказанного рассмотрим следующую задачу.

Задача. Через 15 лет A будет в 3 раза старше, чем он был 5 лет тому назад. Определить его возраст в настоящее время.

Составляем равенство. Если умножить его возраст 5 лет тому назад на 3, произведение будет *равно* его возрасту через 15 лет. Это и дает нам искомое равенство или уравнение:

Возраст через 15 лет = 3 · (возраст 5 лет тому назад).

Пусть x = возрасту в данное время (который требуется определить).

Тогда $x + 15$ = его возраст через 15 лет,

$x - 5$ = его возраст 5 лет тому назад.

Пишем уравнение:

$$x + 15 = 3(x - 5) = 3x - 15.$$

$$2x = 30,\ x = 5.$$

131. Решение задач, содержащих два неизвестных. В этом случае необходимо иметь два условия. Одно неизвестное обыкновенно обозначают буквой x, а другое — буквой y. Однако употреблять для обозначения неизвестных два символа не всегда обязательно, ибо второе неизвестное может быть часто выражено через первое. Задачи, в которых для обозначения неизвестных применяются две буквы, будут рассмотрены в следующей главе. В приводимых ниже задачах рассмотрены случаи, когда проще употреблять только одну букву.

Пример. Одно число больше другого на 8, сумма же их равна 14. Найти числа.

Условие, по которому можно составить равенство, непосредственно указано в задаче.

$$\text{Сумма чисел} = 14.$$

Другое условие состоит в том, что одно число больше другого на 8. Обозначим меньшее число через x.

Тогда

$$x + 8 = \text{большее число}.$$

Составим уравнение

$$x + (x + 8) = 14.$$
$$2x + 8 = 14,\ 2x = 6.$$
$$x = 3 = \text{меньшее число},$$
$$x + 8 = 11 = \text{большее число}.$$

132. Если задача содержит три неизвестных, то для решения ее должны быть даны три условия.

Пример. За вагонетки, стрелки и переносные рельсы, которые стоят соответственно по 90, 35 и 15 руб. каждая, было заплачено 1185 руб. Число стрелок больше числа вагонеток на 4, а число рельс вдвое больше числа вагонеток и стрелок, взятых вместе. Сколько каждых из этих предметов куплено?

Мы составляем искомое равенство из первого условия:

стоимость вагонеток + стоимость стрелок + стоимость рельс = 1185 руб

Обозначим число вагонеток через x.

Тогда $x + 4$ — число стрелок (второе условие).

$2[x + (x + 4)]$ — число рельс (третье условие).

Стоимость вагонеток: $90x$ руб.

Стоимость стрелок: $35(x + 4)$ руб.

Стоимость рельс: $15(4x + 8)$ руб.

Из предыдущего имеем уравнение:

$$90x + 35(x + 4) + 15(4x + 8) = 1185,$$

откуда (n^0 130):

число вагонеток $= x = 5$.

число стрелок $= x + 4 = 9$.

число рельс $= 4x + 8 = 28$.

133. Табличный способ заключается в систематическом расположении условий задачи, что облегчает составление равенства. Схему применения этого способа лучше всего можно уяснить на примере.

Пример. Длина прямоугольного участка вдвое больше его ширины. Если увеличить длину на 30 *м*, а ширину уменьшить на 10, то площадь его уменьшится на 100 *кв. м.*

Найти размеры участка.

	Длина	$\times$	*ширина*	$=$	*площадь*
Первоначальный участок	$2x$		x		$2x^2$
Участок после изменения сторон	$2x + 30$		$x - 10$		$(2x + 30)(x - 10)$

Условие равенства. Если площадь первоначального участка уменьшится на 100 *кв. м*, то она будет *равна* площади измененного участка.

Отсюда (n^0 130):

$$2x^2 - 100 = (2x + 30)(x - 10).$$

Решая уравнение, имеем:

$$x = 20, \quad 2x = 40.$$

Пример. Некоторая сумма, отданная по 5%, дает тот же доход, как и сумма на 200 руб. бо́льшая, отданная по 4%. Чему равен первый капитал?

Капитал	$\times$	*величина процентов*	$=$	*доход*
x		0,05		$0{,}05x$ рублей
$x + 200$		0,04		$0{,}04(x + 200)$ руб.

Условие равенства. Доход в обоих случаях один и тот же, отсюда (n^0 130):

$$0{,}05x = 0{,}04(x + 200).$$

Решая уравнение, имеем:

$$x = 800 \text{ рублей.}$$

134. Задачи на время и путь, пройденный в движении. При решении задач этого рода, когда скорость — величина постоянная, следует помнить, что

Время $\times$ *скорость* $=$ *пройденный путь.*

$$\textit{Время} = \frac{\text{пройденный путь}}{\text{скорость}}.$$

$$\textit{Скорость} = \frac{\text{пройденный путь}}{\text{время}}.$$

Задача 1. Скорость экспресса равна $\frac{9}{5}$ скорости обыкновенного поезда. Если для прохождения 360 *км* обыкновенному поезду нужно затратить на 4 часа больше, чем экспрессу, то какова скорость последнего?

	Время	$\times$ скорость	$=$ пройденный путь
Обыкновенный поезд . .	$\frac{360}{x}$	x	360
Экспресс	$\frac{360}{\frac{9x}{5}}$	$\frac{9x}{5}$	360

Условие равенства. Если 4 часа вычесть из времени пробега 360 *км* обыкновенным поездом, то получившаяся при этом разность *равняется* времени пробега экспрессом того же расстояния.

Таким образом (n^0 130):

$$\frac{360}{x} - 4 = \frac{200}{x}.$$

Скорость обыкновенного поезда $= x = 40$.

Скорость экспресса $= \frac{9}{5}x = 72$, *Задача 2.* Велосипедист отправляется от некоторого пункта со скоростью 16 *км/час*; спустя 45 мин. $\left(\frac{3}{4}\text{ часа}\right)$ из того же места выезжает автомобиль со скоростью 24 *км/час*. Через сколько времени автомобиль обгонит велосипедиста?

	Время	скорость	пройденный путь
Велосипед	$\frac{x}{16}$	16	x
Автомобиль	$\frac{x}{24}$	24	x

Условие равенства. Если из времени движения велосипедиста вычесть $\frac{3}{4}$ часа, полученная разность будет *равна* времени движения автомобиля.

Поэтому (n⁰ 130):

$$\frac{x}{16}-\frac{3}{4}=\frac{x}{24};\ x=36.$$

Время движения автомобиля $=\frac{x}{24}=\frac{36}{24}=$ $=1\frac{1}{2}$ часа.

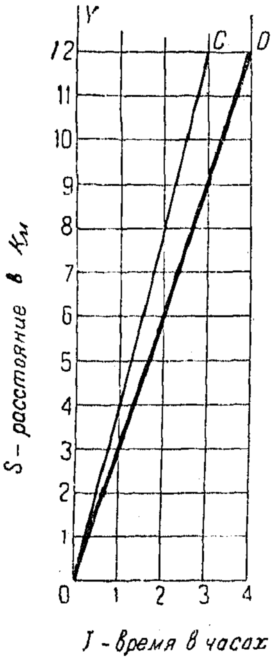


Рис. 8.

135. Графики равномерного движения. Если пешеход проходит 3 *км* в течение каждого часа, то связь между пройденным путем и временем можно представить графически (рис. 8).

Расположим шкалу часов на оси X, а километров — на оси Y. За первый час пешеход прошел 3 *км*; поэтому наносим точку $x=1$, $y=3$. Прямая линия, проведенная через эту точку и через начало координат, определяет соотношение между временем и расстоянием.

При этом будет иметь место алгебраическое соотношение

$$s=3t.$$

Если пешеход идет с одной и той же скоростью, то график показывает, что он через 4 часа придет в город, расположенный в 12 *км* от места его отправления. Если же он будет итти со скоростью 4 *км/час*, то он достигнет того же города за 3 часа, как это видно из графика OC. Заметим что график второго движения наклонен более круто, чем первый. Кроме того заметим, что отношение расстояния ко времени является наклоном графика и что указанные графики равномерных движений — прямые линии.

Задача. Джонс, проехав $2\frac{1}{2}$ часа в автомобиле со скоростью 16 *км/час*, делает остановку на $1\frac{1}{2}$ часа, а затем продолжает путь с первоначальной скоростью. Пять часов спустя после отправки Джонса в дорогу, в догонку ему выезжает на мотоцикле Смит со скоростью 32 *км/час*. Какое расстояние они проедут, прежде чем Смит нагонит Джонса?

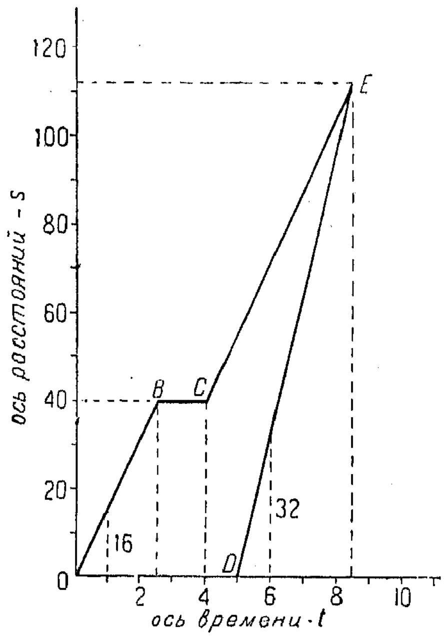


Рис. 9.

Алгебраическое решение. Пусть x — пройденное до момента встречи расстояние в километрах. За $2\frac{1}{2}$ часа, при скорости 16 *км/час*, Джонс проедет 40 *км*. Тогда расстояние, пройденное Джонсом после остановки, равно $x - 40$.

Время движения Джонса после остановки до того момента, когда его догонит Смит, равно:

$$\frac{x-40}{16}.$$

Общее время нахождения в пути Джонса равно

$$2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} + \frac{x-40}{16}. \qquad (1)$$

Время, пройденное Смитом, плюс 5 часов, равно:

$$5 + \frac{x}{32}. \qquad (2)$$

Но выражения (1) и (2) равны между собою; поэтому

$$2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} + \frac{x-40}{16} = 5 + \frac{x}{32},$$

откуда

$$x = 112 \text{ км}.$$

Графический метод (рис. 9). O соответствует точке отправления, так как в ней $t = 0$ и $s = 0$.

Проведем прямую OB с наклоном $\frac{16}{1}$ до пересечения ее с вертикальным отрезком, соответствующим $2\frac{1}{2}$ часам на оси времени. Для следующих

$1\frac{1}{2}$ часов s не возрастает, это выражается прямой BC, параллельной оси времени. Затем автомобилист продолжает свое движение с первоначальной скоростью, и это обстоятельство указывается прямой CE, имеющей тот же наклон, что и прямая OB.

Мотоциклист отправляется 5 часов спустя, т. е. $t = 5$, но так как он начинает двигаться от того же пункта, откуда отправился и автомобиль, то и здесь $s = 0$. Через точку D проводим прямую DE с наклоном, равным 32. DE является графиком движения мотоциклиста. Оба наши графика пересекаются в точке E, которой соответствует $s = 112$. Отсюда следует, что, проехав 112 *км*, мотоциклист нагонит автомобилиста.

Большинство решений графическим способом может быть получено с достаточной степенью точности, так как почти во всех случаях, подобных только что изложенному, скорости измеряются не абсолютно точно и потому имеют приближенные значения.

136. Графики нескольких равномерных движений (рис. 10).

Пусть x отправляется из некоторой точки O и за 4 часа проходит 12 *км*. Прямая OA — график движения x. Час спустя после выхода x начинает двигаться y и проходит то же расстояние, достигая конечного пункта часом раньше, чем x. BC — график движения y. Как далеко и когда y нагонит x?

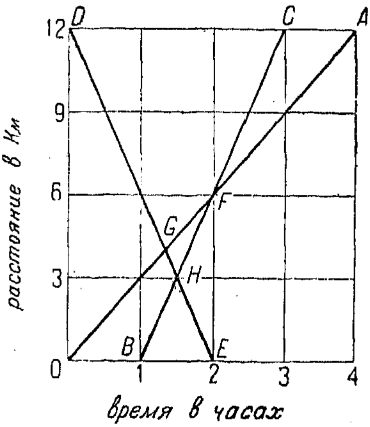


Рис. 10.

Точка пересечения двух указанных графиков дает ответ на вопрос задачи. Отрезок EF показывает искомое расстояние, y нагоняет x два часа спустя после начала движения x ($t = 2$).

Теперь рассмотрим z, начинающего двигаться одновременно с x, но только с противоположного конца проходимого пути, с той же скоростью, что и y. DE — график движения z; этот график мы строим с наклоном, равным наклону BC, но с отрицательным знаком, так как z движется в противоположном направлении.

График DE показывает, что z встретится с x после того, как x пройдет 4 *км*, и спустя $1\frac{1}{3}$ часа после начала их движения. Встреча же z с y произойдет после того, как y пройдет 3 *км*, и спустя $\frac{1}{2}$ часа после начала движения y.

137. Задачи на проценты.

Задача 1. Сколько нужно добавить воды к 12 *л* 25-процентного раствора алкоголя, чтобы получить 10-процентный раствор?

Пусть x—число литров воды, добавляемых к данному раствору.

Тогда $12 + x$ — общее число литров 10-процентного раствора, а 10% от $(12 + x)$ — число литров чистого алкоголя, но 25% от 12, т. е. 3—также число литров чистого алкоголя.

Следовательно, 10% от $(12+x)=3$, или $1{,}2+10\%$ от $x=3$.

$$10\% \text{ от } x=1{,}8, \quad x=18.$$

Задача 2. Рабочий желает наполнить 30-литровый чан 25-процентным раствором алкоголя в воде. Он располагает 40-процентным раствором, который хочет смешать с 5-процентным.

Какое количество каждого из растворов он должен взять для получения 30 *л* 25-процентного раствора?

Пусть x — число литров 40-процентного раствора. Тогда $30-x$ — число литров 5-процентного раствора.

Из условия задачи следует, что

$$0{,}40\,x+0{,}05\,(30-x)=25\% \text{ от } 30.$$
$$0{,}40\,x+0{,}15-0{,}05\,x=7{,}5$$
$$0{,}35\,x=6{,}0.$$
$$x=17\frac{1}{7}; \quad 30-x=12\frac{6}{7}.$$

Таким образом, требуется $17\frac{1}{4}$ *л* 40-процентного раствора и $12\frac{6}{7}$ *л* 5-процентного.

Задача 3. Некто получает 6% помещенного в банке капитала и, прибавляя к полученной сумме еще 60 руб., имеет на руках 300 руб. Какой капитал был помещен в банке?

Пусть x — капитал, находящийся в банке, в рублях

Тогда $0{,}06\,x$ — полученная из банка сумма в рублях, к

$$0{,}06\,x+60=300.$$

Следовательно

$$0{,}06\,x=240; \quad x=4000.$$

Замечание. Не следует через букву x обозначать вложенный в банк вообще капитал, через x надо обозначать этот капитал в рублях.

Задача 4. На сколько процентов выше себестоимости должен кооператив поставить цену на свой товар для того, чтобы делать с нее 20% скидки и все же при этом иметь 20% прибыли?

Решение состоит в том, чтобы найти, сколько процентов от себестоимости товара составляет поставленная кооперативом на нем цена, а затем выяснить, на сколько процентов поставленная цена выше себестоимости.

Пусть c — себестоимость, в рублях.

Тогда $1{,}20\,c$ — продажная стоимость, в рублях.

Таким же образом, пусть m — проставленная на товаре цена, в рублях.

Тогда $0{,}80\,m$ — продажная стоимость, в рублях.

Следовательно

$$0{,}80\,m=1{,}20\,c; \quad m=1{,}50\,c,$$

что означает: товар должен быть помечен ценою выше себестоимости на 50%.

Задача 5. Если 15% от некоторого числа составляют 9165, то каково самое число?

Пусть x — искомое число. Тогда

$$0{,}15x=9165; \quad x=61\,100.$$

Задача 6. Каково число, которое, будучи увеличено на $66\frac{2}{3}\%$, дает 275?

Пусть x — искомое число. Тогда

$$x + 66\frac{2}{3}\% \text{ от } x = 275, \text{ т. е. } 1{,}66\frac{2}{3}x = 275.$$

$$x = 165.$$

Задача 7. После вычитания 10% из прейс-курантной цены товара, кооператив продал его за 13,50 руб.

Какова была прейс-курантная цена?

Пусть x — прейс-курантная цена в рублях. Тогда

$$x - 0{,}10x = 13{,}50 \text{ или } 0{,}90x = 13{,}50.$$

$$x = 15.$$

138. Формулы для вычисления процентных денег. Обозначим p — капитал, r — число процентов в год, t — время, в годах.

Процентные деньги = капитал $\times$ число процентов в год $\times$ $\times$ время, или

$$i = prt.$$

$$\text{Капитал} = \frac{\text{процентные деньги}}{\text{число процентов} \times \text{время}}, \text{ или } p = \frac{i}{rt}.$$

$$\text{Число процентов} = \frac{\text{процентные деньги}}{\text{капитал} \times \text{время}}, \text{ или } r = \frac{i}{pt}.$$

$$\text{Время} = \frac{\text{процентные деньги}}{\text{капитал} \times \text{число процентов}}, \text{ или } t = \frac{i}{pr}.$$

Так как процентные деньги на капитал в 200 руб. за 3 года по 6% составляют 36 руб., т. е.:

$$i = 200 \times 6\% \times 3 = 36,$$

то

$$p = \frac{36}{3 \times 0{,}06} = 200$$

$$r = \frac{36}{3 \times 200} = 0{,}06 \text{ или } 6\%$$

$$t = \frac{36}{0{,}06 \times 200} = 3.$$

Сумма, полученная от сложения процентных денег и капитала, называется *наращенным капиталом*; она равна:

$$\begin{aligned} a &= p + i \\ &= p + p \cdot rt \\ &= p(1 + rt). \end{aligned}$$

Капитал, уменьшенный на величину процентных денег (если последние платятся авансом), называется *учтенным капиталом*. Он равен:

$$\begin{aligned} P &= p - i \\ &= p - p \cdot r \cdot t \\ &= p\,(1 - rt). \end{aligned}$$

Процентные деньги, уплаченные вперед, как только что было приведено, называются *учетом*.

139. Вычисление процентных денег методом шести процентов. Процентные деньги при $6^0/_0$ годовых за 60 дней (2 месяца) составляют 0,01 капитала, а за 6 дней — 0,001 его.

Чтобы найти процентные деньги за 600 дней при 6% годовых, следует передвинуть запятую в числе, выражающем капитал, на один знак влево; за 60 дней — на два знака, и за 6 дней — на три знака в том же направлении. После того как мы определили процентные деньги при $6^0/_0$, мы легко найдем их и при всяком другом числе процентов. Так, например, для вычисления процентных денег при $5^0/_0$, возьмем $\frac{5}{6}$ от процентных денег, определенных для $6^0/_0$, а при $7^0/_0$ — $\frac{7}{6}$ от них.

Процентные деньги обыкновенно вычисляются, исходя из 360 дней в году.

140. Вычисление процентных денег методом одного дня. В больших городских банках учетный процент изменяется ежедневно. Простое правило вычисления процентных денег за 1 день при объявленном на этот день числе процентов получается способом, показанным в приведенном ниже примере.

Пример. Вывести правило для вычисления учета за 1 день при $4\frac{1}{2}{}^0/_0$.

$$i = p \cdot rt, \quad r = \frac{9}{200}, \quad t = \frac{1}{360}.$$

$$i = p \cdot \frac{9}{200} \cdot \frac{1}{360} = p \cdot \frac{1}{8000}.$$

Таким образом, чтобы найти процентные деньги за один день при $4\frac{1}{2}{}^0/_0$ годовых, следует в числе, выражающем капитал, перенести запятую на три знака влево, а затем полученный результат разделить на 8.

141. Точное вычисление процентных денег производится, исходя из 365 дней в году. Процентные деньги, вычисленные точно, с процентными деньгами, вычисленными исходя из 360 дней в году, составляют отношение $\frac{73}{72}$. Точную величину процентных денег можно получить посредством прибавления к процентным деньгам, вычисленным неточным способом, $\frac{1}{72}$ этих последних.

Формулы для вычисления скидок с цен. Если цена по прейс-куранту L, цена после скидки N, а величина самой скидки (в процентах) r, то

$$N = L - rL = L(1 - r).$$

Если нужно последовательно произвести две скидки r_1 и r_2, то вторая скидка берется как некоторый процент от остатка, получившегося после вычитания первой скидки из первоначальной цены. Таким образом, окончательная цена получается после вычитания второй скидки из указанного остатка. Тогда имеем:

$$N = L(1 - r_1)(1 - r_2) \text{ и т. д.}$$

Так как

$$L(1 - r_1)(1 - r_2) = L(1 - r_2)(1 - r_1),$$

то порядок вычитания скидок не влияет на результат.

142. Формулы для вычисления комиссионного вознаграждения. Оплата посреднических услуг в торговле, т. е. так называемая „комиссия", вычисляется в зависимости от общего размера произведенной сделки. Она обычно представляет собою некоторый процент от назначенной покупателем суммы, если комиссия получается от покупателя. Если же комиссия выплачивается продавцом, то она является некоторым процентом от первоначально назначенной цены (включая скидку, сделанную впоследствии).

В последнем случае имеем:

$$c = P \cdot r, \quad r = \frac{c}{P}, \quad P = \frac{c}{r},$$

где P есть первоначально назначенная продавцом стоимость товара, r — размер комиссионного процента, c — комиссия.

В первом же случае будем иметь

$$c = C \cdot r, \quad r = \frac{c}{C}, \quad C = \frac{c}{r},$$

где C есть стоимость товара, r — размер комиссионного процента, c — комиссия.

143. Продажные цены. Комиссия, выплачиваемая агентам по продаже, вычисляется, исходя из продажных цен. Эта статья расхода входит в накладные расходы по сделке. Гораздо логичнее устанавливать стоимость товаров, накладные расходы и прибыль, исходя из продажной цены, чем из себестоимости.

Тщательно ведя отчетность по сделкам и отмечая все статьи накладных расходов, торгующая организация будет в состоянии стандартизировать свои издержки и определить, какой процент продажной цены могут составлять накладные расходы, чтобы получить предполагаемую прибыль. В этом случае все расчеты ведутся, исходя из продажной стоимости, а не из валовой себестоимости.

Пример 1. Торговец уплачивает C руб. за некоторый предмет плюс F руб. за перевозку его. Накладные расходы по продаже определены в $r\%$ от продажной цены, а прибыль в $p\%$ от нее же. Имеем:

Себестоимость $= C + F$.

Пусть x — продажная цена.

Тогда накладные расходы плюс прибыль равны

$$\frac{r}{100}\cdot x + \frac{p}{100}x.$$

(Продажная цена) — (накладные расходы + прибыль) = себестоимость.

Отсюда

$$x - \left(\frac{r}{100}\cdot x + \frac{p}{100}x\right) = C + F$$

$$x - \frac{r}{100}x - \frac{p}{100}x = C + F$$

$$x = \frac{C+F}{1 - \frac{1}{100}(r+p)}.$$

Пример 2. Кооператив назначил за 1 *кг* яблок первого сорта на 10 коп. больше, чем за килограмм второго сорта, а за килограмм второго сорта на 15 коп. дороже, чем за третий сорт.

После сортировки партии яблок в 10 *кг*, обошедшихся в 15 руб., кооператив выяснил, что получилось 5, 3 и 2 *кг* соответственно первого, второго и третьего сорта.

Какую цену должен кооператив назначить за килограмм каждого сорта, чтобы сохранить указанную разницу в ценах на отдельные сорта и получить при этом прибыль в 5 руб. на всю партию яблок.

I. Цена 1 *кг* второго сорта = цене 1 *кг* третьего сорта + 15 копеек.

II. Цена 1 *кг* первого сорта = цене 1 *кг* второго сорта + 10 копеек.

III. Общая продажная стоимость = 20 руб.

Пусть x — число копеек за 1 *кг* третьего сорта.

Тогда число копеек за 1 *кг* второго сорта равно

$$x+15$$

и число копеек за 1 *кг* первого сорта равно

$$x+25.$$

Отсюда:

$$5(x+25)+3(x+15)+2x=2000.$$

Решая это уравнение, имеем:
цена за 1 *кг* третьего сорта:

$$x=1 \text{ р. } 83 \text{ к.};$$

цена за 1 *кг* второго сорта:

$$x+15=1 \text{ р. } 98 \text{ к.};$$

цена за 1 *кг* первого сорта:

$$x+25=2 \text{ р. } 08 \text{ к.}$$

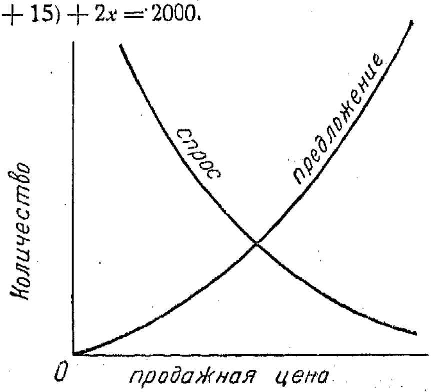


Рис. 11

144. Диаграмма предложения и спроса. Кривая предложения показывает, как увеличивается предложение с увеличением цен (рис. 11).

Кривая спроса показывает количество товаров, которое может быть продано при той или иной цене.

На диаграмме имеется точка, где предложение равняется спросу.

Эта точка указывает экономически целесообразную продажную цену.

Глава V.

УРАВНЕНИЯ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ ИЛИ ЛИНЕЙНЫЕ. АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЯ

145. Общее уравнение $Ax+By+C=0$. Любое линейное соотношение между двумя переменными x и y может быть написано в виде такого равенства:

[2] $$Ax+By+C=0.$$

Уравнение $y=mx+b$ может быть получено из общей формы при условии, что $B\neq 0$. Таким образом

$$By=-Ax-C,$$

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

Здесь $\left(-\frac{A}{B}\right)$ есть наклон, а $\left(-\frac{C}{B}\right)$ отрезок на оси Y, Всякое уравнение вида $Ax+By+C=0$ дает в прямоугольных координатах график, представляющий собою прямую линию.

Если $B=0$, прямая параллельна оси Y.

Если $A=0$, прямая параллельна оси X.

Если $C=0$, прямая проходит через начало координат. Если уравнение умножено на постоянную k, т. е.

$$k(Ax+By+C)=0,$$

график этого уравнения одинаков с графиком уравнения

$$Ax+By+C=0.$$

146. Задачи, приводящиеся к уравнению, содержащему $\frac{1}{x}$.

Рассмотрим следующий пример:

Пример. A может выкопать канаву в 8 дней. B может сделать то же самое в 10 дней. Сколько дней потребуется им для выкапывания канавы, если они будут работать вместе?

Пусть x — число дней, необходимых для совместной работы (искомое). Тогда $\frac{1}{x}$ — часть работы, выполняемая обоими рабочими за 1 день,

$\frac{1}{8}$ — часть работы, которую A может выполнить за 1 день,

$\frac{1}{10}$ — часть работы, которую B может выполнить за 1 день, следовательно

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{8}+\frac{1}{10}=\frac{9}{40}.$$

Отсюда потребное число дней:

$$x=\frac{40}{9}=4\frac{4}{9}.$$

147. Графическое решение задачи (n^0 146). Будем откладывать время в днях на координатной бумаге, имеющей, предположим, 20 делений в дюйме, считая, что каждое деление, отложенное в виде абсциссы, представляет собою один рабочий день (рис. 12). На оси Y возьмем какую-либо ординату и примем ее за величину всей работы.

Так как A может выполнить всю работу в 8 дней, находим точку C, имеющую ординату, равную всей работе, и абсциссу, равную 8, т. е. числу дней, нужных ему для выполнения указанной работы. Наклон прямой OC в этом случае представляет собою скорость выполнения работы A. Ординаты для каждого дня выражают количество работы, которое он мог выполнить в соответствующее число дней.

Так как B может выполнить данную работу в 10 дней, то OJ есть график его производительности.

Величину работы, которую они выполнят в любое число дней, работая вместе, можно получить при помощи простого сложения ординат. Итак работа, производимая A за 8 дней, выражается отрезком CE, а работа, производимая B, — отрезком DE. Откладывая при помощи циркуля отрезок CF, равный DE, получаем

$$EF = EC + ED.$$

Это равенство означает, что отрезок EF выражает работу, которую A и B произведут вместе за 8 дней. Поэтому прямая OF показывает, как производится работа при совместном участии в ней A и B.

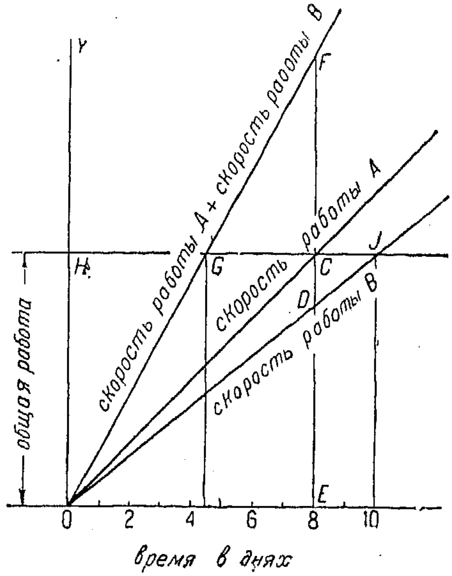


Рис. 12.

Так как наша задача состоит в том, чтобы найти, какое время потребуется для выполнения указанной работы при одновременном участии в ней рабочих A и B, то мы найдем, что абсцисса, соответствующая полной работе, равняется $4\frac{4}{9}$ дня.

При задачах, аналогичных разобранной, необходимо помнить, что скорость есть наклон линии, т. е. отношение ординаты к абсциссе. Обыкновенно этот наклон дается непосредственно в задаче.

148. Задача. A и B могут выкопать канаву в 10 дней; B и C могут выполнить ту же работу в 6 дней, а A и C — в $7\frac{1}{2}$ дней. В какое время может произвести эту работу каждый из рабочих в отдельности?

Так как A и B в 1 день могут выкопать $\frac{1}{10}$ канавы, B и C за 1 день — $\frac{1}{6}$, A и C за 1 день — $\frac{2}{15}$ ее, то сумма $\frac{1}{10}+\frac{1}{6}+\frac{2}{15}$ в два раза больше той работы, которая была бы выполнена рабочими A, B и C за 1 день, так как в написанной сумме заключается удвоенная работа каждого рабочего за один день.

Если через x обозначить время, нужное для выкапывания канавы при одновременной работе всех трех рабочих, то $\frac{1}{x}$ — часть канавы, которую, работая совместно, они выкопают за 1 день.

Отсюда

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{6}+\frac{2}{15}=\frac{12}{30}=\frac{2}{x};$$

следовательно

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{5},$$

т. е. $A+B+C$ выполнят за 1 день $\frac{1}{5}$ всей работы, $A+B$ за один день выполнят $\frac{1}{10}$ ее. Другими словами

$$\begin{aligned} A+B+C&=\frac{1}{5} \\ A+B&=\frac{1}{10} \\ \hline C&=\frac{1}{10}, \end{aligned}$$

т. е. для выполнения всей работы рабочему C нужно 10 дней $\left(\frac{1}{10}\right.$ всей $\left.\text{работы}\right)$. Таким же образом

$$\begin{aligned} A+B+C&=\frac{1}{5} \\ B+C&=\frac{1}{6} \\ \hline A&=\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{30} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A+B+C&=\frac{1}{5} \\ A+C&=\frac{2}{15} \\ \hline B&=\frac{1}{5}-\frac{2}{15}=\frac{1}{15}. \end{aligned}$$

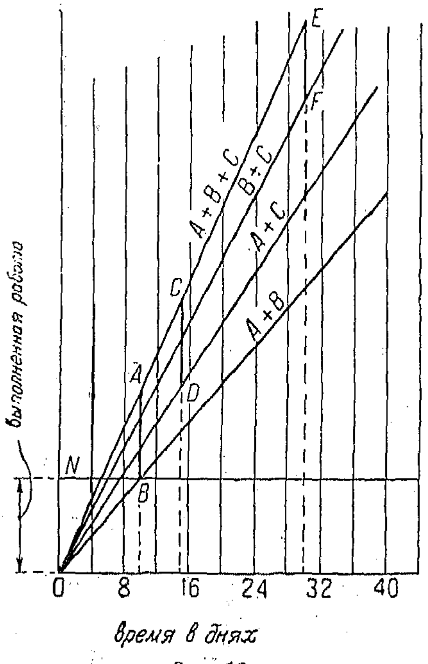


Рис. 13.

Таким образом для выполнения всей работы для A нужно 30, а для B 15 дней.

Сложим ординаты $B+C$, $A+C$ и $A+B$, соответствующие какой-либо абсциссе, например равной 8 дням, и примем половину полученной суммы за ординату графика общей работы $A+B+C$, соответствующую 8 дням (рис. 13). Проведем прямую $A+B+C$ через вершину найденной ординаты и начало координат, а затем отложим отрезки AB, CD и EF, равные ON, отметим точки A, C, E, абсциссы которых 10, 15 и 30 указывают число дней работы A, B и C.

149. Графическое решение задач на сложение функций.

Пример. В пустой бак впускается через кран вода со скоростью 2 *л/мин.* Спустя 10 мин. после начала впуска воды через первый кран, открывают второй, который пропускает в минуту 3 *л*, а спустя еще 5 мин. открывают третий кран, через который вода протекает со скоростью 5 *л/мин.* По истечении 5 мин. после пуска третьего крана открывают выпускное отверстие и за 15 мин. опоражнивают бак, хотя при опоражнивании вода продолжает поступать в бак из всех трех кранов.

Требуется начертить график, выражающий количество воды в баке в любой момент, а также найти среднюю скорость опоражнивания бака и скорость вытекания воды через выпускное отверстие.

Увеличение количества воды в баке, происходящее благодаря действию кранов, так же как и уменьшение его из-за выпускания воды через выпускное отверстие, происходит с постоянной скоростью. Поэтому указанные увеличение и уменьшение количеств воды выражаются линейными графиками.

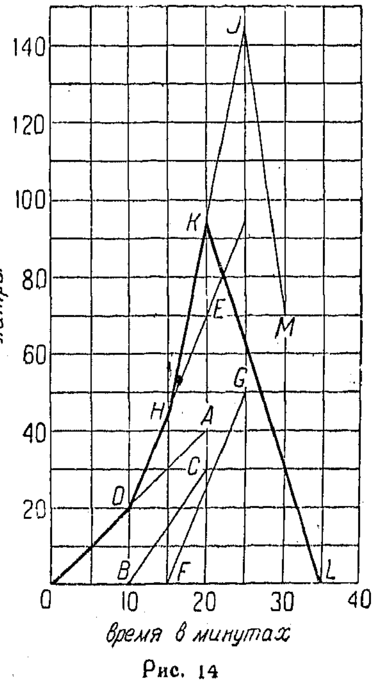


Рис. 14

Первый кран открывается в момент времени $t = 0$, когда количество воды в баке также равно 0. Приток воды за 20 минут действия одного первого крана составляет 40 *л*. График OA (рис. 14) выражает указанное поступление воды только через один первый кран.

Второй кран открывают в момент времени $t = 10$, и за 10 мин. своего действия он впускает в бак 30 *л* воды. Прямая BC есть график притока воды в бак при действии одного второго крана.

Спустя 10 мин. после открывания первого крана, кроме него начинает действовать еще и второй; поэтому количество воды в баке при одновременном действии обоих кранов выражается графиком DE. Последний получается при помощи сложения соответствующих ординат (графика BC и графика OA) для одних и тех же абсцисс. В момент времени $t = 15$ открывают третий кран, который за 10 мин. своего действия впустит в бак 50 *л* воды. Прямая FG является графиком притока воды через один третий кран. Если ординату этого графика прибавить к сумме ординат, указанных выше, график HJ будет представлять собою суммарный график общего количества воды, находящейся в баке при одновременном действии всех трех кранов.

В момент времени $t=20$ открывают выпускное отверстие, а в момент $t=35$ бак пуст. Прямая линия KL выражает количество воды в баке во время опоражнивания его; эта линия имеет отрицательный наклон, равный $6\frac{1}{3}$ *л/мин*. Скорость вытекания воды через выпускное отверстие выражается наклоном прямой JM, равным $16\frac{1}{3}$ *л/мин* $\left(81\frac{2}{3}\text{ л в 5 мин.}\right)$.

Полный график представляется ломаной линией $ODHKL$, и ординаты различных точек его указывают число литров воды в баке в любой момент времени

150. Система уравнений первой степени с двумя неизвестными. В этом случае одна из неизвестных величин может быть исключена посредством сложения или вычитания. В случае необходимости, уравнение умножают на некоторое число, которое делает равными коэффициенты у подлежащего исключению неизвестного.

151. Исключение неизвестных сравнением. Приводим уравнения данной системы к виду

$$x=a-y$$
$$x=b+y,$$

отсюда

$$a-y=b+y, \text{ или } 2y=a-b;$$

так как каждое из выражений $a-y$ и $b+y$ равно одной и той же величине x, то они равны друг другу.

152. Исключение неизвестных подстановкой. Пусть дано:

$$a_1x+b_1y=c_1 \qquad (1)$$
$$a_2x+b_2y=c_2. \qquad (2)$$

Из уравнения (2)

$$x=\frac{c_2-b_2y}{a_2}.$$

Подставляя в уравнение (1), получаем:

$$\frac{a_1(c_2-b_2y)}{a_2}+b_1y=c_1.$$

Освобождаясь от дроби, получаем

$$a_1c_2-a_1b_2y+a_2b_1y=a_2c_1$$

или

$$y(a_2b_1-a_1b_2)=a_2c_1-a_1c_2$$

$$y=\frac{a_2c_1-a_1c_2}{a_2b_1-a_1b_2};$$

это выражение не содержит x.

Пример.

$$3x+2y=27$$
$$x-y=4.$$

Из (2) $x=y+4$ и $3x=3y+12$.
Подставляя в (1), получим:

$$3y+2y+12=27,$$
$$5y=15.$$

Следовательно

$$y=3.$$

Подставив в (1), получим

$$x-3=4 \text{ или } x=7.$$

Все три только что изложенных метода исключения неизвестных, т. е. сложение (или вычитание), сравнение и подстановка, приводят к одному и тому же ответу.

153. Уравнения вида $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=c$ можно легко решить, рассматривая $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$ как неизвестные величины.

Пример.

$$\frac{4}{x}-\frac{3}{y}=\frac{14}{5} \qquad (1)$$
$$\frac{4}{x}+\frac{10}{y}=\frac{50}{3}. \qquad (2)$$

Вычитая (1) из (2), получаем

$$\frac{13}{y}=\frac{208}{15}.$$

Следовательно

$$\frac{1}{y}=\frac{16}{15} \text{ или } y=\frac{15}{16}. \qquad (3)$$

Подставляя (3) в (1), получим:

$$\frac{4}{x}-\frac{48}{15}=\frac{14}{5}; \qquad \frac{1}{x}=\frac{3}{2}; \qquad x=\frac{2}{3}.$$

154. *Пример.*

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y+1}=5$$
$$\frac{2}{x-1}+\frac{3}{y+1}=12.$$

Рассматриваем выражения $\frac{1}{x-1}$ и $\frac{1}{y+1}$ как новые неизвестные.

Тогда

$$2\left(\frac{1}{x-1}\right)+2\left(\frac{1}{y+1}\right)=10 \qquad (1)$$

$$2\left(\frac{1}{x-1}\right)+3\left(\frac{1}{y+1}\right)=12. \qquad (2)$$

Вычитая (1) из (2), получаем:

$$\frac{1}{y+1}=2, \qquad (3)$$

откуда

$$y+1=\frac{1}{2}, \qquad y=-\frac{1}{2}.$$

Подставляя (3) в (1), получим:

$$\frac{1}{x-1}+2=5.$$

Следовательно

$$\frac{1}{x-1}=3,$$

откуда

$$x-1=\frac{1}{3} \text{ или } x=1\frac{1}{3}.$$

155. Решить уравнения

$$ax+by=m \qquad (1)$$

$$cx+dy=n. \qquad (2)$$

$$(1)\times d=adx+bdy=dm \qquad (3)$$

$$(2)\times b=bcx+bdy=bn. \qquad (4)$$

$$(3)-(4)=(ad-bc)x=dm-bn.$$

Следовательно

$$x=\frac{dm-bn}{ad-bc}.$$

Таким же образом имеем

$$y=\frac{an-cm}{ad-bc}.$$

Дальнейший ход рассуждений изложен в n⁰ 167.

156. Графики уравнений первой степени с двумя неизвестными, входящих в систему, являются прямыми линиями. Быстрый способ решения системы таких уравнений состоит в следующем: на миллиметровую бумагу наносят графики указанных уравнений, причем пересечение их определяет значения x и y, удовлетворяющие обоим уравнениям (рис. 15). Другой способ, употреблемый для решения системы, заключается в составлении определителей, см. главу XVIII (n⁰ 467).

157. Графическое изображение системы линейных уравнений вида $y=6-x$ и $y=4-x$ (рис. 16). Значения y в обоих уравнениях, взятые для всякой величины x, отличаются друг от друга на 2, и поэтому график одного уравнения отстоит от графика другого на 2 единицы по вертикали. В алгебраическом смысле это означает следующее: эти уравне-

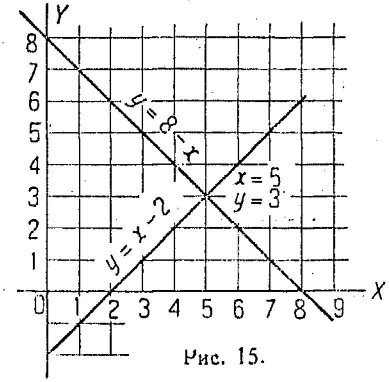


Рис. 15.

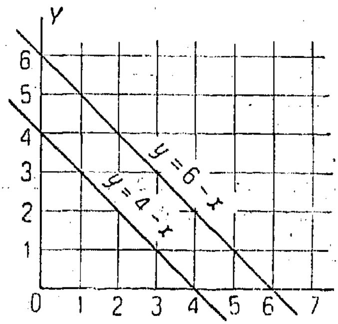


Рис. 16.

ния не имеют общего решения, т. е. нет таких значений x и y, которые удовлетворяют обоим уравнениям, так как графики их не пересекаются.

158. Задачи, приводящиеся к уравнениям, содержащим $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$.

Пример. A и B вместе могут выполнить данную работу в 12 дней. После того как A, работая один, выполнил в течение 5 дней часть указанной работы, B ее закончил, проработав 26 дней. В какое время может каждый в отдельности выполнить всю работу?

Пусть x — число дней, нужных A для выполнения всей работы;
y — число дней, нужных B для этой цели.

Тогда

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ — та часть всей работы, которую они вместе сделают за 1 день.

Или

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}$ всего времени, нужного для совместного выполнения всей работы;

$\frac{5}{x}$ — часть всей работы, выполненная одним A за 5 дней;

$\frac{26}{y}$ — часть всей работы, выполненная одним B за 26 дней.

Тогда

$$\frac{5}{x}+\frac{26}{y}=1 \text{ или всей работе,}$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12},$$

откуда

$$x=18, \text{ а } y=36 \text{ дней.}$$

159. Общий случай задач n° 158. A и B вместе могут выполнить данную работу в a дней; если же A один сначала проработает m дней, то B, работая один, сможет закончить оставшуюся часть работы за n дней. За сколько дней сможет выполнить указанную работу каждый рабочий в отдельности?

Пусть x — число дней, нужных A для выполнения всей работы, y — число дней, нужных B для этой же цели.

Следовательно

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a}. \tag{1}$$

Так же, как и выше,

$$\frac{m}{x}+\frac{n}{y}=1. \tag{2}$$

Умножая (1) на n, получаем

$$\frac{n}{x}+\frac{n}{y}=\frac{n}{a}. \tag{3}$$

Вычитая (3) из (2), имеем:

$$\frac{m-n}{x}=1-\frac{n}{a}=\frac{a-n}{a}.$$

$$x=\frac{a(m-n)}{a-n}.$$

Умножая (1) на m, получаем

$$\frac{m}{x}+\frac{m}{y}=\frac{m}{a}. \tag{4}$$

Вычитая (2) из (4), имеем

$$\frac{m-n}{y}=\frac{m}{a}-1=\frac{m-a}{a}$$

$$y=\frac{a(m-n)}{m-a}.$$

Полученные выражения для x и y упрощают задачу и приводят решение ее к подстановке в формулы надлежащих величин, что быстро дает искомый ответ.

160. Другая форма уравнения n⁰ 159.

Пример.

$$\frac{xy}{x+y}=\frac{1}{5};\qquad \frac{yz}{y+z}=\frac{1}{6};\qquad \frac{xz}{z+x}=\frac{1}{7}.$$

Если

$$\frac{xy}{x+y}=\frac{1}{5},$$

то

$$\frac{x+y}{xy}=5,$$

откуда

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=5$$

и т. д.

Другими словами, разделяем x и y и продолжаем решение как обычно.

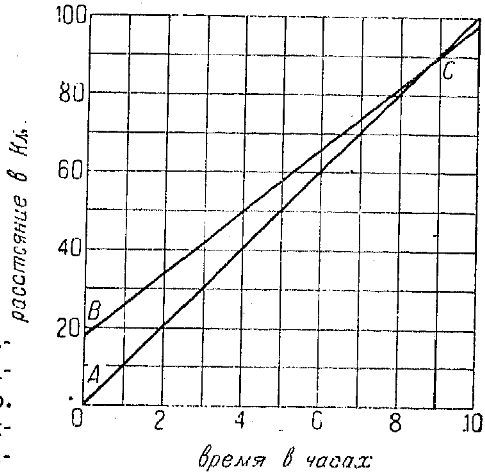


Рис. 17.

161. Задача (графическое решение). Извозчик, едущий со скоростью 10 *км/час*, заметил в 18 *км* впереди себя экипаж, движущийся в том же направлении со скоростью 8 *км/час*. Какой путь проедет извозчик, прежде чем он нагонит экипаж?

Проведем прямую AC с наклоном, соответствующим скорости в 100 *км*, пройденных за 10 часов, и прямую BC с наклоном, соответствующим скорости в 80 *км* за те же 10 часов (рис. 17).

Отрезок AB, изображающий начальное расстояние экипажей, должен быть равен 18.

Точка пересечения C обеих прямых определяет искомое расстояние, пройденное извозчиком, т. е. 90 *км*, и затраченное время, равное 9 часам.

162. Задача (графическое решение).

Положим, что два города находятся на расстоянии 50 *км* друг от друга. A отправился из первого города в 6 час. утра и прибыл во второй в 12 час. дня, сделав во время пути четыре остановки, по полчаса каждая, на 10, 20, 30 и 40 *км* от места отправления.

B отправился из второго города в 7 час. утра; проехав за один час 20 *км*, он повернул обратно и в течение часа двигался к месту своего отправления со скоростью 10 *км* в час; затем он повернул опять и стал двигаться в первоначальном направлении с такой скоростью, какая была у *A* при его встрече с *B*; они встретились в момент начала движения *A* после его третьей остановки. Продолжая двигаться с этой же скоростью, *B* в 10 час. 30 мин. встретил третьего

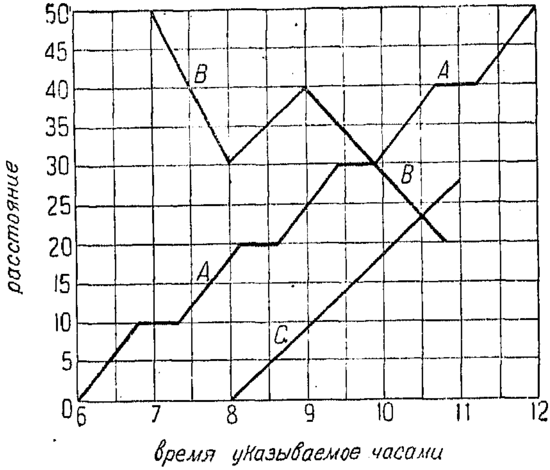


Рис. 18.

человека *C*, выехавшего из первого города на 2 часа позднее, чем *A*, и двигавшегося с постоянной скоростью. Какова была скорость движения *C* и где его встретил *B*?

Алгебраическое решение этой задачи несколько затруднительно, а графическое является более простым и непосредственным.

Решение. Если бы *A* двигался без остановок, он прибыл бы во второй город в 10 час. утра, так как все его остановки, вместе взятые, составляли 2 часа, а прибыл он в 12 час. дня. Поэтому

$$\frac{50 = \text{пройденный путь}}{4 = \text{затраченное на движение время}} = \text{скорость или наклон графика.}$$

Полный график движения *A*, включая получасовые остановки, показан на рис. 18. Графики движений *B* и *C* могут быть легко получены, причем из них видно, что встреча B и C произойдет приблизительно на 23 *км* от места отправления C (первый город). Наклон графика C приблизительно равняется $9^1/_5$, это указывает, что C двигался со скоростью $9^1/_5$ *км/час*. Для получения точных результатов исследования необходимо, конечно, иметь диаграмму, вычерченную в большем масштабе, чем это сделано на рис. 18.

Примечание. В виде абсцисс вместо числа часов можно наносить время дня, так как и тот и другой способы изображения времени дают одинаковые результаты.

163. Задача (графическое решение). Два человека отправляются пешком вокруг острова. Первый идет со скоростью 5 *км/час*; скорость второго такова, что он обходит остров, длина береговой линии которого равна 10 *км*, за $3^1/_2$ часа. В какие моменты, считая от времени отправления, первый человек будет обгонять второго?

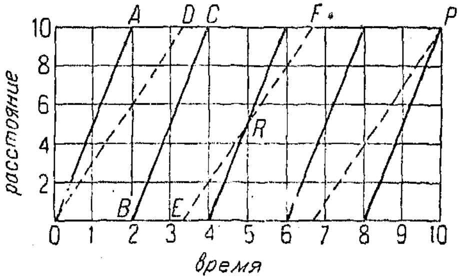


Рис. 19.

На рис. 19 OA, BC и т. д. выражают последовательно повторяющиеся обходы острова первым человеком. Когда он начинает второй обход, показанный прямою BC, расстояние его от начальной точки равно 0, и график начинается с точки B, имеющей ту же абсциссу, что и точка A, так как движение происходит равномерно и без перерывов. Линии OD, EF и т. д. представляют собою графики, выражающие продвижение второго человека.

Точки пересечения графиков, K и P, дают время и пункты, где один идущий обгоняет другого. Из диаграммы видно, что в первый раз это произойдет на расстоянии 5 *км* от исходной точки спустя 5 час., а во второй раз спустя 10 час. после начала движения. На этом основании можно сказать, что второй человек обойдет 3 раза вокруг острова, в то время как первый—5 раз.

Заметим также, что первый человек сделал два с половиной обхода вокруг острова, прежде чем он обогнал второго в первый раз; к этому моменту второй обошел остров лишь полтора раза.

Из предыдущих примеров следует, что графический способ более нагляден и при употреблении большого масштаба обыкновенно дает точные результаты.

164. Задача о часах. Два тела движутся при некоторых определенных условиях с разными скоростями. Обыкновенный пример такого движения представляет собою движение стрелок часов.

Пример. В какой момент времени между 5 и 6 часами совпадут стрелки часов?

Считая от момента 5 час., положим, что x выражает число минут, пройденных минутной стрелкой до момента совпадения ее с часовой стрелкой.

За тот же самый промежуток времени, x часовая стрелка (она движется в 12 раз медленнее минутной) проходит $^1/_{12}$ числа минут, пройденных секундной стрелкой.

Так как в момент 5 час. расстояние между стрелками составляет 25 минутных делений, то

$$x = 25 + \frac{x}{12}, \quad \text{или} \quad x - \frac{x}{12} = 25,$$

откуда $x = 27\frac{3}{11}$ — число минут после 5 час., когда совпадают стрелки.

165. Графическое решение задач о часах. Выражая движение стрелок часов графически, получаем простые решения задач, аналогичных изложенной в n⁰ 164.

На рис. 20 показаны графики, выражающие движение стрелок в продолжение 12 час. На оси ординат отложены деления циферблата, т. е. пути концов стрелок, на оси же абсцисс нанесено время. Часовая стрелка за 12 час. делает один оборот, выражаемый длинной диагональю. За то же самое время минутная стрелка совершает 12 оборотов, представляемых 12-ю короткими диагональными прямыми. Построение этого графика и объяснение его такие же, как и для графика задачи n⁰ 163. В разбираемой в настоящем n⁰ задаче точки пересечения графиков также показывают время и пункты совпадения движущихся тел. Таким образом, из диаграммы видно, что обе стрелки совпадают в 12 час. дня, затем спустя не-

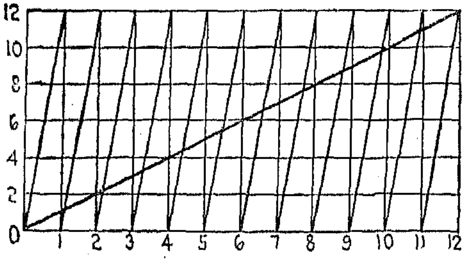


Рис. 20.

большой промежуток времени после 1 часу дня, после 2 час. и т. д. Возьмем часть нашей диаграммы, соответствующую 1 часу, и увеличим ее масштаб (рис. 21).

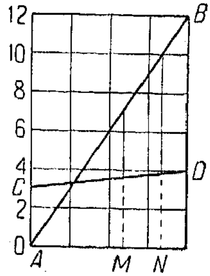


Рис. 21.

Стрелки образуют между собою прямой угол в момент времени — 3 часа. Если мы хотим знать, когда стрелки опять образуют прямой угол, нужно на диаграмме найти следующий момент, в который разности расстояний графиков друг от друга по вертикали будут соответствовать 15-минутным делениям, ибо при этом расстоянии друг от друга концов стрелки они пересекаются под прямым углом. На диаграмме прямая AB — график движения минутной стрелки в течение 1 часа, а CD — график часовой стрелки за то же время. Таким образом, когда разность ординат наших графиков равняется вертикальному отрезку, выражающему 15 мин., как например в точке M, стрелки образуют прямой угол в момент времени, указываемый точкой M. Подобно изложенному, если мы желаем знать, когда стрелки направлены прямо противоположно друг другу, следует найти на диаграмме такие точки, для которых разность ординат равна вертикальному отрезку, выражающему 30 мин., т. е. $^1/_2$ часа. Эти точки соответствуют точке N, указывающей момент времени, когда стрелки принимают прямо противоположное друг другу положение.

166. Задача о чистой прибыли. Чистая прибыль может быть определена при помощи графика системы двух уравнений; одно из этих уравнений выражает общую себестоимость, а другое — общую продажную стоимость.

Пример. Стоимость необходимого оборудования и его установки до начала эксплоатации составляет 300 руб. Стоимость материала и рабочих рук, приходящихся на одно изделие, составляет 60 коп.; одно изделие продается за 1,25 руб.

Уравнение себестоимости

$$C = 300 + 0{,}60 \cdot n,$$

где n — число выработанных изделий.

Уравнение продажной стоимости

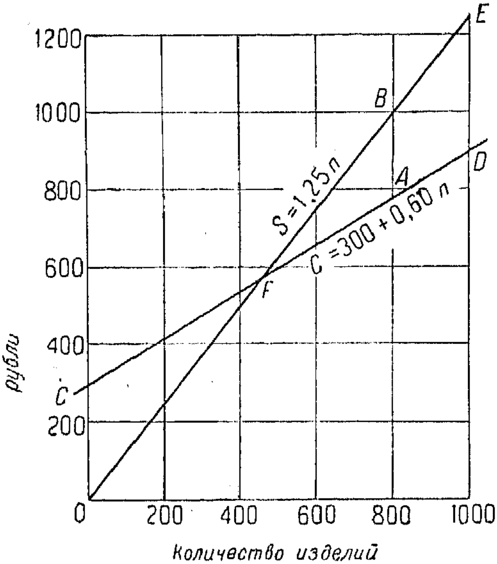
$$S = n \times 1{,}25 = 1{,}25\ n.$$

Если $n = 800$, то $C = 780$, а $S = 1000$, как это видно из точек A и B на диаграмме.

$$AB = \text{чистая прибыль} = 1000 - 780 = 220.$$

При $n=1000$, точка D дает $C=900$, а точка E дает $S=1250$.

В точке F продажная стоимость равна себестоимости при $n=461$ (рис. 22).



ис. 22.

167. Система уравнений. Общая форма.

Пусть

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

являются системой двух уравнений, в которых ни одна из постоянных не равна нулю.

Исключая y, получаем

$$(a_1b_2-a_2b_1)x = \\ = c_1b_2-c_2b_1.$$

Исключая же x, имеем

$$(a_1b_2-a_2b_1)y = \\ = c_1a_2-c_2a_1.$$

Если $(a_1b_2-a_2b_1)\neq 0$, то

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \text{ а } y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

Если $a_1b_2-a_2b_1=0$, т. е. $\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}$, — мы не можем применить указанный выше способ решения.

Положив $k=\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}$, получаем

$$a_2=ka_1,$$
$$b_2=kb_1.$$

Тогда первоначальные уравнения получают следующий вид:

$$a_1x+b_1y=c_1$$
$$ka_1x+kb_1y=c_2.$$

Эти уравнения выражают либо одну и ту же прямую, либо две параллельные.

Если $c_2 = kc_1$, уравнения имеют бесконечное число решений.

Если $c_2 \neq kc_1$, уравнения невозможны и не удовлетворяются никакими значениями x и y.

168. Уравнения со многими неизвестными. Способ, употребляемый для решения системы двух уравнений с двумя неизвестными, может быть также применен и для решения системы трех или более уравнений с числом неизвестных, равным числу независимых уравнений. При этом рекомендуется следующий порядок действий: нужно продолжать исключение одного и того же неизвестного в данных уравнениях до тех пор, пока не получится система с числом уравнений и числом неизвестных на единицу меньшим, чем первоначальная. Таким же образом из полученной системы следует исключить вторую неизвестную. Эти действия надо продолжать до тех пор, пока не останется система двух уравнений с двумя неизвестными; последняя же может быть легко решена. Остальные неизвестные можно найти посредством подстановки в уравнения значений найденных неизвестных или производя исключение в том же порядке, как и ранее, но уже других неизвестных.

Пример.

$$7x + 3y - 2z = 16 \tag{1}$$

$$5x - y + 5z = 31 \tag{2}$$

$$2x + 5y + 3z = 39. \tag{3}$$

Умножая все члены ур-ния (2) на три и складывая с (1), имеем

$$22x + 13z = 109. \tag{4}$$

Умножая все члены ур-ния (2) на 5 и складывая с (3), получим

$$27x + 28z = 194. \tag{5}$$

Решая совместно (4) и (5), находим

$$x = 2,\ z = 5.$$

Подставляя полученные значения неизвестных в (1), получим

$$y = 4.$$

Легко убедиться в том, что значения $x = 2$, $y = 4$, $z = 5$ удовлетворяют ур-ниям (1), (2) и (3).

Глава VI.

УРАВНЕНИЯ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ (КВАДРАТНЫЕ). ЯВНЫЕ ФУНКЦИИ. АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЯ.

169. Квадратная функция x^2. Простейшее квадратное уравнение имеет вид: $y = x^2$. Его график есть непрерывная кривая, расположенная всеми своими точками над осью X симметрично относительно оси Y и проходящая через начало координат, через точку $(1, 1)$ и $(-1, -1)$; кривая эта известна под названием параболы (рис. 23).

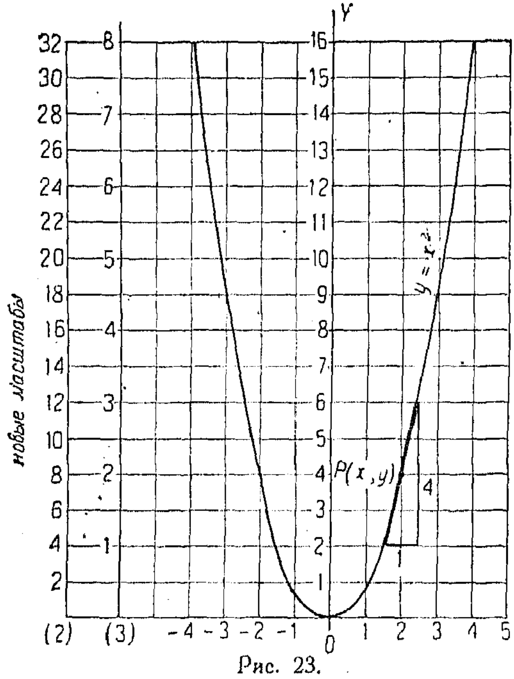


Рис. 23.

Прямая линия, проходящая через некоторую точку P_1 (x_1, y_1), лежащую на данной кривой, и имеющая наклон $2x_1$, есть касательная к кривой в этой точке. Скорость изменения функции по отношению к независимой переменной в любой точке (x_1, y_1) нашей кривой равняется $2x_1$, т. е., если $x_1 = 2$, наклон касательной равен 4.

Эти указания даются пока без доказательства. Они могут применяться в целях облегчения вычерчивания графиков. Доказательство изложенного будет приведено ниже (n⁰ 896).

При вычерчивании графиков рекомендуется брать отрезок в 1 *см* для изображения единицы в том случае, когда клетчатая бумага разлинована в метрической системе.

170. График функции ax^2. На рис. 24 для сравнения между собою показаны графики функций

$$y = 2x^2, \qquad (1)$$

$$y = x^2, \tag{2}$$

$$y = \frac{x^2}{2}. \tag{3}$$

Заметим, что для данного значения x ординаты (1) в два раза больше соответствующих ординат (2) и что соответствующие ординаты (3) составляют лишь половину ординат (2).

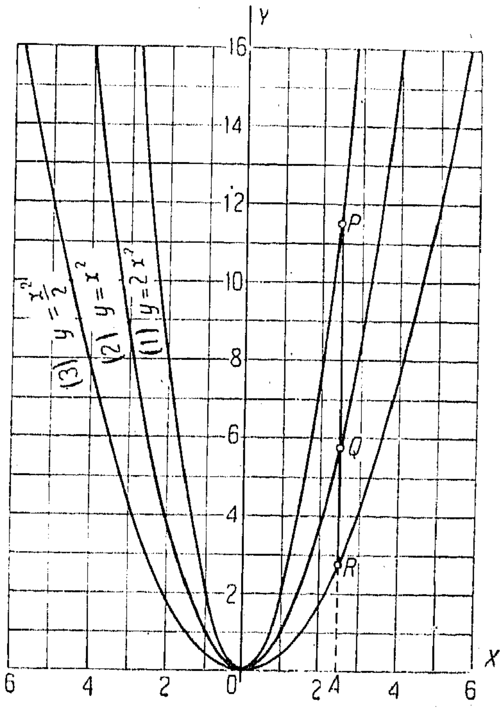


Рис. 24.

Таким же образом, ординаты двух кривых

$$y = x^2 \text{ и } y = ax^2$$

находятся в отношении $1:a$, где a—некоторое положительное число.

Взяв кривую функции x^2 и приняв соответствующие масштабы для ординат, мы получим графики функций $2x^2$ и $\frac{1}{2}x^2$ в виде кривых, совпадающих с кривой x^2. Изображенная на рис. 23 кривая представляет собою геометрическое место точек выражений x^2, $2x^2$ и $\frac{1}{2}x^2$ в зависимости от принятого масштаба ординат.

Полагая, что график x^2 вычерчен в масштабе ординат (1), мы можем принять его за график $2x^2$, пересчитав ординаты соответственно масштабу (2). Также можно считать, что указанный график x^2 выражает $\frac{1}{2}x^2$, употребляя для пересчета ординат масштаб (3). Изменяя масштаб ординат, мы можем также произвести обратное действие и график $y = 2x^2$ привести к графику $y = x^2$.

171. Функция второй степени в общем виде $y = ax^2 + bx + c$. Имеем график функции $y = ax^2$ с началом координат в точке O; исследуем, как изменится равенство $y = ax^2$, если начало координат переносится в некоторую другую точку O_1; рассмотрим также получающееся при этом уравнение нашей кривой, отнесенной к новым осям (рис. 25). Из рисунка следует, что

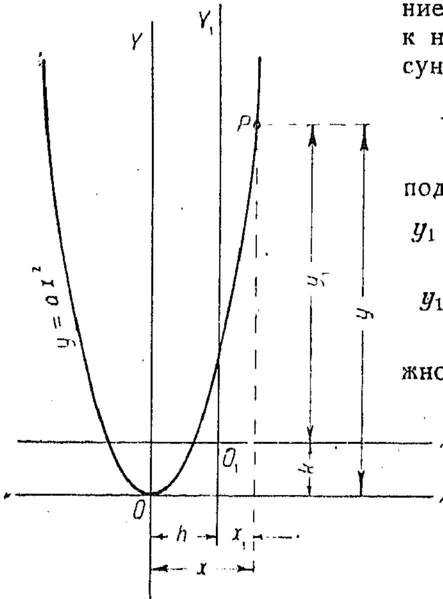


Рис. 25.

$$x = x_1 + h, \text{ а } y = y_1 + k.$$

Если эти выражения x и y подставить в $y = ax^2$, то

$$y_1 + k = a(x_1 + h)^2 = ax_1^2 + 2ahx_1 + ah^2.$$

$$y_1 = ax_1^2 + 2ahx_1 + ah^2 - k.$$

Последнее выражение можно написать в форме:

$$y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c,$$

или, отбрасывая значки,

[3] $$y = ax^2 + bx + c.$$

Это выражение является общей формой функции второй степени от одного неизвестного.

Весьма важно запомнить, что указанный общий вид формы выражает то же самое геометрическое место точек, что и уравнение $y = ax^2$, отнесенное лишь к другим осям. График обеих функций есть всегда парабола, выражающая собою любую квадратную функцию от одного неизвестного.

172. Преобразование координат. В предыдущем n⁰ 171 график $y = ax^2$ был преобразован в выражение $y_1 = ax_1^2 + 2ahx_1 + ah^2 - k$ посредством подстановки $x_1 + h$ вместо x_1 и $y_1 + k$ вместо y. Сравнивая $y_1 = ax_1^2 + 2ahx_1 + ah^2 - k$ с общей формой

$$y = ax^2 + bx + c,$$

получаем

$$a = a \tag{1}$$

$$b = 2ah \tag{2}$$

$$c = ah^2 - k. \tag{3}$$

Из уравнения (2) имеем

[4] $$h = \frac{b}{2a},$$

из (3)

$$k = ah^2 - c = \frac{b^2}{4a} - c,$$

или

[5] $$k = \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Заменяя функцию $y = ax^2$ общим ее видом $y = ax^2 + bx + c$, мы просто переносим начало координат в точку (h, k), где

$$h = \frac{b}{2a}, \text{ а } k = \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Когда мы перенесли начало координат и желаем найти вершину параболы в новой системе, направление отсчета от нового начала к искомой вершине противоположно произведенному переносу координат, и наши формулы (координаты вершины в новой системе) примут вид

$$h = -\frac{b}{2a} \text{ и } k = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

173. Перейдем к изложению весьма важного метода графического решения уравнений вида $x^2 + bx + c = 0$ и $ax^2 + bx + c = 0$. Положим, что мы хотим сначала найти корни уравнения $x^2 + bx + c = 0$. График функции $y = x^2 + bx + c$ дает все соответствующие действительные значения x и $x^2 + bx + c$; среди значений x имеются такие, которые обращают выражение $x^2 + bx + c$ в нуль; они и являются корнями уравнения $x^2 + bx + c = 0$.

Берем наш основной график x^2 (рекомендуем всегда иметь его в запасе) и определяем начало координат посредством выражений для h и k

$$\left(h = \frac{b}{2a},\ k = \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right),$$

а затем проводим оси X и Y. Точки пересечения кривой с осью X определяют корни данного уравнения.

Пример. Найти графически корни уравнения $x^2+12x+32=0$.

$$a=1,\ b=12,\ c=32,$$

$$h=\frac{12}{1\times 2}=6,$$

$$k=\frac{(12)^2-4\times 32}{1\times 4}=4.$$

Поэтому, располагаем O в точке (6,4) и проводим оси X и Y. Ось X пересекает кривую в точках -4 и -8. Последние и являются искомыми корнями (рис. 26).

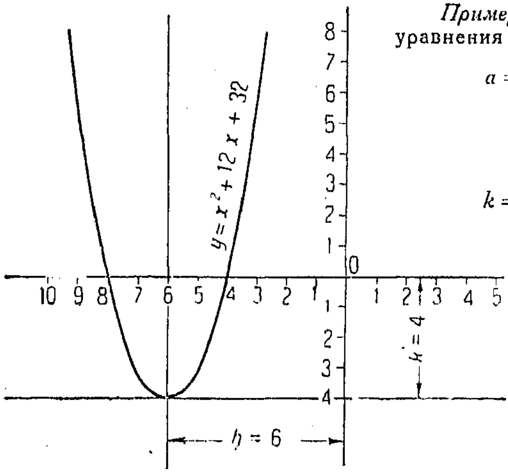


Рис. 26.

Если наше уравнение имеет вид $ax^2+bx+c=0$, т. е. x^2 имеет коэффициент a, мы можем применять график, полученный из графика $y=x^2$ посредством умножения всех ординат его на число a. Проще, однако, пользоваться графиком $y=x^2$, изменив предварительно масштаб ординат.

Начало координат определяется посредством вычисления либо значений h и k в новом масштабе, либо h и $\frac{k}{a}$ в старом.

Пример. Начертим график выражения $y=2x^2-16x+24$.

Здесь $a=2$, $b=-16$, $c=+24$,

$$h=\frac{b}{2a}=\frac{-16}{2\times 2}=-4,$$

$$k=\frac{b^2-4ac}{4a}=\frac{256-4\times 2\times 24}{8}=8.$$

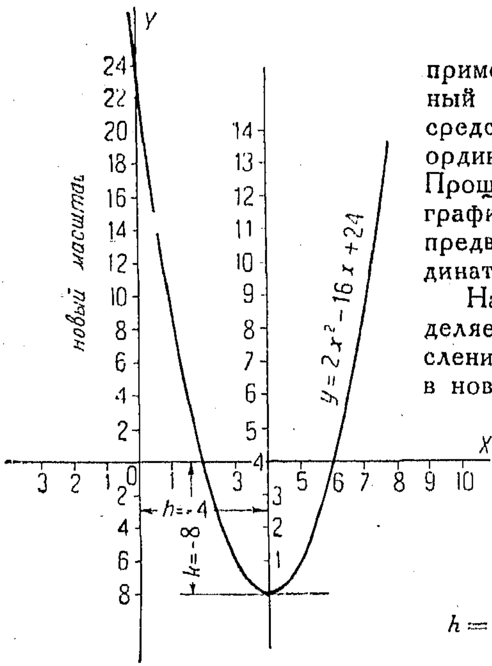


Рис. 27.

Возьмем график $y = x^2$ и умножим числа вертикальной оси на 2, что даст новый масштаб для вертикальной оси. Затем берем точку с координатами $b = -4$ и $k = 8$ (при новом масштабе) и располагаем в ней начало координат. При таком расположении последнего график $y = x^2$ превращается в график $y = 2x^2 - 16x + 24$ (рис. 27).

174. Ниже приводятся в качестве упражнений в определении положения графика и его осей по заданному уравнению следующие примеры:

Пример 1. $x^2 - 8x + 14 = 0$.
Пусть $y = x^2 - 8x + 14$.
Тогда $a = 1$, $b = -8$, $c = 14$.

$$h = -4,\ k = \frac{(-8)^2 - 4 \times 14}{4} = \frac{64 - 56}{4} = 2$$

Производя отсчет от вершины графика, имеем начало координат в точке $(-4, 2)$, т. е. четыре единицы в отрицательном направлении (влево) и две единицы кверху. Корни уравнения $x^2 - 8x + 14 = 0$ приблизительно таковы: $x_1 = 2{,}6$, $x_2 = 5{,}4$.

Пример 2. $x^2 - 8x + 16 = 0$.
Положим $y = x^2 - 8x + 16$.

$$h = \frac{-8}{2} = -4,\ k = \frac{(-8)^2 - 4 \times 16}{4} = 0.$$

Начало координат находится в точке $(-4, 0)$. Корни уравнения: $x_1 = 4$, $x_2 = 4$.

Пример 3. $x^2 - 8x + 18 = 0$.

$$h = -4,\ k = -2.$$

Начало координат лежит в точке $(-4, -2)$, считая вершину графика за точку $(0, 0)$. График данного уравнения не пересекает ось X, и корни поэтому являются мнимыми (см. n⁰ 183). Они находятся аналитическим методом и имеют следующие значения:

$$x_1 = 4 + 1{,}41\sqrt{-1} \text{ и } x_2 = 4 - 1{,}41\sqrt{-1}.$$

Пример 4. $x^2 + 8x + 14 = 0$.

$$h = 4,\ k = 2.$$

Корни таковы: $x_1 = -2{,}6$ и $x_2 = -5{,}4$.

Пример 5. $x^2 + 8x + 16 = 0$.

$$h = 4,\ k = 0.$$

Корни таковы: $x_1 = -4$, $x_2 = -4$.

Пример 6. $x^2 + 8x + 18 = 0$.

$$h = 4,\ k = -2.$$

Корни данного уравнения мнимые и имеют следующие значения:

$$x_1 = -4 + 1{,}41\sqrt{-1},\ x_2 = -4 - 1{,}41\sqrt{-1}.$$

175. Рассмотрим случай, когда коэффициент при x^2—отрицательный, как например в выражении

$$y = -3x^2 + 4x + 4$$

$$a = -3, \ b = 4, \ c = 4$$

$$h = \frac{4}{2(-3)} = -\frac{2}{3}, \quad k = \frac{16 - 4(-3)(4)}{4(-3)} = -5\frac{1}{3}.$$

Так как член с x^2—отрицательный, то график является перевернутым, но значения h и k отмеряются так же, как и ранее, от вершины параболы независимо от нового положения параболы. При этом пользуются новым масштабом (рис. 28).

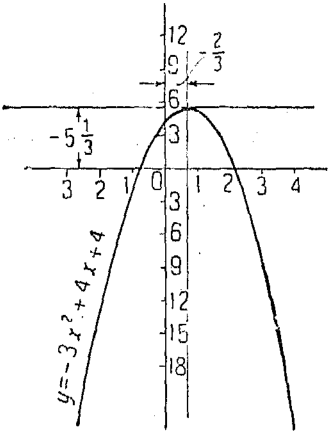


Рис. 28.

Если мы перевернем упомянутый выше график функции $y = x^2$, то для решения можем воспользоваться тем же методом, как и в предыдущих случаях.

Если b—отрицательное, то начало координат расположено слева от оси параболы.

Если b—положительное, то начало координат расположено справа от оси параболы.

Если a—положительное, парабола направлена вершиной вниз

Самым важным обстоятельством является знак при k.

Как мы видели выше, k равно выражению $\frac{b^2 - 4ac}{4a}$; отсюда вытекает, что если a—положительное, то $b^2 - 4ac$ определяет знак k. Из изложенного выше следует, что, при положительном значении a и отрицательном k, ось X будет лежать ниже любой точки параболы. Уравнение не имеет действительных корней, ибо нет точек пересечения указанной кривой с осью X. Если значение a отрицательное, а k—положительное, ось X лежит выше любой точки параболы, и в этом случае опять не будет действительных корней. Поэтому, если a и k имеют одинаковые знаки, получаются корни действительные и не равные друг другу; если $k = 0$, корни действительные и равны между собой; если a и k имеют разные знаки—действительных корней нет.

Отсюда видно, что:

если $b^2 - 4ac > 0$, корни действительны и не равны друг другу;

если $b^2 - 4ac = 0$, корни действительны и равны между собой;

если $b^2 - 4ac < 0$, корни мнимые;

если выражение $b^2 - 4ac$ является полным квадратом, корни — рациональные числа; в противном случае они будут иррациональны.

Выражение $b^2 - 4ac$ называется *дискриминантом* квадратного уравнения.

$$x^2 - 8x + 14 = 0 \qquad (1)$$

$$x^2 - 8x + 16 = 0 \qquad (2)$$

$$x^2 - 8x + 18 = 0 \qquad (3)$$

Корни уравнения (1) *приблизительно равны* 2,6 и 5,4.

Корни уравнения (2) — 4 и 4.

Корни уравнения (3) — *мнимые*.

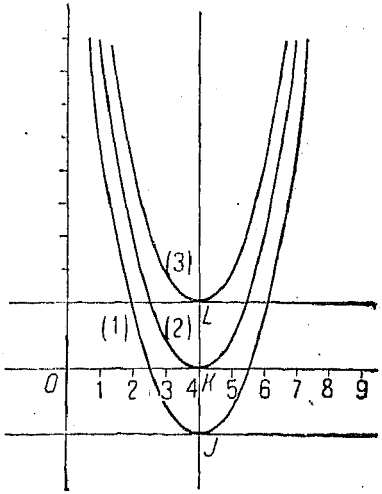


Рис. 29

Так как график (2) с осью X имеет только одну общую точку, ур-ние (2) имеет только один корень, $x = 4$. Однако из рис. 29 видно, что если график (1), дающий два действительных корня, будет передвинут на 2 единицы кверху, он совпадет с графиком (2). По мере того, как график (1) перемещается кверху, его неравные корни приближаются к значению корня (2), т. е. к $x = 4$. Отсюда вытекает, что указанные действительные корни должны рассматриваться как два корня, из которых каждый равен 4.

Перемещение графика (1) на две единицы кверху соответствует образованию полного квадрата в ур-нии (1), получающегося посредством прибавления 2 к каждой его части. Так как корни получившегося при этом уравнения, $x^2 - 8x + 16 = 2$, отличаются от корней (2) или от среднего значения $x = 4$ на величину $\pm\sqrt{2}$, т. е. на $\pm\sqrt{JK}$, то очевидно, что корни (1) выражаются так:

$$OK + \sqrt{JK} = 4 + \sqrt{2} = 5{,}414 \text{ и } OK - \sqrt{JK} = 4 - \sqrt{2} = 2{,}586.$$

Так как график (3) не имеет с осью X ни одной общей точки, то в этом случае не существует таких значений x, которые могли бы обратить $x^2-8x+18$ в нуль; т. е. ур-ние (3) не имеет действительных корней, иначе говоря — последние мнимы.

Если график (3) переместить на 2 единицы книзу, он совпадет с графиком (2). Если в левой части ур-ния (3) полный квадрат получается посредством *вычитания* из обеих частей (3) числа 2, то корни получившегося при этом уравнения, $x^2-8x+16=-2$, будут отличаться от среднего значения x на величину $\pm\sqrt{-2}$, т. е. на $\pm\sqrt{-LK}$. Отсюда очевидно, что корни (3) таковы:

$$OK+\sqrt{-LK}=4+\sqrt{-2} \quad \text{и} \quad OK-\sqrt{-LK}=4-\sqrt{-2}.$$

Точки J, K и L, имеющие (в алгебраическом смысле) наименьшие ординаты по сравнению с любыми точками приведенных выше графиков, называются *точками минимума*.

Если коэффициент при x^2 есть $+1$, то из предыдущего вытекает следующее:

1. Корни квадратного уравнения, выраженного через букву x, равны абсциссе точки минимума плюс или минус корень квадратный из значения ординаты, взятого с обратным знаком.
2. Если точка минимума лежит на оси X, корни действительны и равны друг другу.
3. Если точка минимума лежит ниже оси X, корни действительны и неравны друг другу.
4. Если точка минимума лежит выше оси X, корни — мнимые.

176. Упрощенные способы построения графика общей формы квадратной функции $y=ax^2+bx+c$. Все приведенные выше функции непрерывны. Наклон касательной в точке p_1 (x_1, y_1), как будет доказано далее, равен $2ax_1+b$ (n° 913).

Если a — положительное, вершина кривой обращена книзу; если же a — отрицательное, кривая перевернута, т. е. имеет такой вид: $\frown$.

Точка на кривой, для которой наклон равен 0, т. е. вершина графика, имеет абсциссу

$$x_1=-\frac{b}{2a} \quad (a\neq 0).$$

При $x=-\frac{b}{2a}$, функция $y=ax^2+bx+c$ имеет наименьшее значение, если $a>0$, и наибольшее, если $a<0$.

Кривая, выражаемая данной функцией, симметрична относительно прямой линии

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Приведенным выше исследованием можно определить, обращена ли кривая выпуклостью вверх или вниз.

В первом случае вершина соответствует максимуму функции, в другом — минимуму, так как она является наиболее низко расположенной точкой кривой.

При вычерчивании графика параболы, представляющей геометрическое место точек, соответствующих уравнению $y = ax^2 + bx + c$, мы прежде всего строим ось и вершину ее, а затем по небольшому числу точек самое кривую.

Пример. Начертить график

$$y = x^2 - 6x + 5.$$

Наклон касательной (m) равняется $2ax_1 + b = 2x_1 - 6$. Так как наклон касательной, проведенной через вершину, равен 0, то $2x_1 - 6 = 0$, откуда $x_1 = 3$. Величина y, соответствующая этому значению x, есть -4. Эти значения x и y определяют положение вершины; так как x^2 — положительное, вершина соответствует минимуму.

Через найденную вершину проводим ось, представляющую собою вертикальную прямую. Проводим горизонтальную касательную к кривой в ее вершине. Наносим несколько точек и проводим через них касательные. Вычерчиваем самое кривую (рис. 30).

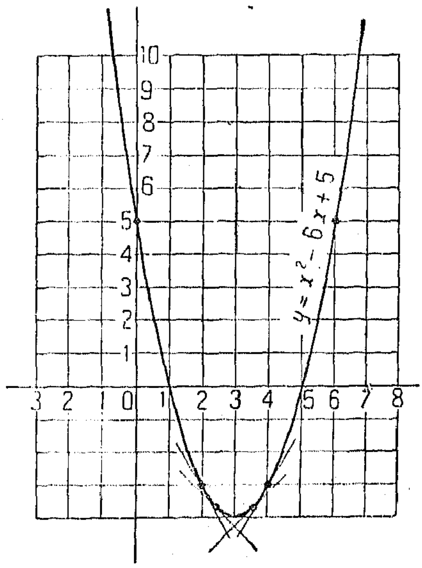


Рис. 30.

При подстановке значений x в том случае, когда коэффициент при x^2 равен $+1$ (как например в разбираемом выражении), весьма удобно сначала взять значение x, равное половине коэффициента при x, с обратным знаком. Следующие значения x надо брать такими, чтобы они отличались от первоначально взятого значения на одну и ту же величину. Таким образом, подставляя $x = 3$, получаем $y = -4$. Затем, дадим x такие значения, которые отличались бы от 3 на одну и ту же величину, например $2\frac{1}{2}$ и $3\frac{1}{2}$, 2 и 4, 1 и 5, 0 и 6. Найдем, что y имеет одно и то же значение для $x=3\frac{1}{2}$ и для $x=2\frac{1}{2}$, для $x=4$ и $x=2$ и т. д.

Подставляя различные значения x в x^2-6x+5, получим, что, при $x=3$, $x^2-6x+5=-4$; при $x=2$ и $x=4$, $x^2-6x+5=-3$. Если $x=0$, $x^2-6x+5=5$. Отсюда видно, что, при пересечении кривой с осью X, значения ординат изменяют свой знак на обратный (рис. 30).

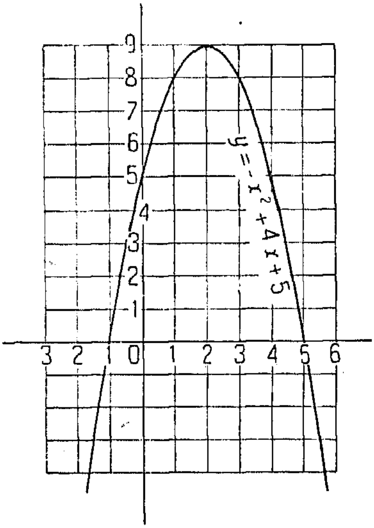


Рис. 31.

Когда ординаты равны нулю, величина выражения x^2-6x+5 также равняется нулю; в этом случае абсциссы обозначают те значения x, которые обращают y в нуль. Итак, $x=1$ и $x=5$ обращают y в нуль, или, другими словами, корнями уравнения $x^2-6x+5=0$ являются 1 и 5.

Заметим, что если коэффициент при x^2 равен $+1$, то половина коэффициента при x, взятая с обратным знаком (эту величину мы употребляли для первой подстановки в наше уравнение), равняется полусумме корней, т. е. их среднему арифметическому.

Пример. Построим график

$$y=-x^2+4x+5.$$

Наклон касательной равняется $-2x_1+4$. Приравняем последнее выражение нулю и из полученного таким образом уравнения найдем значение x_1; оно выражает абсциссу вершины кривой. Соответствующее значение y найдется посредством подстановки определенного нами значения x в уравнение нашей кривой. Итак $x_1=2$, а $y_1=9$. Отсюда следует, что в точке $(2, 9)$ расположена вершина; она соответствует максимуму, так как $a<0$ (рис. 31).

Вершина должна лежать на оси кривой. Так как указанная ось определяется формулой $x=-\frac{b}{2a}$, то мы можем непосредственно применять эту формулу для разыскания абсциссы вершины. Так как вершина есть точка данной кривой, то ее координаты должны удовлетворять уравнению нашего графика. Отсюда следует, что, подставив в данное уравнение значение x_1 вместо x, мы получим значение y_1, которое представляет собою ординату вершины.

177. Максимум и минимум квадратных функций. В n⁰ 176 было разъяснено, что функция ax^2+bx+c выражает собою параболу с вершиной, обращенной книзу, в том случае, когда коэффициент при x — положительный. При этом точка вершины соответствует наименьшему значению функции.

Если коэффициент при x^2 — отрицательный, кривая перевернута и ее вершина обращена кверху. В этом случае функция имеет максимум.

Если мы найдем ось параболы, соответствующую абсциссе $-\frac{b}{2a}$, то этим определяется максимум или минимум функции, вершина графика которой расположена на указанной оси.

Пример 1. $y = x^2 - 24x + 108$.

Вершина графика выражает минимум, так как коэффициент при x^2 равен $+1$.

Абсцисса вершины есть $-\frac{b}{2a}$, т. е.

$$-\frac{-24}{2} = 12.$$

Следовательно, функция $x^2 - 24x + 108$ имеет наименьшее значение при $x = 12$.

Пример 2. Нужно обнести забором прямоугольный участок земли с трех сторон, с четвертой стороны он ограничен уже имеющейся прямолинейной стеной. Каковы должны быть размеры прямоугольника, чтобы забор длиною в 4 *км* отгораживал наибольшую площадь?

Можно построить бесконечное число прямоугольников, сумма сторон которых имеет одну и ту же длину, но среди них будет только один такой, который будет заключать максимум площади.

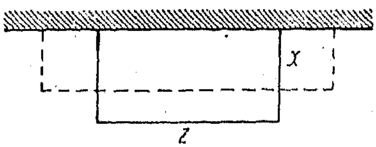


Рис. 32.

Рассматриваемая нами здесь функция есть площадь прямоугольника, т. е. функция его двух сторон. Так как нам нужно иметь функцию только от одной переменной, то мы должны выразить одну какую-либо из переменных через другую.

Пусть стороны прямоугольника будут x и z (рис. 32). Так как данная длина забора равна 4 *км*, то

$$2x + z = 4.$$

Отгороженная площадь $y = x \cdot z$; если подставить $4 - 2x$ в это выражение вместо z, то получим $y = x(4 - 2x) = -2x^2 + 4x$. Знак коэффициента при x^2 — отрицательный, а поэтому функция y будет иметь наибольшее значение

при $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{-4} = 1$, ибо $a = -2$ и $b = 4$.

$$2x + z = 4; \quad 2 + z = 4 \text{ или } z = 2.$$

Размеры прямоугольника таковы: 1 *км* на 2 *км*.
Площадь прямоугольника равна 2 *кв. км*.

178. Графическое решение задачи n⁰ 177.

$$y = -2x^2 + 4x \text{ (рис. 33).}$$

Так как $a = -2$, график ее имеет вершину, обращенную кверху. Находим положение вершины графика при помощи равенств:

$$h = \frac{b}{2a} = \frac{4}{2(-2)} = -1 \text{ и } k = \frac{16 - 0}{-8} = -2.$$

Располагаем начало координат в точке, отстоящей от вершины графика $y = x^2$ на 1 единицу влево (т. е. в отрицательном направлении по оси X) и на 2 единицы вниз (в отрицательном направлении по оси Y). Единица измерения для оси Y отличается от таковой для оси X, так как $a = -2$ и числа на оси Y получены в результате умножения первоначальных значений y на 2.

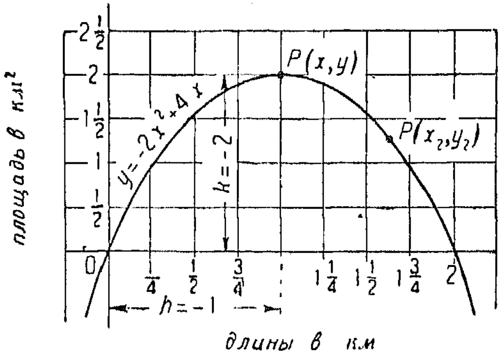


Рис. 33.

Любая точка графика выражает площадь, заключенную между забором длиною в 4 *км* и стеной. Точки $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$ соответствуют двум подобным площадям. Однако, очевидно, что максимум площади выражается ординатой вершины графика, имеющей координаты (h, k).

Необходимо иметь в виду, что значение функции, показываемое ординатами, не имеет никакого отношения к площади, находящейся под кривой. Площадь, ограничиваемая кривой, будет рассмотрена далее. Мы даем переменной некоторое значение x_0; при этом длина ординаты в этой точке выражает значение $y(x_0)$ для данного частного значения x. Из графика легко заметить, как изменяется величина функции в зависимости от различных значений x.

179. *Задача.* Три улицы, пересекаясь, образуют трехугольный участок ABC. Длина стороны BC равна 180 *м*; точка A находится на расстоянии

90 *м* от BC. На указанном участке должно быть построено прямоугольное здание с фасадом, расположенным вдоль BC. Каковы должны быть размеры здания, чтобы оно занимало наибольшую площадь?

Площадь, занимаемая зданием, может изменяться в зависимости от длины его сторон. Она есть функция этих сторон.

Пусть x и z обозначают длину сторон. Тогда площадь

$$y = xz$$

Чтобы выразить y только через одну переменную, мы должны вторую из переменных выразить через первую. $\triangle ABC$ и $\triangle AMN$ подобны. Отсюда

$$\frac{MN}{BC} = \frac{LA}{DA} \text{ или } \frac{x}{180} = \frac{90 - z}{90},$$

откуда

$$z = -\frac{1}{2}x + 90.$$

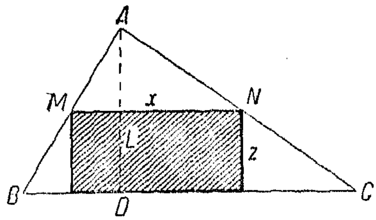


Рис. 34.

Подставляя это значение z в выражение y, получим

$$y = -\frac{x^2}{2} + 90x + 0.$$

Функция $y = -\frac{x^2}{2} + 90x$ имеет максимум при $x = -\frac{b}{2a}$, т. е.

$$x = -\frac{90}{-2\left(\frac{1}{2}\right)} = 90.$$

Если $x = 90$, то $z = 90 - \frac{1}{2}90 = 45$.

Наибольшая величина площади, занимаемой зданием, поэтому, равняется произведению 90×45, то есть 4050 *кв. м.*

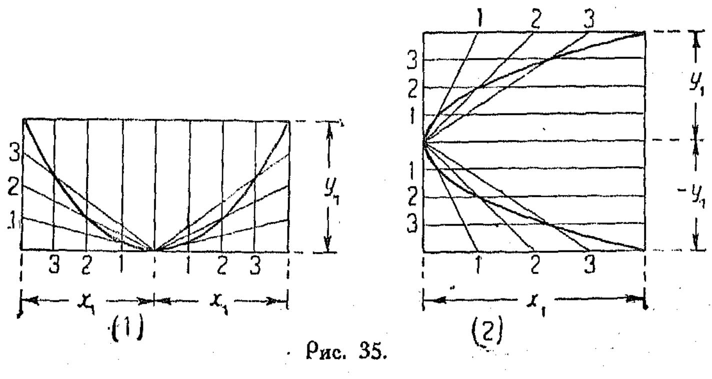


Рис. 35.

Эту задачу можно решить графически тем же самым способом, что и предыдущую.

180. Следующий способ весьма удобен для построения графика параболы.

Возьмем некоторое значение x, например x_1, и найдем соответствующее ему значение y, скажем y_1.

Построим прямоугольник, как это показано на рис. 35, употребляя в случае 1 y_1 как одну из его сторон, а $2x_1$ — как другую. В случае 2 употребляем x_1 в качестве стороны прямоугольника, параллельной оси параболы, а $2y_1$ — в качестве другой его стороны.

Разделим x_1 и y_1 на равное число частей. Точки пересечений параллельных прямых и диагоналей, как это показано на рис. 35, являются точками кривой.

Проведем кривую через эти точки (см. n⁰ 755).

181. Квадратные уравнения. Аналитический способ решения. Для решения квадратного уравнения, т. е. для определения значений неизвестных, удовлетворяющих уравнению, следует поступать так:

1) Привести к общему виду [3]

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

2) Если возможно, то разложить уравнение на множители.

3) Если трудно найти множители, то следует решать посредством дополнения до квадрата или по формуле.

4) Проверить результаты, отбрасывая при этом посторонние корни, полученные во время приведения к общему виду. Кроме того необходимо учесть потерянные (при делении) корни.

Пример 1. Найти корни уравнения

$$3x^2 = 10x - 3.$$

Приводя уравнение к общему виду $ax^2 + bx + c = 0$, имеем:

$$3x^2 - 10x + 3 = 0.$$

Разлагаем уравнение на множители

$$(x-3)(3x-1) = 0,$$

откуда

$$x - 3 = 0 \quad \text{или} \quad 3x - 1 = 0,$$

т. е.

$$x = 3 \quad \text{или} \quad \frac{1}{3}.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$x^2 + 6x = -5$$

посредством дополнения до квадрата.

Прибавляем к обеим частям уравнения 9, тогда:

$$x^2+6x+9=4$$

$$(x+3)^2=4.$$

Извлекая корень квадратный из обеих частей уравнения имеем:

$$x+3=\pm 2.$$

$$x=-3-2 \text{ или } -3+2=-5 \text{ или } -1.$$

Пример 3. Найти корни уравнения

$$9x^2+30x=-9.$$

Дополним до квадрата

$$9x^2+30x+25=16.$$

Чтобы определить величину, которую следует прибавить к обеим частям уравнения для получения полного квадрата, обратите коэффициент при x^2 в полный квадрат. Тогда число, которое необходимо прибавить к трехчлену, получится делением половины коэффициента при x на корень квадратный из коэффициента при x^2 и возвышением частного в квадрат.

$$\left(\frac{\frac{b}{2}}{\sqrt{a}}\right)^2=\frac{\frac{b^2}{4}}{\frac{a}{1}}=\frac{b^2}{4a},$$

причем a обращено в точный квадрат.

182. Квадратные уравнения. Индийский способ решения. Решим общее уравнение [3]:

$$ax^2+bx+c=0. \tag{1}$$

Перенося c, имеем:

$$ax^2+bx=-c. \tag{2}$$

Умножаем (2) на $4a$, тогда

$$4a^2x^2+4abx=-4ac.$$

Дополняем левую часть уравнения до квадрата, для чего прибавляем к обеим частям величину b^2:

$$4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac.$$

Извлекая из обеих частей квадратный корень, имеем

$$2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

Таким образом, если квадратное уравнение представлено в общей форме (1), то, перенося постоянный член c в правую часть [см. ур-ние (2)] и дополняя до квадрата, можно избежать появления дробей. Для этого умножаем все члены на учетверенный коэффициент при x^2, а затем прибавляем к обеим частям равенства квадрат коэффициента при x в заданном уравнении.

Описанный способ дополнения до квадрата называется *индийским*.

183. Квадратные уравнения. Решение посредством формул. Всякое квадратное уравнение с одной неизвестной, выраженное в явной ф рме, можно привести к виду $ax^2+bx+c=0$ [3], в котором a — положительное, а b и c могут быть положительными или отрицательными.

Корни такого уравнения можно найти по формуле

[6] $$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{и} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Исследование указанных значений x покажет, что характер корней, т. е. являются ли они действительными, мнимыми, рациональными или иррациональными, определяется тем, окажется ли величина $\sqrt{b^2-4ac}$ величиной действительной, мнимой, рациональной или иррациональной (см. n° 175).

Всякое квадратное уравнение вида $ax^2+bx+c=0$ может быть приведено делением на коэффициент при x^2 к форме

[7] $$x^2+px+q=0,$$

корни которого, найденные непосредственным решением, равны

[8] $$x_1=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2} \quad \text{и} \quad x_2=\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}.$$

Сумма корней:

[9] $$x_1+x_2=\frac{-2p}{2}=-p.$$

Произведение корней:

[10] $$x_1x_2=\frac{p^2-(p^2-4q)}{4}=q.$$

Отсюда вытекает правило:

Сумма корней квадратного уравнения вида $x^2+px+q=0$ равна коэффициенту при x, взятому с обратным знаком, а произведение корней равно постоянному члену.

184. Нам уже известно, что если две кривые не пересекаются, то значения x и y, удовлетворяющие уравнениям их, будут мнимыми. С другой стороны, если корни квадратного уравнения мнимые, то величина $b^2 - 4ac$ — отрицательная. Поэтому, чтобы решить, пересекаются ли прямая и кривая второго порядка, следует решить их уравнения совместно. Исключить y и выяснить, не является ли дискриминант полученного квадратного уравнения отрицательным.

Пример. Определить, пересекается ли прямая $y = 2x + 12$ с окружностью $x^2 + y^2 = 25$.

Исключая y, имеем:

$$x^2 + (2x + 12)^2 = 25$$

$$5x^2 + 48x + 119 = 0$$

$$b^2 - 4ac = (48^2) - 4 \cdot (5)(119) = -76.$$

Значение дискриминанта $b^2 - 4ac$ отрицательное, следовательно линии не пересекаются.

185. Составление квадратного уравнения. Обозначим заданные корни через r_1 и r_2. Как указано в n⁰ 183, сумма корней квадратного уравнения вида $x^2 + px + q = 0$,

$$r_1 + r_2 = -p,$$

а произведение

$$r_1 r_2 = q;$$

поэтому, подставляя в общее уравнение $-(r_1 + r_2)$ вместо p, и $r_1 r_2$ вместо q, будем иметь

$$x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2 = 0.$$

Раскрывая скобки, находим:

$$x^2 - r_1 x - r_2 x + r_1 r_2 = 0.$$

Разлагая на множители, получим:

$$(x - r_1)(x - r_2) = 0.$$

Таким образом для составления квадратного уравнения по заданным корням следует вычесть каждый из них из x, а затем приравнять произведение разностей нулю.

186. Разложение многочленов второй степени на множители. Рассмотрим общую форму трехчлена второй степени:

$$ax^2 + bx + c \quad [3].$$

Выражение $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ обращается в нуль, если $(x - r_1)$ является его множителем и $x = r_1$, Кроме того значение $x = r_2$ также обращает указанное выражение в нуль.

Вследствие сказанного, если r_1 и r_2 суть корни квадратного уравнения

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

то многочлен, стоящий в левой части, разлагается на множители.

$$a(x - r_1)(x - r_2).$$

Пример. Найти множители выражения

$$5x^2 - 7x - 22.$$

Имеем:

$$5x^2 - 7x - 22 = 5(x^2 - 1{,}4x - 4{,}4).$$

Решая уравнение

$$x^2 - 1{,}4x - 4{,}4 = 0,$$

находим

$$x^2 - 1{,}4x + (0{,}7)^2 = 4{,}89$$

$$x - 0{,}7 = \pm 2{,}211$$

$$x = 2{,}911 \text{ или } -1{,}511.$$

Поэтому заданное выражение разлагается так:

$$5(x - 2{,}911)(x + 1{,}511).$$

Рассмотрим самое общее выражение второго порядка

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)$$

или иначе

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2\right].$$

Правая часть последнего выражения представляет собой разность квадратов двух количеств, поэтому многочлен можно представить в виде такого произведения:

[11] $$a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right).$$

Характер множителей зависит от величины выражения $b^2 - 4ac$, а именно:

Если b^2-4ac представляет собой полный квадрат, то множители рациональны.

Если b^2-4ac не представляет собой полного квадрата, но является величиной положительной, то данное выражение можно разложить на множители и численное значение их может быть найдено с какой угодно степенью точности.

Если b^2-4ac отрицательное, то множители могут быть выражены только при помощи комплексных чисел.

Если b^2-4ac равно нулю, то данное выражение само является полным квадратом.

Пример. Найти множители выражения

$$8x^2+13x-22.$$

Имеем:

$$\begin{aligned}8(x^2+1{,}625\,x-2{,}75) &= 8\,[x^2+1{,}625\,x+(0{,}8125)^2-2{,}75-(0{,}8125)^2]\\ &= 8\,[(x+0{,}8125)^2-3{,}410]\\ &= 8\,[(x+0{,}8125)^2-1{,}847^2]\\ &= 8\,(x+2{,}659)\,(x-1{,}035).\end{aligned}$$

Таким образом, искомые множители суть:

$$x+2{,}659 \text{ и } x-1{,}035.$$

187. Задачи на составление квадратных уравнений.

Задача 1. Группа лиц взяла на прокат спортивные сани, заплатив 12 руб. Так как трое из этой группы не могли внести свою часть платы, то остальным пришлось заплатить на 20 коп. больше. Сколько человек было в группе?

Обозначим через x число лиц в группе.

Тогда число лиц, внесших свою часть платы, будет $x-3$.

$\frac{12}{x}$ — число рублей, которые должен внести каждый;

$\frac{12}{x-3}$ — число рублей, внесенное каждым из заплативших.

Отсюда

$$\frac{12}{x-3}-\frac{1}{5}=\frac{12}{x}$$ (заметим, что 20 копеек составляют $\frac{1}{5}$ руб.).

Решая это уравнение, находим

$$x=15 \text{ или} -12.$$

Второе значение x очевидно не имеет смысла, так как число лиц, участвовавших в найме, не может быть отрицательным.

Задача 2. Резервуар наполняется при помощи двух труб в 24 минуты. Если бы действовала только меньшая труба, то для наполнения резервуара потребовалось бы на 20 мин. больше, чем если бы действовала только бóльшая труба. Определить, во сколько времени был бы наполнен резервуар при действии каждой из труб в отдельности.

Обозначим через x число минут, нужное для наполнения резервуара большой трубой; тогда меньшая труба должна действовать $x+20$ минут.

Так как

$\frac{1}{x}$ — часть резервуара, наполняемая большой трубой в 1 мин.,

$\frac{1}{24}$ — часть резервуара, наполняемая обеими трубами при одновременном действии их,

$\frac{1}{x+20}$ — часть резервуара, наполняемая меньшей трубой в 1 мин.,

то имеем

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+20}=\frac{1}{24}.$$

Решая это уравнение, находим:

$$x=40 \text{ или } -12.$$

188. Уравнения, приводимые к квадратным. Уравнение, содержащее только две степени неизвестной, причем показатель одной из них вдвое больше показателя другой, как например уравнение

[12] $$ax^{2n}+bx^{n}+c=0$$

(где n — любое число), может быть приведено к квадратному.

Пример 1. Найти значения x из уравнения

$$x^4-13x^2+36=0.$$

Разлагая на множители, получим

$$(x^2-4)\ (x^2-9)=0.$$

Отсюда

$$x^2-4=0 \text{ или } x^2-9=0,$$
$$x=\pm 2 \text{ или } x=\pm 3.$$

Пример 2. Найти значения x из уравнения

$$x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}=12.$$

Положим $x^{\frac{1}{4}}=\rho$, тогда $x^{\frac{1}{2}}=\rho^2$,

$$\rho^2-\rho=12.$$

Разлагая на множители, имеем:

$$(\rho+3)\ (\rho-4)=0,$$

откуда

$$\rho=-3 \text{ или } \rho=4.$$

Произведя подстановку, получим

$$x^{\frac{1}{4}}=-3 \text{ или } x^{\frac{1}{4}}=4,$$

откуда

$$x=81 \text{ или } x=256.$$

Пример 3. Найти значения x из уравнения

$$x^{\frac{3}{2}}-4x \quad 5x^{\frac{1}{2}}=0,$$

Положим $x^{\frac{1}{2}} = \rho$. Тогда

$$x^{\frac{3}{2}} = \rho^3, \text{ а } x = \rho^2.$$

Произведя соответствующую подстановку в данное уравнение, получим

$$\rho^3 - 4\rho^2 - 5\rho = 0.$$

Разлагаем на множители:

$$\rho(\rho^2 - 4\rho - 5) = 0,$$

откуда

$$\rho = 0, \text{ или } \rho^2 - 4\rho - 5 = (\rho - 5)(\rho + 1) = 0.$$

Отсюда

$$\rho = 5,$$

а потому

$$x^{\frac{1}{2}} = 0 \text{ или } 5;$$

отсюда

$$x = 0 \text{ или } 25\ ^{1)}.$$

Пример 4. Найти значения x из уравнения

$$x^2 - 4x + \sqrt{x^2 - 4x - 21} = 63.$$

Вычитая 21 из обеих частей уравнения, получим

$$x^2 - 4x - 21 + \sqrt{x^2 - 4x - 21} = 42.$$

Положим $\rho^2 = x^2 - 4x - 21$. При такой замене данное уравнение получает вид

$$\rho^2 + \rho - 42 = 0.$$

Решая последнее уравнение, получим:

$$\rho = \sqrt{x^2 - 4x - 21} = 6, \ \rho = -7.$$

Продолжая решение, имеем:

$$x = 9{,}81, \ x = -5{,}81 \ (\text{для } \rho = 6).$$

189. *Пример*. Найти корни уравнения

$$x^4 + 4x^3 - 8x + 3 = 0.$$

Извлекаем корень квадратный

$$\begin{array}{r|l}
 & x^4 + 4x^3 - 8x + 3 \quad \underline{|x^2 + 2x - 2} \\
 & x^4 \\
\hline
2x^2 + 2x & 4x^3 \\
 & 4x^3 + 4x^2 \\
\hline
2x^2 + 4x - 2 & -4x^2 - 8x + 3 \\
 & -4x^2 - 8x + 4 \\
\hline
 & -1
\end{array}$$

Так как левой части данного уравнения недостает 1 до полного квадрата, последний может быть получен посредством прибавления 1 к каждой части уравнения, в результате чего оно примет следующий вид:

$$x^4 + 4x^3 - 8x + 4 = 1.$$

---

1) Корень $\rho = -1$ отброшен по той причине, что под $\sqrt{x}$ понимается его арифметическое значение.

Извлекая квадратный корень, имеем

$$x^2+2x-2=\pm 1.$$

Поэтому

$$x^2+2x-3=0,\ x^2+2x-1=0.$$

Решая, получим

$$x=1,\ -3,\ -1\pm\sqrt{2}.$$

Замечание. Данная задача также может быть решена посредством прибавления $4x^2$, таким образом:

$$x^4+4x^3+4x^2-4x^2-8x+3=0,$$

откуда

$$(x^2+2x)^2-4(x^2+2x)+3=0.$$

Затем последнее уравнение разлагаем на множители.

Для упрощения решения данной задачи можно также применить теорему о разложении на множители (n⁰ 186).

190. *Пример 1.* Найти корни уравнения

$$\frac{x^2}{x+1}+\frac{x+1}{x^2}=4.$$

Первый член левой части представляет собою величину, обратную второму. Обозначим первый член через ρ, а второй — через $\frac{1}{\rho}$; при этом наше уравнение получит вид: $\rho+\frac{1}{\rho}=4$, или $\rho^2-4\rho=-1$.

Прибавляя 4 к обеим частям последнего равенства, имеем:

$$\rho^2-4\rho+4=3 \text{ или } (\rho-2)^2=3,$$

$$\rho-2=\pm\sqrt{3},$$

следовательно

$$\rho=2\pm\sqrt{3}=3{,}44, \text{ или } 1{,}56$$

$$\frac{x^2}{x+1}=3{,}44,$$

$$\frac{x^2}{x+1}=1{,}56.$$

Решаем два последних квадратных уравнения и находим значения x.

Пример 2. Решите уравнение

$$x^2=9+\sqrt{x^2-3}.$$

Примем радикал за неизвестную. Прибавляя —3 к обеим частям данного равенства и перенося радикал в левую его часть, получим:

$$x^2-3-\sqrt{x^2-3}=6;$$

этому уравнению можно легко придать более простой вид.

Радикал можно заменить через подстановку $z=\sqrt{x^2-3}$, в результате чего получим $z^2-z=6$.

Пример 3. Решить уравнение $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$.
Разделив на x^2, получим

$$x^2 + x - 4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0,$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) = 4.$$

Приведем последнее выражение к форме квадратного уравнения посредством прибавления 2 к обеим частям равенства:

$$\left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) = 6.$$

Положив $u = x + \dfrac{1}{x}$, имеем:

$$u^2 + u = 6,$$

$$u = 2 \text{ или } -3, \text{ т. е. } x + \frac{1}{x} = 2 \text{ или } -3.$$

191. Графический способ Эвклида для определения корней квадратного уравнения. Если из точки вне окружности провести две прямые, пересекающие ее, то площади прямоугольников, построенных на секущих и их внешних частях, равны друг другу (Эвклид, III, 31).

На рис. 36: $OA \times OE = OD \times OQ$.

Для того чтобы применить изложенную теорему к определению корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, прежде всего приводим его к следующей форме:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a},$$

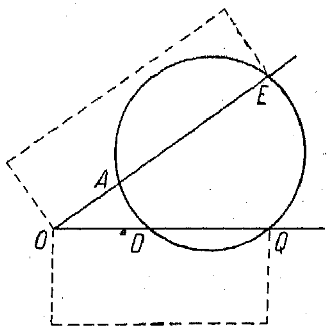


Рис. 36.

или

$$x\left[+\left(-\frac{b}{a}\right) - x\right] = \frac{c}{a} \times 1.$$

От точки пересечения осей OX и OY (оси расположены не обязательно под прямым углом друг к другу) (рис. 37) откладываем в положительном направлении вдоль оси OY отрезок OA, равный единице, и OE, равный $\dfrac{c}{a}$. Тогда, согласно приведенной теореме, отрезок OD равняется x, а OQ равняется $\left(-\frac{b}{a}\right) - x$. Величина этих отрезков не может быть найдена непосредственно, но лишь после определения координат центра окружности.

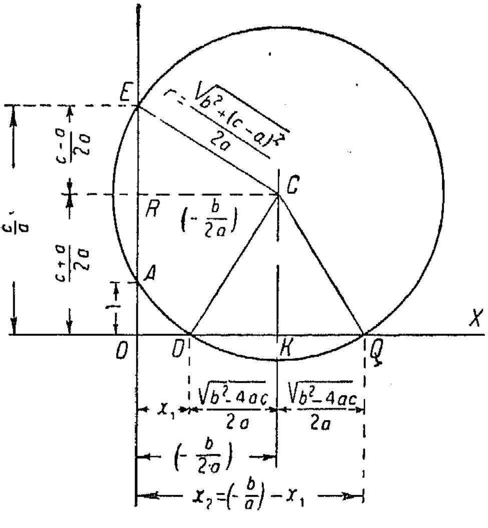


Рис. 37.

Точки D и Q представляют собою точки пересечения окружности с осью X. Положим $DK = KQ$. Тогда

$$\frac{OQ - OD}{2} + OD = \frac{OQ + OD}{2} = OK,$$

или

$$\frac{\left(-\frac{b}{a}\right) - x + x}{2} = \left(-\frac{b}{2a}\right) = OK.$$

Величина $\left(-\frac{b}{2a}\right)$, таким образом, представляет собою абсциссу x центра окружности. Легко заметить, что ордината y есть $\frac{c+a}{2a}$. Если координатные оси взаимно перпендикулярны, радиус окружности можно найти из прямоугольного треугольника ECK; его величина $r = \frac{\sqrt{b^2 + (c-a)^2}}{2a}$. Из прямоугольных треугольников DCK и KCQ следует, что

$$DK = KQ = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Легко видеть, что окружность, расположенная указанным образом относительно координатных осей, полностью удовлетворяет всем условиям нашей теоремы. Необходимо иметь в виду, что указанная окружность не представляет собою графика квадратной функции, она лишь применяется как вспомогательное средство для геометрического решения квадратного уравнения.

Из рис. 37 можно определить x_1 и x_2.

$$x_1 = OK - DK = \left(-\frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

$$x_2 = OK + KQ = \left(-\frac{b}{2a}\right) + \sqrt{\frac{b^2-4ac}{2a}} =$$

$$= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

192. Рассмотрим следующие пять случаев:

Случай 1. Если величины $\left(-\frac{b}{2a}\right)$ и $\frac{c+a}{2a}$ обе положительны, а радиус окружности больше, чем ордината центра y, равная $\frac{c+a}{2a}$, то окружность должна пересекать ось X, и в этом случае x имеет действительные и положительные значения, как например на рис. 38*а*, т. е.

$$\frac{\sqrt{b^2+(c-a)^2}}{2a} > \frac{c+a}{2a}.$$

$$\sqrt{b^2+(c-a)^2} > c+a.$$

Возвышая в квадрат, имеем

$$b^2+(c-a)^2 > (c+a)^2$$

$$b^2+c^2-2ac+a^2 > c^2+2ac+a^2$$

или

$$b^2-4ac > 0.$$

Вычисление радиуса не необходимо. Во всех случаях окружность должна проходить через точку (0, 1), лежащую на оси Y.

После того как положение центра определено, проводят циркулем окружность радиуса CA.

Решим уравнение $x^2-6x+5=0$.

$$a=1,\ b=-6,\ c=5$$

$$\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{-6}{2\times 1} = 3$$

$$\frac{c+a}{2a} = \frac{5+1}{2\times 1} = 3.$$

На рис. 38 *а* центр окружности находится в точке (3, 3) Описываем из него радиусом CA дугу, которая пересечет

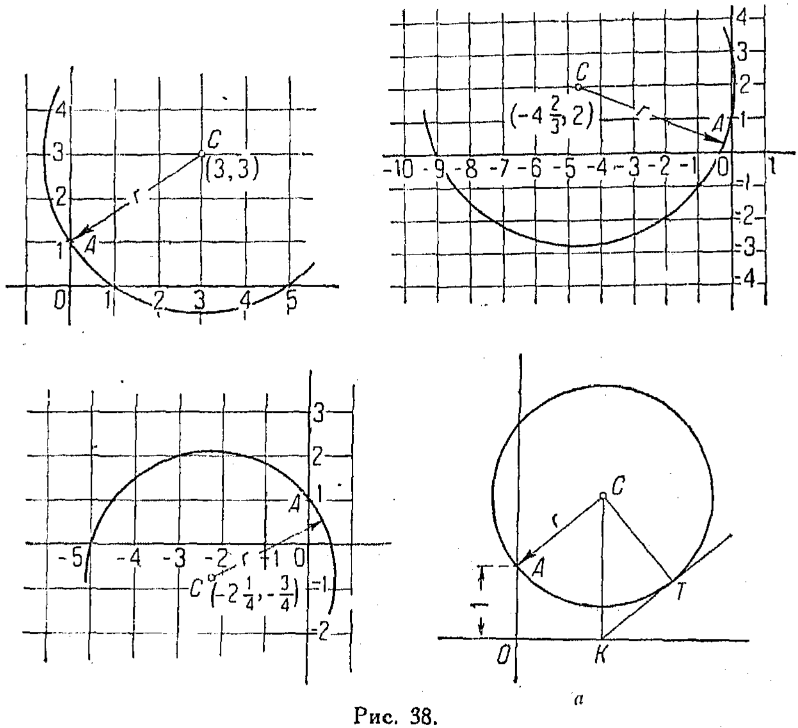


Рис. 38.

ось X в точках 1 и 5. Эти значения $x=1$ и $x=5$ являются корнями уравнения $x^2-6x+5=0$.

Случай 2. Если выражение $\left(-\frac{b}{2a}\right)$ отрицательное и $\frac{c+a}{2a}$ положительное, то отрезок $\left(-\frac{b}{2a}\right)$ проводим в отрицательном направлении, а $\frac{c+a}{2a}$ — в положительном.

Решим уравнение $3x^2+28x+9=0$.

$$\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{+28}{6}=-4\frac{2}{3}.$$

$$\frac{c+a}{2a}=\frac{9+3}{2\times 3}=2.$$

Из центра $\left(-4\frac{2}{3}, 2\right)$ проводим радиусом CA (рис. 38b) дугу, которая пересечет ось X в точках $-\frac{1}{3}$ и -9. Эти значения $x=-\frac{1}{3}$ и $x=-9$ являются корнями уравнения $3x^2+28x+9=0$.

Случай 3. Если величины $\left(-\frac{b}{2a}\right)$ и $\frac{c+a}{2a}$ — отрицательные, откладываем отрезки, выражающие обе координаты центра, в отрицательном направлении, как на рис. 38c, который дает решение уравнения $2x^2+9x-5=0$. Корни его $x=\frac{1}{2}$ и $x=-5$.

Случай 4. Если величина $\left(-\frac{b}{2a}\right)$ — положительная и $\frac{c+a}{2a}$ — отрицательная, откладываем отрезок, равный $\left(-\frac{b}{2a}\right)$, в положительном направлении, а $\frac{c+a}{2a}$ — в отрицательном.

В этом случае один корень уравнения будет положительный, другой — отрицательный.

Случай 5. Если окружность не пересекает оси X, как это показано на рис. 38d, то корни мнимые. Действительная часть корня выражается отрезком OK, а величина мнимой части — отрезком KT; точка T есть точка касания прямой KT к нашей окружности. Величина

$$KT=\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}.$$

193. Другое графическое решение квадратного уравнения (упрощенный способ). Пусть мы имеем систему двух уравнений такого вида:

$$\begin{cases} y = x^2 & (1) \\ y = -\dfrac{bx}{a} - \dfrac{c}{a}. & (2) \end{cases}$$

Мы знаем, что значения координат, удовлетворяющие оба уравнения, соответствуют точкам пересечения двух кривых, выраженных ур-ниями (1) и (2).

Поэтому, абсциссы этих точек представляют собою такие значения x, которые удовлетворяют обоим уравнениям. Так как в указанных точках оба уравнения имеют одинаковые y, то правые их части равны друг другу, т. е.

$$x^2 = -\frac{bx}{a} - \frac{c}{a} \tag{3}$$

или

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

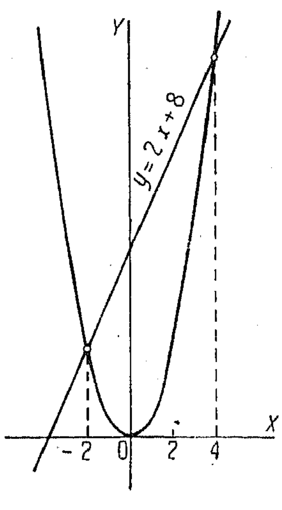


Рис. 39.

Последнее выражение есть общая форма квадратного уравнения [3].

Мы можем, поэтому, заменить ур-ние (3) системой ур-ний (1) и (2), что дает нам простой способ графического решения общего квадратного уравнения.

Для этого необходимо только иметь под рукой несколько синек с тщательно вычерченным графиком $y = x^2$. Так как график ур-ния (2) есть прямая линия, то точки пересечения ее с кривой ур-ния (1) дают корни данного квадратного уравнения.

В случае применения этого способа, следует переносить все члены уравнения, кроме x^2, в правую сторону равенства и получившуюся при этом правую часть его надо рассматривать в отдельности как уравнение прямой линии.

Если прямая линия касается кривой, корни равны друг другу.

Если прямая линия и кривая не пересекаются, корни мнимые, так как отсутствие пересечения указывает на то обстоятельство, что не существует таких значений x, которые удовлетворяли бы обоим уравнениям.

Пример. Решить графически уравнение

$$x^2 - 2x - 8 = 0.$$

Значения x, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} y = 2x + 8 \\ y = x^2 \end{cases},$$

удовлетворяют также данному уравнению.

Построив графики $y = x^2$ и $y = 2x + 8$, мы получаем абсциссы точек их пересечения: $x = -2$ и $x = 4$ (рис. 39).

Таким образом, корни уравнения $x^2 - 2x - 8 = 0$ равны: $x = -2$, $x = 4$.

194. Изложенный способ можно представить несколько иначе. Данное квадратное уравнение разбиваем на два уравнения следующим образом. В уравнении $3x^2 + 4x = 20$ полагаем $y = x^2$. Если это значение x^2 подставить в первоначальное уравнение, то оно примет вид $3y + 4x = 20$; теперь у нас есть система двух уравнений: $3y + 4x = 20$ и $y = x^2$, которую можем решить на основании изложенного в n° 193.

195. Квадратные уравнения с иррациональными корнями. Обыкновенно в технических расчетах встречаются квадратные уравнения с иррациональными корнями. Излагаемый ниже метод позволяет находить значения таких корней с большей степенью точности, чем это возможно при помощи графика. Решение получается здесь при помощи комбинирования алгебраического и графического методов: график квадратного уравнения получают из графика функции $y = x^2$ так, как это было объяснено выше, причем значения корней определяются полученным графиком. В полученные значения корней следует внести небольшие поправки h_1 и h_2, которые определяются таким путем: в первоначальное уравнение подставляют вместо неизвестного найденное графически его значение плюс поправка. Таким образом, получим новые квадратные уравнения, содержащие неизвестные h_1 и h_2. Так как их члены второго порядка весьма малы, то их можно отбросить, в результате чего получаются простые линейные функции h_1 и h_2, позволяющие легко найти величину этих поправок.

Изложенный метод поясним примером.

Пример. Найти корни уравнения $2x^2-9x+6=0$.

$$a=2,\ b=-9,\ c=6.$$

$$h=\frac{b}{2a}=\frac{-9}{2\times 2}=-2\frac{1}{4}$$

$$k=\frac{b^2-4ac}{4a}=\frac{81-4\times 2\times 6}{4\times 2}=4\frac{1}{8}.$$

График функции $y=2x^2-9x+6$, представленный на рис. 40, получим из кривой $y=x^2$, взяв начало в точке $\left(-2\frac{1}{4},\ 4\frac{1}{8}\right)$.

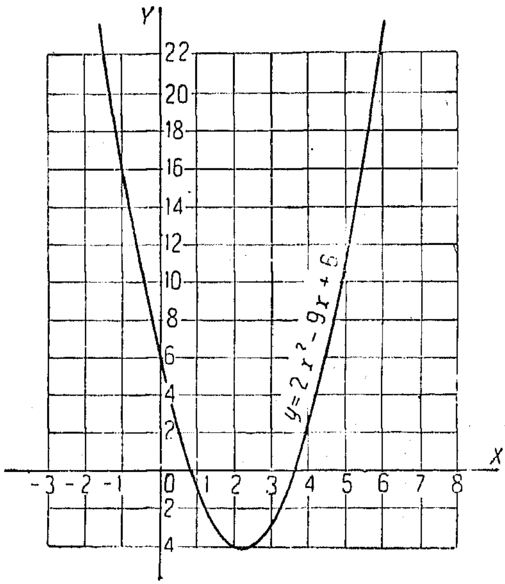


Рис. 40.

Рассмотрение графика дает приближенные значения корней

$$x=0{,}8 \text{ и } x=3{,}7.$$

Положим, h_1 есть поправка к первому указанному корню; тогда

$$x=0{,}8+h_1.$$

Подставляем $0{,}8+h_1$ в данное уравнение $2x^2-9x+6=0$ вместо x; отбрасываем член второй степени h_1^2, так как он весьма незначителен по величине.

Тогда имеем

$$1{,}28+3{,}2h_1-7{,}2-9h_1+6=0$$

$$5{,}8h_1=0{,}08$$

$$h_1=0{,}014.$$

Итак, $x=0{,}8+0{,}014=0{,}814$ есть значение корня с внесенной поправкой и вычисленное с точностью до третьего знака. Во второе приближенное значение корня вносится поправка таким же самым путем при помощи подстановки $x=3{,}7+h_2$.

Подстановка $3{,}7+h_2$ в данное уравнение вместо x, как и ранее, дает

$$27{,}38+14{,}8h_2-33{,}3-9h+6=0$$

$$5{,}8h_2=-0{,}08$$

$$h_2=-0{,}013.$$

Итак,

$$x=3{,}7-0{,}013=3{,}687$$

есть значение корня с внесенной в него поправкой.

Знак минус указывает на то, что значение корня 3,7, полученное из графика, слишком велико и должно быть уменьшено на 0,013.

Изложенный метод дает достаточно точные для практических целей результаты. Конечно, можно внести вторичную поправку; для этого нужно со значениями корня $x=0{,}814$ и $x=3{,}687$ повторить изложенные выше действия, в результате чего можно получить значения корней с точностью до пятого или шестого десятичного знака.

Этот метод может быть также применен для системы квадратных или кубических уравнений, а также для любых задач, которые решаются графическим способом.

Глава VII.

НЕЯВНЫЕ КВАДРАТНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ. СИСТЕМЫ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ.

196. Неявные функции. Выражение

$$[13] \qquad Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

есть общая форма квадратного уравнения с неизвестными x и y. Из него видно, что y есть какая-то функция от x, причем самый вид функции нам неизвестен.

В таких случаях говорят, что y есть *неявная функция* от x.

Поставим себе задачу получить общее представление о кривых, соответствующих уравнениям указанного вида, а также соотношениям между членами уравнения и их коэффициентами.

Причины существования таких соотношений, а также вывод их, будут рассмотрены далее, в отделе, посвященном аналитической геометрии.

Цель введения их здесь — помочь установлению связи между аналитическим и графическим способами решения вопросов.

Вообще говоря, наличие членов с неизвестными в первой степени указывает на то, что координатные оси кривой, соответствующие кривой, выражаемой членами второй степени и постоянной, были перенесены. Член Dx указывает на передвижение кривой в направлении оси X, а члены Cy—в направлении оси Y, присутствие же и того и другого в ур-нии [13] указывает на передвижение кривой в обоих направлениях. Заметим впрочем, что из этого правила имеются исключения (см. nn^0 169 и 197).

Член Bxy указывает на поворот кривой на некоторый угол относительно координатных осей.

Величины и знаки коэффициентов остальных членов ур-ния [13] (а также свободного члена) определяют форму и характер кривой.

Особое свойство неявной функции, имеющей вид

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$

заключается в том, что y является двузначной функцией x, ибо каждому частному значению x соответствуют два значения y при условии, что $C\neq 0$.

Рассмотрим простейшие случаи общего уравнения, а именно:

[14] $$Ax^2+Ey=0$$

[15] $$Cy^2+Dx=0$$

[16] $$Ax^2+Ey+F=0$$

[17] $$Cy^2+Dx+F=0$$

[18] $$Ax^2+Cy^2+F=0.$$

Перенося, в ур-нии [14], член Ey и разделив на E, получим:

$$y=-\frac{A}{E}x^2,$$

что соответствует уравнению $y=ax^2$, в котором

$$a=-\frac{A}{E}.$$

Этот случай уже был рассмотрен в n^0 170. Напомним, что указанное уравнение соответствует параболе, осью симметрии которой служит ось Y (рис. 41). Парабола обращена вершиной вниз, если a положительно, и вершиной вверх, если a отрицательно. Таким образом, при разных знаках у A и E и следовательно при a положительном кривая обращена вершиной вниз.

В ур-нии [15] условия аналогичны предыдущим с той лишь разницей, что x и y поставлены одно вместо другого, причем осью симметрии параболы является ось X.

Ур-ние [15] приводится к виду

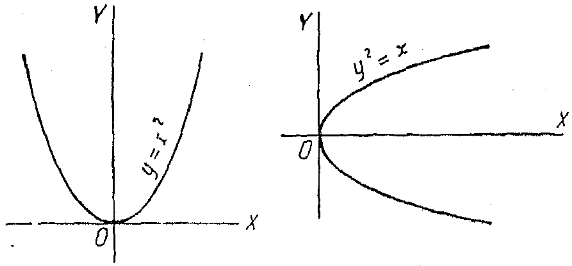
$$x = ay^2,$$

так как переносом члена Cy^2 и делением на D получаем

$$x = -\frac{C}{D} y^2;$$

$$a = -\frac{C}{D}.$$

Рассуждая точно таким же образом, как и ранее, видим, что если C и D имеют одинаковые знаки, то вершина пара-



(а) (б)

Рис. 41.

болы направлена в сторону положительных x-ов, а если разные, то вершина направлена в сторону отрицательных x-ов.

$$Ax^2 + Ey + F = 0 \quad]16]$$

получается из общего уравнения, если B, C и D равны нулю.

$$Cy^2 + Dx + F = 0 \quad [17]$$

получается из общего уравнения, если A, B и E равны нулю

Ур-ния [17] и [16] могут быть преобразованы к явной форме $y = ax^2$ и $x = ay^2$ и изображены по способу, указанному в n^0 170.

197. Уравнения вида $Ax^2 + Cy^2 + F = 0$. Если каждый из коэффициентов B, D и E равен нулю, то общее уравнение [15] принимает вид

[18] $$Ax^2 + Cy^2 + F = 0.$$

Если $A = C \neq 0$ и $\frac{F}{A}$ — величина отрицательная, то ур-ние [18] можно представить так

[19] $$x^2 + y^2 = a^2.$$

Так как мы знаем, что между сторонами прямоугольного треугольника существует соотношение (рис. 42)

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

то $x^2 + y^2$ равно квадрату расстояния точки P от начала координат. Иначе говоря, равенство $x^2 + y^2 = a^2$ указывает, что точка $P(x, y)$ находится в постоянном расстоянии от начала

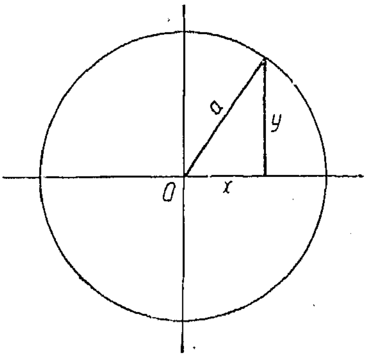


Рис. 42.

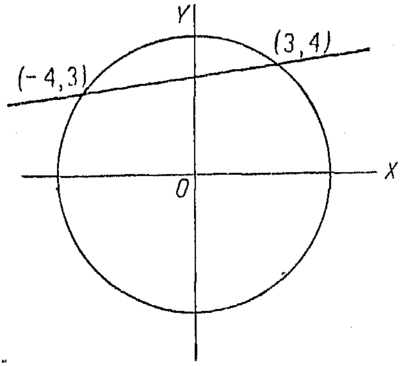


Рис. 43.

координат, равном a единиц и что следовательно кривая представляет собой окружность радиуса a с центром, расположенным в начале координат.

198. Если $A = C \neq 0$, уравнение $Ax^2 + Cy^2 + F = 0$ может быть представлено в виде

[20] $$x^2 + y^2 = -\frac{F}{A}.$$

При $\left(-\frac{F}{A}\right)$ положительном график представляет собой окружность; если же $\left(-\frac{F}{A}\right)$ — отрицательно, то графика не существует. Если $F=0$, то мы получим вместо окружности точку в начале координат.

Окружность можно применять для графического решения системы уравнений, как это видно из нижеследующего примера.

Пример. Найти значения x, удовлетворяющие уравнениям

$$x^2+y^2=25$$

$$x-7y+25=0.$$

Начертим окружность, соответствующую уравнению $x^2+y^2=25$, и прямую, соответствующую уравнению $x-7y+25=0$. Точки пересечения их — единственные, координаты которых удовлетворяют обоим уравнениям. Абсциссы этих точек дают значения x, для которых данные уравнения справедливы.

199. Если график функции представляет собой окружность, член $-\frac{F}{A}$ должен быть положительным. Тогда радиус окружности равен $\sqrt{-\frac{F}{A}}$. Всякое значение x, большее по численной величине, делает y мнимым, так как $y^2=-\frac{F}{A}-x^2$. В самом деле, при всех значениях неизвестных x и y величины x^2 и y^2 — положительные, следовательно при x^2, большем $\frac{F}{A}$, y^2 будет отрицательным, что невозможно, ибо y — число действительное. В справедливости сказанного можно убедиться, рассматривая график функции. Всякое значение x, делающее x^2 бо́льшим чем $\left(-\frac{F}{A}\right)$, будет соответствовать точке, лежащей вне круга. Таким образом следует брать только те значения x, которые численно меньше $\sqrt{-\frac{F}{A}}$.

200. Если A и C неравны между собой, то уравнение $Ax^2+Cy^2+F=0$ принимает вид

$$[21] \qquad x^2+\frac{C}{A}y^2=-\frac{F}{A},$$

где $-\frac{F}{A}$ — величина положительная, или

$$[22] \qquad x^2+n^2y^2=a^2,$$

где

$$[23] \qquad n=\sqrt{\frac{C}{A}}$$

и

$$[24] \qquad a=\sqrt{-\frac{F}{A}}.$$

Уравнение $x^2+n^2y^2=a^2$ соответствует эллипсу и может быть написано в виде

$$y=\pm\frac{1}{n}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Точно так же уравнение окружности $x^2+y^2=a^2$ может быть написано и так:

$$y=\pm\sqrt{a^2-x^2}.$$

Сравнение значений y, т. е. ординат, показывает, что

$$\frac{\text{ординаты эллипса}}{\text{ординаты круга}}=\frac{\frac{1}{n}}{1}=\frac{1}{\sqrt{\frac{C}{A}}}:1=\sqrt{\frac{A}{C}}:1.$$

Отношение ординат эллипса $4x^2+9y^2=25$ к ординатам круга $x^2+y^2=\frac{25}{4}$ (рис. 44) равно

$$\sqrt{\frac{A}{C}}:1=\sqrt{\frac{4}{9}}:1=\frac{2}{3}:1,$$

т. е. ординаты эллипса равняются двум третям соответствующих ординат окружности радиуса

$$\sqrt{-\frac{F}{A}} \text{ или } \frac{5}{2} \text{ единицы.}$$

Для того чтобы уменьшить ординаты окружности в $\frac{2}{3}$ раза, можно применить циркуль для пропорционального деления (см. n^0 83), установленный для отношений 2 к 3. Проводя через концы полученных ординат плавную кривую, получим искомый график.

Другой метод построения эллипса показан на рис. 45. Здесь масштаб ординат в полтора раза больше масштаба абсцисс. Окружность имеет радиус, равный $\frac{5}{2}$ единиц горизонтального масштаба, и изображает уравнение неявной функции

$$4x^2+9y^2=25.$$

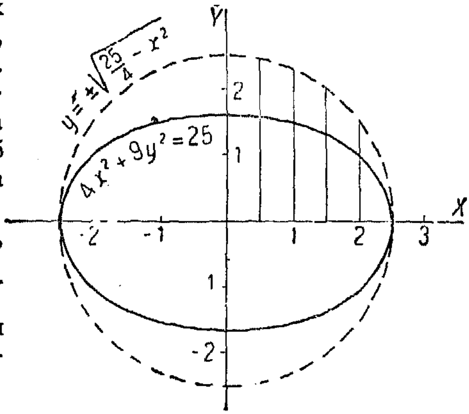


Рис. 44.

201. В случае если $A>0$, $C<0$ и $F<0$, т. е. при A положительном и C и F отрицательных, ур-ние [**18**] Ax^2+Cy^2+ $+F=0$ соответствует другой кривой.

Простейший пример этой кривой, когда уравнение ее имеет вид

$$[\mathbf{25}] \quad x^2-y^2=a^2,$$

показан на рис. 46, где $a=4$, $a^2=16$. Из рисунка видно, что график пересекает ось x-ов в точках (4, 0) и $(-4, 0)$.

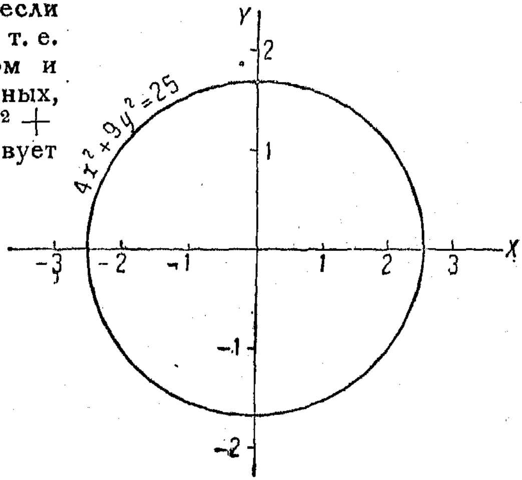


Рис. 45.

Никаких других точек, абсциссы которых имели бы значения между 4 и -4, кривая не имеет. Она симметрична относительно обеих координатных осей, имеет две ветви и называется *равносторонней гиперболой.*

Стороны прямоугольного треугольника (рис. 47) дают соотношения между x, y и a, так как $x^2 - y^2 = a^2$. Полагая

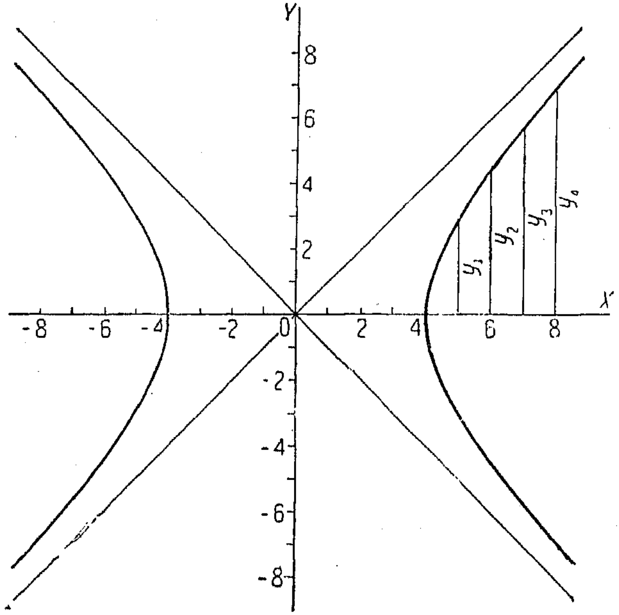


Рис. 46.

x равным 1, 2, 3 и т. д. (рис. 48) и делая циркулем засечки на основной линии AB, получим на последней ординаты равно-

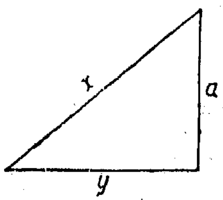


Рис. 47

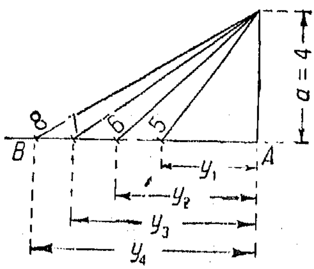


Рис. 48.

сторонней гиперболы, которые можно измерить и перенести в качестве ординат для получения графика рис. 46.

202. Если уравнение кривой имеет вид $x^2-y^2=a^2$, то точки ее пересечения с осью x-ов имеют координаты $(a, 0)$ и $(-a, 0)$. Таким образом вершины обеих ветвей гиперболы отстоят от начала координат на расстояние a и $-a$.

Диагональные прямые, проведенные на рисунке под углом в 45°, называются *асимптотами*. Уравнения асимптот поэтому будут

$$y=x \text{ и } y=-x.$$

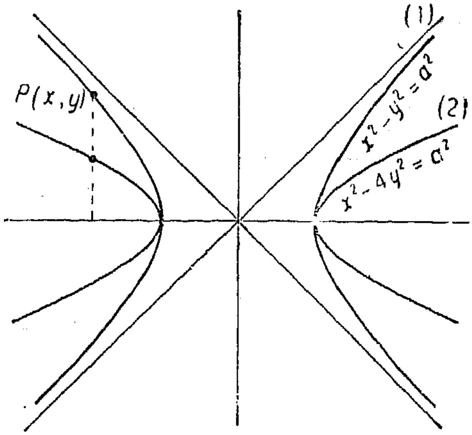


Рис. 49.

Если в общем уравнении A — положительное, а C и F — отрицательные, то оно принимает вид

[26] $$x^2-n^2y^2=a^2,$$

из которого получаем

[27] $$y=\pm\frac{1}{n}\sqrt{x^2-a^2}.$$

Сравнивая это выражение с $y=\sqrt{x^2-a^2}$, выведенным из [**25**], видим, что ординаты их относятся друг к другу как

$$\frac{1}{n}:1$$

или как

$$\sqrt{\frac{A}{C}}:1.$$

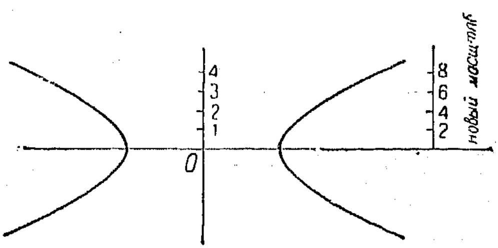


Рис. 50.

Обращаясь к рис. 49, можем заметить, что ординаты кривой (1) вдвое длиннее ординат кривой (2), следовательно мы могли бы начертить кривую (2), пользуясь графиком (1), при помощи циркуля для пропорционального деления. Кроме того, уменьшая вдвое масштаб ординат кривой $x^2-y^2=a^2$, получаем искомую кривую из основного графика, как это показано на рис. 50.

Выражение $x^2-n^2y^2=a^2$ представляет собой уравнение гиперболы. Кривая пересекает ось x-ов в точках $x=a$ и $x=-a$.

Если $F=0$, то мы получаем:

$$x^2-n^2y^2=0$$

или

$$(x-ny)(x+ny)=0,$$

т. е. уравнение двух прямых

$$x=ny \text{ и } x=-ny.$$

Найденные прямые суть асимптоты гиперболы.

203. Если $A>0$, $C<0$ и $F>0$, т. е. при A и F положительных и C отрицательном, уравнение

$$Ax^2+Cy^2+F=0 \ [\mathbf{18}]$$

представляет гиперболу, у которой ось y-ов является осью симметрии, пересекающей кривую; простейшей формой этой кривой является равносторонняя гипербола с уравнением

$$x^2-y^2=-a^2$$

или

$$x=\pm\sqrt{y^2-a^2}.$$

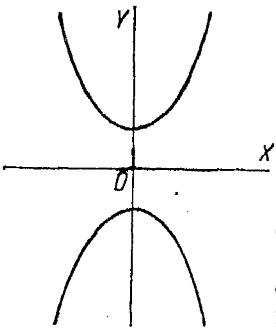


Рис. 51.

Точки пересечения ее с осью ординат имеют координаты $(0, a)$ и $(0, -a)$. Асимптотами являются прямые, проведенные под углом 45° к осям, имеющие те же самые уравнения, что и асимптоты равносторонней гиперболы, рассмотренной в предыдущем n^0 (рис. 49).

Общее уравнение

$$Ax^2+Cy^2+F=0 \ [\mathbf{18}]$$

может быть написано в форме

[**28**] $$n^2x^2-y^2=-a^2$$

или

[**29**] $$x^2=\pm\frac{1}{n}\sqrt{y^2-a^2}.$$

Сравнивая [**29**] с выражением $x=\pm\sqrt{y^2-a^2}$, полученным для равносторонней гиперболы, видим, что их абсциссы относятся как

$$\frac{1}{n}:1 \text{ или как } \sqrt{\frac{C}{A}}:1.$$

Метод построения разъяснен в нижеследующем примере.

Пример. Начертить график $9x^2 - 25y^2 + 100 = 0$ (рис. 52).

Перемещая члены, имеем:

$$\frac{9}{25}x^2 - y^2 = -4$$

или

$$x = \pm\frac{5}{3}\sqrt{y^2 - 4}.$$

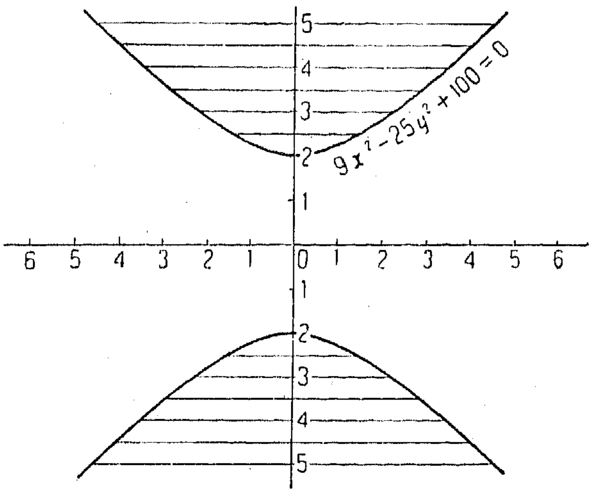


Рис. 52.

Сравнивая это выражение с соответствующим равносторонней гиперболы, т. е. с

$$x = \pm\sqrt{y^2 - 4}$$

видим, что их абсциссы относятся как $\frac{1}{n}:1$ или как $5:3$.

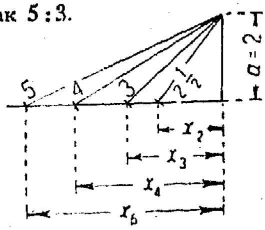


Рис. 53.

Для нахождения этих абсцисс мы применяем, как и ранее, прямоугольные треугольники, с той лишь разницей, что здесь независимой переменной является y, для которого и берем значения $y = 3$, $y = 4$, $y = 5$ и т. д. Принимая их за гипотенузы, находим длины горизонтальных катетов, как это показано на рис. 53. Найденные таким образом величины x соответствуют равносторонней гиперболе.

Чтобы перейти от графика $x = \pm\sqrt{y^2 - 4}$ к графику $x = \pm\frac{5}{3}\sqrt{y^2 - 4}$, увеличиваем абсциссы первой кривой в $\frac{5}{3}$ раза, применяя для этого описанный в n^0 83 циркуль для пропорционального деления.

Этот циркуль следует установить так, чтобы между растворениями ножек сохранялось отношение 5:3, причем короткая сторона циркуля служит для измерения катетов треугольников (рис. 53), а длинная — для откладывания абсцисс искомой кривой.

Заметим, что указанные абсциссы откладываются от оси Y в горизонтальном направлении.

204. Как сказано ранее, в общем ур-нии [**13**] члены Dx и Cy указывают только на то, что центр кривой находится не в начале координат, а в какой-то другой точке. Таким образом прибавление их к членам уравнения окружности, эллипса и т. д. не изменяет общей формы графиков.

Поэтому уравнение

$$Ax^2+Cy^2+F+Dx+Ey=0$$

является уравнением окружности, если $A=C$, и уравнением гиперболы, если A и C — разных знаков. Положение координатных осей этих кривых, в последнем случае, будет отличаться от положения осей графика уравнения

$$Ax^2+Cy^2+F=0.$$

Если значения неизвестных в общем уравнении увеличить или уменьшить на некоторую постоянную величину и подставить их вместо данных переменных, то этим координатные оси кривой соответственно переносятся в другое положение.

205. Положив в общем уравнении [**13**] $B=0$, получим:

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0. \tag{1}$$

Дополняя до квадратов сумм, имеем:

$$A\left(x^2+\frac{D}{A}x+\frac{D^2}{4A^2}\right)+C\left(y^2+\frac{E}{C}y+\frac{E^2}{4C^2}\right)=$$
$$=\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}-F \tag{2}$$

или

$$A\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+C\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2=\frac{D^2C+E^2A-4ACF}{4AC}.$$

Положим

$$x=x_1-\frac{D}{2A} \quad \text{и} \quad y=y_1-\frac{E}{2C}$$

и подставим эти значения переменных в ур-ние (2); тогда получим:

$$[30] \qquad Ax_1^2+Cy_1^2=\frac{D^2C+E^2A-4ACF}{4AC},$$

где член $\frac{D^2C+E^2A-4ACF}{4AC}$ является постоянным, $F' \neq F$.

Поэтому мы можем преобразовать данное уравнение так, чтобы оно соответствовало той же самой кривой, отнесенной к другой системе координат, причем эту последнюю можно выбрать таким образом, чтобы члены, содержащие x и y в первой степени, исчезли.

Перенесение осей не изменяет коэффициентов членов с x^2 и y^2.

Что касается постоянного члена, то согласно ур-нию [30] величина его изменится и будет равна

$$[31] \qquad F'=\frac{4ACF-D^2C-E^2A}{4AC}.$$

Из сказанного ясно, что после преобразования мы получим новое уравнение $Ax_1^2+Cy_1^2+F'=0$ вида $Ax^2+Cy^2+F=0$, соответствующего или эллипсу (частным случаем которого при $A=C$ является окружность), или гиперболе, имеющим центр в начале координат.

Если теперь вычертить график преобразованного уравнения, а затем провести новую систему координатных осей, для которых

$$x=x_1-h \quad \text{и} \quad y=y_1-k,$$

то этот график в новой системе осей будет соответствовать уравнению

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

Очевидно,

$$[32] \qquad h=\frac{D}{2A},$$

$$[33] \qquad k=\frac{E}{2C},$$

где h и k — координаты нового начала.

Пример. Начертить график уравнения

$$9x^2+16y^2-18x+64y-8=0.$$

Сравним это уравнение с ур-нием (1) из n°205 и надпишем коэффициенты его над соответствующими коэффициентами данного; тогда получим:

$$\overset{A}{9x^2}+\overset{C}{16y^2}-\overset{D}{18x}+\overset{E}{64y}-\overset{F}{8}=0.$$

Из [32] имеем:

$$h=\frac{D}{2A}=\frac{-18}{2\cdot 9}=-1.$$

Из [33] имеем:

$$k=\frac{E}{2C}=\frac{64}{2\cdot 16}=2.$$

Таким образом нашему уравнению соответствует эллипс с центром, передвинутым на 1 единицу влево и на 2 единицы вверх по отношению к первоначальному центру.

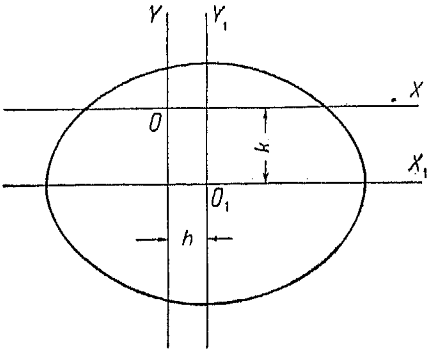


Рис. 54.

График преобразованного уравнения $Ax_1^2+Cy_1^2+F'=0$ [30] начертить легче, чем график первоначального.

Уравнение

$$9x_1^2+16y_1^2=81$$

соответствует эллипсу с центром в начале координатной системы O_1X_1 и O_1Y_1 (рис. 54), построение которого можно произвести по методу, указанному в n°200.

Этому же эллипсу, отнесенному к системе координат с началом в точке $(-1, 2)$, соответствует уравнение

$$9x^2+16y^2-18x+64y-8=0.$$

Решая это уравнение совместно с другим, которому соответствует прямая линия, можно легко найти значения x и y, удовлетворяющие этой системе. Указанные корни являются координатами точек пересечения прямой и эллипса.

Если график пересекает ось X, то абсциссы этих точек дают значения x, при которых функция равна нулю, т. е. корни уравнения. Точно так же ординаты точек пересечения с осью Y

дадут значения y, при которых независимое переменное делается равным нулю.

206. Случай, когда $Bxy + F = 0$. Это уравнение соответствует гиперболе, асимптотами которой являются оси X и Y (рис. 55).

Перенося F в правую часть равенства и деля на B, получим:

[34] $$xy = -\frac{F}{B} = \text{постоянной} = C.$$

Если две переменные изменяются так, что их произведение равно постоянной величине, то график уравнения представляет собой равностороннюю гиперболу, у которой оси координат являются асимптотами. Так, график уравнения $pv = C$, связывающего давление и объем газа, есть гипербола указанного вида. Быстрый способ вычисления ординат этой кривой указан в nn⁰ 397 и 406

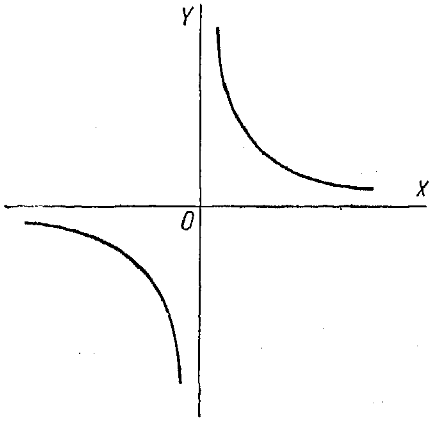


Рис. 55

207. Если $A = C = 0$, а $B \neq 0$, то общее уравнение принимает вид

[35] $$Bxy + Dx + Ey + F = 0,$$

которое может быть переписано так:

$$xy + \frac{D}{B}x + \frac{E}{B}y + \frac{F}{B} = 0$$

или

$$xy + \frac{D}{B}x + \frac{E}{B}y = -\frac{F}{B}.$$

Прибавляя к обеим частям уравнения величину $\frac{ED}{B^2}$, имеем:

$$xy + \frac{D}{B}x + \frac{E}{B}y + \frac{ED}{B^2} = \frac{ED}{B^2} - \frac{F}{B},$$

откуда

[36] $$\left(x + \frac{E}{B}\right)\left(y + \frac{D}{B}\right) = \frac{ED - BF}{B^2}.$$

Произведем подстановку

$$x_1 = x + h \quad \text{и} \quad y_1 = y + k,$$

где

$$h = \frac{E}{B}, \quad \text{а} \quad k = \frac{D}{B}.$$

В таком случае ур-ние [36] примет вид:

$$x_1 y_1 = C,$$

причем постоянный член равен:

$$C = \frac{ED - BF}{B^2}.$$

Таким образом график функции

$$Bxy + Dx + Ey + F = 0$$

может быть получен вычерчиванием кривой

Рис. 56.

$$x_1 y_1 = \frac{ED - BF}{B^2}$$

и переносом начала в точку (h, k), где

[37] $$h = \frac{E}{B}, \qquad k = \frac{D}{B}.$$

Пример. Начертить график уравнений

$$2xy + x + 2y = 9.$$

Имеем:

$$B = 2, \quad D = 1, \quad E = 2, \quad F = -9,$$

$$h = 1, \quad k = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{2 \cdot 1 - 2(-9)}{4} = 5.$$

Вычерчиваем график $xy = 5$ и переносим начало координат в точку $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ (рис. 56).

208. Построение графика общего уравнения $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ посредством сдвига. Если имеется член Bxy, то для вычерчивания графика уравнения последнее можно привести к более простому виду посредством сдвига. Сущность этого способа выяснится из нижеследующего примера.

Рассмотрим уравнение

$$y^2 - 2xy + x^2 - 2x - 3 = 0. \qquad (1)$$

Решая его относительно y, получим

$$y = x \pm \sqrt{2x+3}. \qquad (2)$$

Если ур-ние (2) разбить на две части, а именно:

$$y' = x \qquad (3)$$

и

$$y'' = \pm\sqrt{2x+3}, \qquad (4)$$

то

$$y = y' + y''.$$

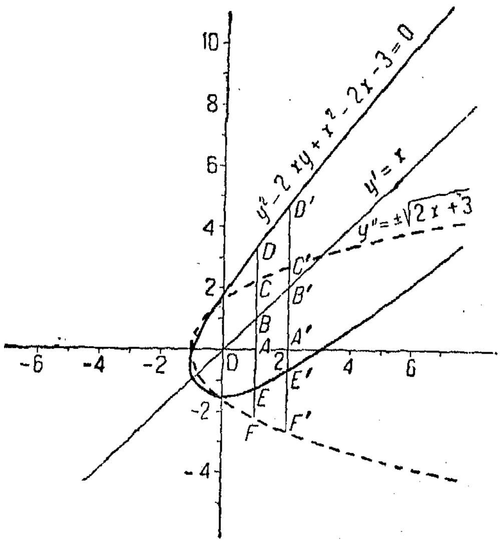


Рис. 57.

Ординаты графика (2) равны ординатам (4), сложенным с ординатами (3) или вычтенным из них.

Графики ур-ний (3) и (4) можно построить, как это сделано на рис. 57, в одной и той же системе координат.

Откладывая ординаты кривой (4) от линии (3), получим график уравнения (1). Таким образом, взяв $x = 1$ и откладывая ординаты AC и AF от прямой $y' = x$ в точке B, получим точки D и E, принадлежащие искомой кривой (1). Точно так же ординаты $A'C'$ и $A'F'$, соответствующие значению $x = 2$, будучи отложены от прямой $y' = x$ в точке B', дадут точки E' и D' — графика уравнения (1).

Описанный прием называется *сдвигом* графика уравнения $y = \pm\sqrt{2x+3}$ по отношению к прямой $y' = x$ или линии сдвига. Последняя, однако, не является осью кривой.

За небольшим исключением, все кривые второго порядка, общее уравнение которых имеет вид

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

(где $B \neq 0$), могут быть построены при помощи метода сдвига. Если $C=0$, то этот метод непригоден, но тогда при $A \neq 0$ уравнение можно решить относительно x.

Если $A=C=0$, способ сдвига также неприменим.

Рассмотрим общее уравнение

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$

где $C \neq 0$.

Перемещая члены и дополняя до квадрата суммы, получим:

$$y^2+\frac{Bx+E}{C}y+\frac{(Bx+E)^2}{4C^2}=\frac{-Ax^2-Dx-F}{C}+$$
$$+\frac{B^2x^2+2BEx+E^2}{4C^2}.$$

$$\left(y+\frac{Bx+E}{2C}\right)^2=\frac{(B^2-4AC)x^2+(2BE-4CD)x+(E^2-4CF)}{4C^2}$$

[38] $$y=\frac{-B}{2C}x-\frac{E}{2C}\pm$$
$$\pm\sqrt{\frac{(B^2-4AC)x^2+(2BE-4CD)x+(E^2-4CF)}{4C^2}}.$$

Таким образом для построения графика общего уравнения необходимо произвести сдвиг кривой

[39] $$y=\pm\sqrt{\frac{(B^2-4AC)x^2+(2BE-4CD)x+(E^2-4CF)}{4C^2}}$$

или

[40] $$(B^2-4AC)x^2-4C^2y^2+(2BE-4CD)x+(E^2-4CF)=0$$

по отношению к прямой

[41] $$y=-\frac{B}{2C}x-\frac{E}{2C}.$$

Кривые второго порядка, соответствующие уравнению [40], уже были рассмотрены в пп^0 196—206. Ниже приведено несколько примеров на метод сдвига.

Пример 1. Построить график уравнения

$$5x^2-4xy+y^2-12x+11=0.$$

$$A=5,\ B=-4,\ C=1,\ D=-12,\ F=11.$$

Уравнение линии сдвига [41] имеет в данном случае вид

$$y = -\frac{-4}{2}x \quad \text{или} \quad y = 2x.$$

Подставляя коэффициенты в ур-ние [40], имеем:

$$(16 - 20)x^2 - 4y^2 + (0 + 43)x + (0 - 44) = 0$$

или

$$x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0.$$

Найденное уравнение соответствует окружности, так что для нахождения радиуса и координат центра следует пользоваться формулами [30], [32] и [33].

Уравнение [30], после подстановки новых коэффициентов даст:

$$x^2 + y^2 = \frac{144 + 0 - 4 \cdot 11}{4} = 25.$$

Равенство [32] дает

$$h = \frac{-12}{1} = -6.$$

Равенство [33] принимает для нашего случая вид

$$k = \frac{0}{2} = 0.$$

Уравнение $x^2 + y^2 = 25$ соответствует окружности радиуса 5 единиц, причем начало координат, к которому придется отнести график этого уравнения, чтобы преобразовать его в $x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$, лежит в точке (—6, 0) по отношению к центру окружности.

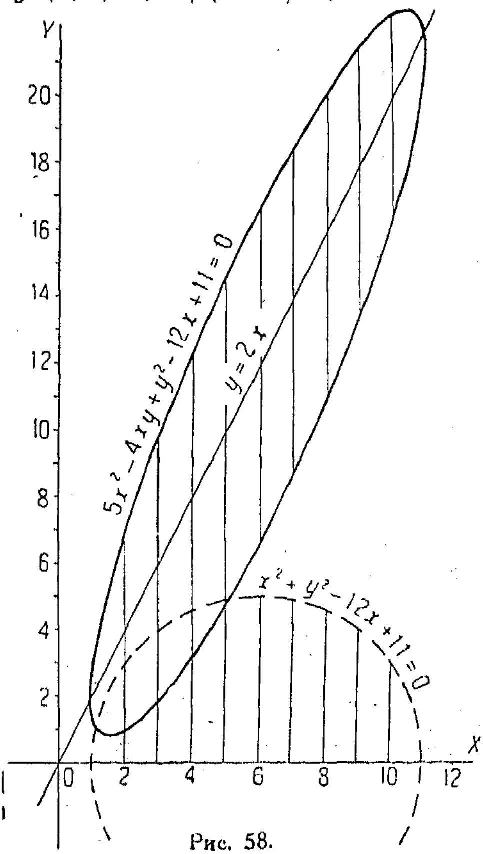


Рис. 58.

Начертим окружность и линию сдвига, а затем будем откладывать от последней ординаты окружности посредством циркуля.

Построение показано на рис. 58.

Пример 2. Построить график уравнения

$$2x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x - 12 = 0.$$

$$A = 2,\ B = 4,\ C = 4,\ D = -4,\ E = 0,\ F = -12.$$

Подставляя коэффициенты в ур-ние [40], имеем:

$$(16-32)x^2-64y^2+(0+64)x+(0+192)=0.$$

Упрощая, находим:

$$x^2+4y^2-4x-12=0.$$

Уравнение соответствует эллипсу, который следует преобразовать по методу сдвига.

Уравнение линии сдвига найдем, подставляя коэффициенты в [41]. Имеем:

$$y=-\frac{4}{8}x-0 \quad \text{или} \quad y=-\frac{1}{2}x.$$

Знак минус указывает на то, что наклон прямой — отрицательный.

Для получения остальных данных, характеризующих кривую, подставляем новые коэффициенты в ур-ние [30]:

$$A=1,\ C=4,\ D=-4,\ E=0,\ F=-12.$$

Пользуясь [30], [32] и [33], находим:

$$x^2+4y^2=\frac{16\cdot4-4\cdot1\cdot4(-12)}{4\cdot4}$$

или

$$x^2+4y^2=16, \quad h=-\frac{4}{2}, \quad k=0.$$

Для сдвига можно построить либо эллипс $x^2+4y^2=16$, причем начало координат придется перенести в точку $(-2,\ 0)$ (после чего кривая будет соответствовать уравнению $x^2+4y^2-4x-12=0$), либо окружность соответствующего радиуса. В последнем случае ординаты эллипса получатся при помощи циркуля для пропорционального деления. Покажем метод такого решения.

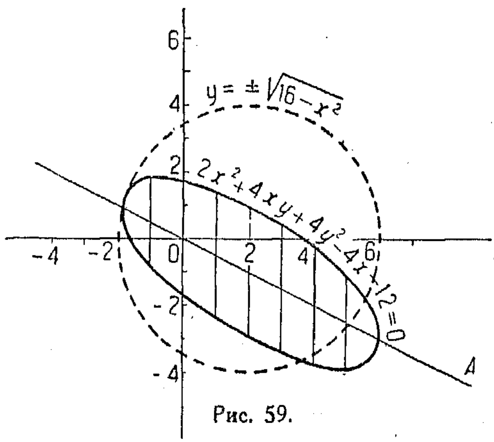


Рис. 59.

Уравнение $x^2+4y^2=16$ может быть представлено в таком виде:

$$y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}.$$

Сравнивая его с уравнением окружности

$$y=\pm\sqrt{16-x^2},$$

видим, что ординаты эллипса имеют длину вдвое меньшую соответствующих ординат окружности.

Начертим последнюю так, чтобы центр ее находился в точке $(2,\ 0)$, а радиус равнялся четырем единицам.

Установив циркуль для пропорционального деления для отношения $\frac{1}{2}:1$, откладываем соответствующие ординаты от линии OA, как это показано на рис. 59.

Пример 3. Построить график уравнения:

$$x^2 - 4xy + y^2 + 4\sqrt{2}\,x - 2\sqrt{2}\,y + 11 = 0.$$

Здесь

$$A = 1,\ B = -4,\ C = 1,\ D = 4\sqrt{2},\ E = -2\sqrt{2},\ F = 11.$$

Подставляя в [**40**], имеем:

$$[16 - 4\cdot 1\cdot 1]\,x^2 - 4y^2 + \{2(-4)(-2\sqrt{2}) - 4\cdot 1\,(4\sqrt{2})\}\,x + {}$$
$$+ [8 - 4\cdot 1\cdot 11] = 0.$$

Упрощая, получим:

$$x^2 - \frac{1}{3}y^2 = 3.$$

Подставляя коэффициенты в [**41**], определим уравнение линии сдвига

$$y = -\frac{-4}{2}x - \frac{-2\sqrt{2}}{2}$$

или

$$y = 2x + \sqrt{2}.$$

Сравнивая уравнение $x^2 - \frac{1}{3}y^2 = 3$ с уравнением равносторонней гиперболы $x^2 - y^2 = 3$, видим, что $n = \sqrt{\frac{1}{3}}$ и что отношение ординат равно

$$\frac{1}{n}:1 \quad \text{или} \quad \frac{1}{\sqrt{3}}:1, \text{ т. е. } 1{,}735:1.$$

Таким образом в данном случае ординаты, откладываемые от линии сдвига, будут длиннее, чем ординаты равносторонней гиперболы.

Начертим вертикальную прямую AC (рис. 60) длиной 1,735, а затем будем засекать из центра C на горизонтальной прямой AB точки дугами $x = 1, 2, 3, 4$ и т. д., как это описано в n^0 201.

Отрезки, измеряемые от точки A, дадут длины ординат равносторонней гиперболы, соответствующие значениям $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$ и т. д.

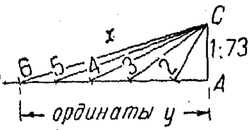


Рис. 60.

Взяв циркуль для пропорционального деления и поставив его так, чтобы отношение расстояний между остриями на обоих его концах равнялось 1,735 : 1, измеряем полученные ординаты равносторонней гиперболы короткой стороной циркуля. Затем, пользуясь длинной стороной циркуля, откладываем соответствующие отрезки от линии сдвига, получая таким образом точки искомой кривой (рис. 61).

209. Кривые, которые приходится преобразовывать по методу сдвига, всегда являются простыми параболами, гиперболами или эллипсами. Исключение представляют случаи, когда уравнение выражает точку или систему прямых линий.

Бывают однако случаи, когда например параболу или гиперболу приходится сдвигать по отношению к линии, почти перпендикулярной к оси X или образующей с последней угол больший 45°. При этом описанный ранее метод сдвига оказывается неудобным.

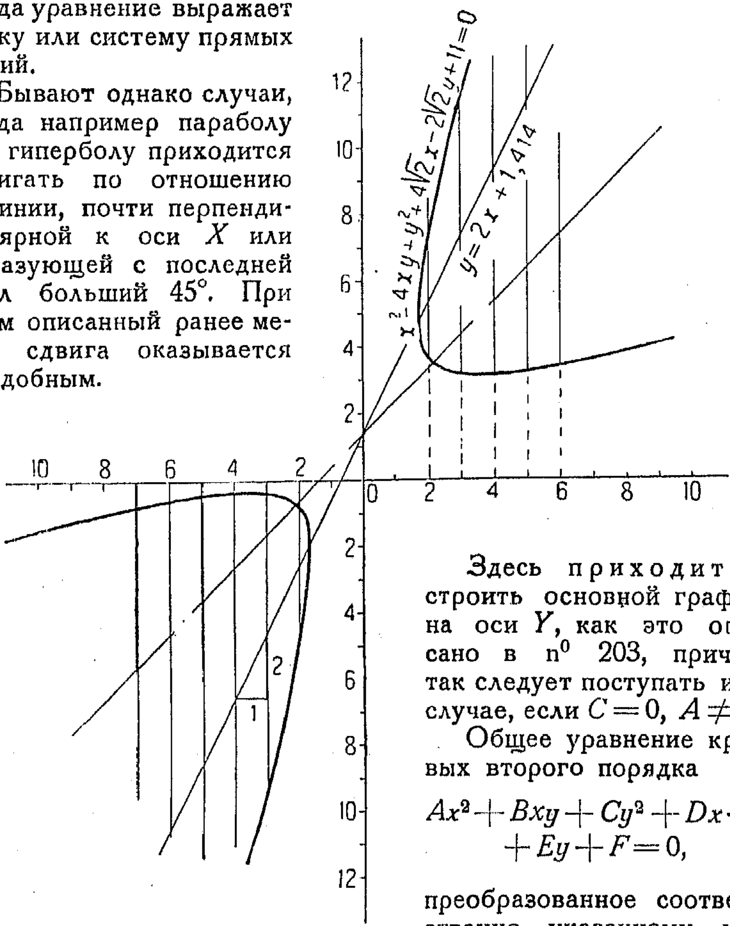


Рис. 61.

Здесь приходится строить основной график на оси Y, как это описано в n⁰ 203, причем так следует поступать и в случае, если $C=0$, $A\neq 0$.

Общее уравнение кривых второго порядка

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+ \\ +Ey+F=0,$$

преобразованное соответственно указанному методу, принимает вид:

$$[42]\quad (B^2-4AC)y^2-4A^2x^2+(2BD-4AE)y+(D^2-4AF)=0,$$

а уравнение линии сдвига будет:

$$[43]\quad x=-\frac{B}{2A}y-\frac{D}{2A}.$$

Оба эти выражения получены тем же путем, что [40] и [41], но исходные уравнения решены относительно x, а не относительно y.

Пример 4. Построить график уравнения

$$4x^2 - 4xy - 3y^2 + 64 = 0.$$

Здесь

$$A = 4,\ B = -4,\ C = -3,\ D = 0,\ E = 0,\ F = 64.$$

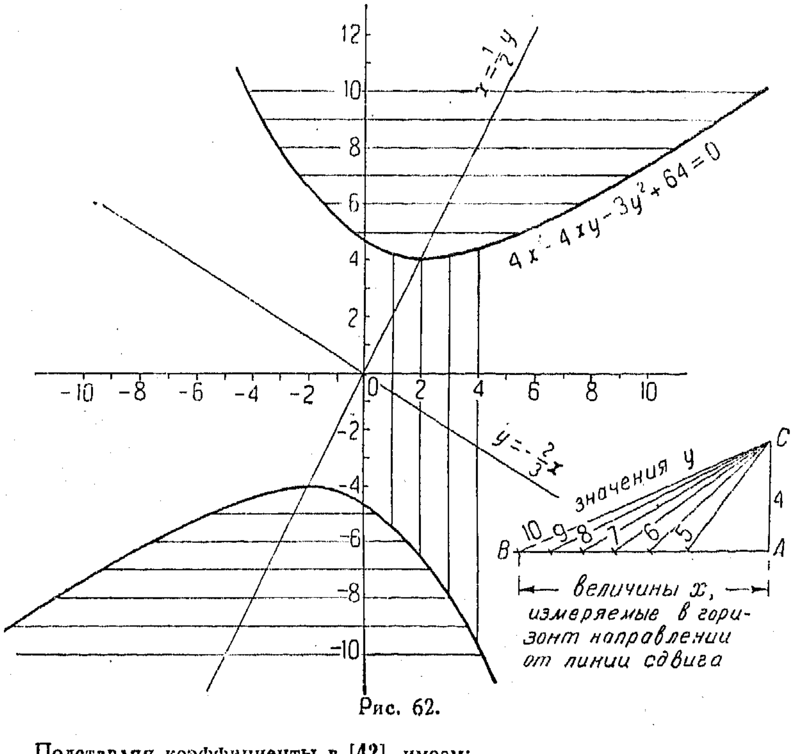


Рис. 62.

Подставляя коэффициенты в [42], имеем:

$$[16 - 4 \cdot 4\,(-3)]\,y^2 - 4 \cdot 16\,x^2 + (0 - 0)\,x + [0 - 4 \cdot 4 \cdot 64] = 0,$$

откуда

$$y^2 - x^2 = 16.$$

Получаемое уравнение соответствует кривой, для которой ось Y служит осью симметрии, пересекающей кривую (см. n⁰ 203); при этом гипербола сопряжена с гиперболой $x^2 - y^2 = 16$. Уравнение линии сдвига будет иметь вид

$$x = -\frac{-4}{2 \cdot 4}\,y - \frac{0}{8} \qquad \text{или} \qquad x = \frac{1}{2}\,y.$$

В данном случае, как и ранее, находим при помощи прямоугольного треугольника значения x для $y = 1$, 2 и т. д. (рис. 62) и откладываем их горизонтально от линии сдвига.

Для того чтобы выяснить, следует ли применять формулы [**40**] и [**41**] или [**42**] и [**43**], необходимо первоначально определить положение линии сдвига.

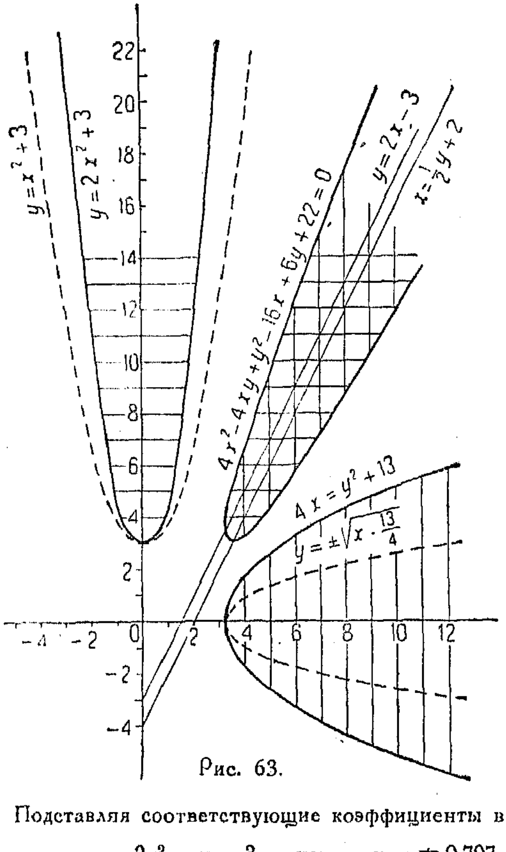


Рис. 63.

Для сравнения обоих указанных приемов на чертеже указана линия сдвига, соответствующая уравнению [**41**] и построено несколько ординат по ур-нию [**40**].

Пример 5. Построить график уравнения

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 16x + 6y + 22 = 0.$$

Согласно [41], находим уравнение линии сдвига

$$y = 2x - 3,$$

а из ур-ния [**43**]

$$x = \frac{1}{2}y + 2.$$

Обе линии сдвига имеют большой наклон, и хотя естественнее воспользоваться формулами [**42**] и [**43**], но для иллюстрации решим задачу, пользуясь обоими методами.

Из данного уравнения имеем:

$A = 4$, $B = -4$, $C = 1$, $D = -16$, $E = 6$, $F = 22$.

Подставляя соответствующие коэффициенты в [**42**], находим:

$$2x^2 = y - 3 \quad \text{или} \quad x = \pm 0{,}707\sqrt{y-3}.$$

Если поместить вершину основного графика функции $y = x^2$ или $x = \pm\sqrt{y}$ в точку (0, 3), то он будет соответствовать функции $x = \pm\sqrt{y-3}$, причем его ось симметрии будет совпадать с осью Y.

Отношение абсцисс параболы $x = \pm 0{,}707\sqrt{y-3}$ к абсциссам параболы $x = \pm\sqrt{y-3}$ равно отношению 0,707 : 1. Установив циркуль для пропорционального деления так, чтобы он давал отношения 0,707 : 1, и откладывая от линии сдвига $x = \frac{1}{2}y + 2$ полученные абсциссы, как это выполнялось в предыдущих примерах, найдем точки искомой кривой.

Если бы было найдено необходимым применять формулы [40] и [41], то кривая, которую пришлось бы преобразовывать по методу сдвига, имела бы уравнение

$$4x = y^2 + 13 \quad \text{или} \quad y = \pm 2\sqrt{x - \frac{13}{4}}.$$

Применяя основной график $x = y^2$ или $y = \pm\sqrt{x}$ и помещая его вершину в точку $\left(\frac{13}{4}, 0\right)$, получим кривую, соответствующую уравнению $y = \pm\sqrt{x - \frac{13}{4}}$. Отношение ординат последней к ординатам графика функции $y = \pm 2\sqrt{x - \frac{13}{4}}$ равно $2:1$. Для нахождения точек искомой кривой устанавливаем циркуль для пропорционального деления на отношение $2:1$, а затем откладываем ординаты от линии сдвига $y = 2x - 3$. Все полученные графики представляют собой параболы (рис. 63).

210. Однородные квадратные уравнения. Уравнения, все члены которых имеют один и тот же порядок (одно и то же измерение) по отношению к содержащимся в них неизвестным, называются *однородными*.

Общая форма однородного квадратного уравнения такова:

[44] $$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0.$$

Уравнения этого вида всегда могут быть разложены на множители.

Деля на Ay^2 и дополняя до квадрата, получим:

$$\left(\frac{x^2}{y^2}\right) + \frac{B}{A}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{B^2}{4A^2} = \frac{B^2}{4A^2} - \frac{C}{A}.$$

Извлекая квадратный корень, имеем:

$$\frac{x}{y} + \frac{B}{2A} = \pm\sqrt{\frac{B^2 - 4AC}{4AC}}.$$

[45] $$\frac{x}{y} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

Интересно отметить, что отношение неизвестных в ур-нии [45] имеет ту же величину, что и корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, написанного в явной форме (см. nn⁰ 182 и 183).

Выражение [45] можно представить в таком виде:

[46] $$\begin{cases} x - \left(\dfrac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}\right)y = 0 \\ x - \left(\dfrac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}\right)y = 0. \end{cases}$$

Теперь линейные уравнения можно получить посредством прямой подстановки значений коэффициентов уравнения [**44**] в [**46**].

Уравнение [**44**] может быть написано в виде произведения двух множителей:

$$A\left(x-\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}y\right)\left(x-\frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}y\right)=0.$$

Множители, на которые разлагается трехлен [**44**], могут быть получены решением ур-ния [**44**] относительно $\frac{1}{x}$. Линейные уравнения представляются в виде

[**48**] $$y=\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2C}x,\quad y=\frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2C}x.$$

Если одно из двух квадратных уравнений, входящих в систему, однородно, то система решается посредством разложения на множители однородного уравнения.

Пример. Решить систему

$$x^2-3y^2+2y=3 \tag{a}$$

$$2x^2-7xy+6y^2=0. \tag{b}$$

Уравнение (b) принадлежит к виду [**44**], а потому может быть разложено на множители. Имеем:

$$A=2,\quad B=-7,\quad C=6.$$

Подставляя в [46], получим:

$$x-\frac{7+\sqrt{49-4\cdot 2\cdot 6}}{2\cdot 2}y=0.$$

$$x-2y=0 \text{ или } x=2y.$$

Кроме того

$$x-\frac{7-\sqrt{49-4\cdot 2\cdot 6}}{2\cdot 2}y=0.$$

$$x-\frac{3}{2}y=0 \quad \text{или} \quad x=\frac{3}{2}y.$$

Подставляя значения $x=2y$ и $x=\frac{3}{2}y$ в уравнение (a), имеем:

$$x=2,\quad -6,\quad 2+\sqrt{-5},\quad 2-\sqrt{-5}.$$

$$y=1,\quad -3,\quad \frac{4+2\sqrt{-5}}{3},\quad \frac{4-2\sqrt{-5}}{3}.$$

211. Системы квадратных уравнений вида

[49] $$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0.$$

[50] $$A_1x^2 + B_1xy + C_1y^2 + F_1 = 0.$$

Умножая ур-ние [49] на F_1, а [50] — на F, и вычитая после этого [50] из [49], исключим постоянные члены и получим однородные квадратные уравнения, которые разлагаются на множители.

[51] $$(AF_1 - A_1F)x^2 + (BF_1 - B_1F)xy + (CF_1 - C_1F)y^2 = 0.$$

Разделив на $(AF_1 - A_1F)y^2$ и дополнив до квадрата, получим после упрощений:

$$\frac{x}{y} = \frac{BF_1 - B_1F \pm \sqrt{(B^2 - 4AC)F_1^2 + (B_1^2 - 4A_1C_1)F^2 - 2FF_1[BB - 2(A_1C + AC_1)]}}{2(A_1F - AF_1)}$$

Линейные уравнения, которые заменят [51] после разложения ее на множители, будут:

[52] $$x = \frac{BF_1 + B_1F - \sqrt{(B^2 - 4AC)F_1^2 + (B_1^2 - 4A_1C_1)F^2 - 2FF_1[BB_1 - 2(A_1C + AC_1)]}}{2(A_1F - AF_1)}\, y$$

и

[53] $$x = \frac{BF_1 - B_1F - \sqrt{(B^2 - 4AC)F_1^2 + (B_1^2 - 4A_1C_1)F^2 - 2FF_1[BB_1 - 2(A_1C + AC_1)]}}{2(A_1F - AF_1)}\, y$$

Эти линейные уравнения могут быть получены прямой подстановкой коэффициентов A, B, C и т. д., взятых из данных уравнений.

Чтобы закончить задачу, следует решить совместно каждое из линейных ур-ний [52] и [53] с одним из ур-ний [49] или [50]. Самое решение можно произвести графически или аналитически.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 4 = 0 & (1) \\ 4xy - 5y^2 - 3 = 0. & (2) \end{cases}$$

Здесь

$$A = 2,\quad B = -3,\quad C = 0,\quad F = 4.$$
$$A_1 = 0,\quad B_1 = 4,\quad C_1 = -5,\quad F_1 = -3.$$

Подставляя в формулу [52], имеем:

$$x = \frac{(-3)(-3) - 4\cdot4 \pm \sqrt{(9-0)9 + (16-0)16 - 2\cdot4(-3)\{(-3)4 - 2[0 + 2(-5)]\}}}{2[0 - 2(-3)]}\, y,$$

откуда

$$x = \frac{9 - 16 + 23}{12}y = \frac{4}{3}y.$$

Точно так же из [53] найдем:

$$x = \frac{9 - 16 - 23}{12} y = -\frac{5}{2} y.$$

Таким образом получим два линейных уравнения:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ 2x + 5y = 0. \end{cases}$$

Решая совместно с данными уравнениями (1) и (2), найдем значения неизвестных, удовлетворяющих данной системе, а именно:

$$x = 4, \quad -4, \quad \frac{\sqrt{-5}}{2}, \quad -\frac{\sqrt{-5}}{2};$$

$$y = 3, \quad -3, \quad -\frac{\sqrt{-5}}{5}, \quad +\frac{\sqrt{-5}}{5}.$$

Таким образом, уравнения имеют по два действительных и по два мнимых корня.

Рассмотренный вид является общим видом квадратных уравнений, содержащих члены с неизвестными во второй степени (включая и член с xy, являющийся величиной второго порядка) и постоянный член. В указанные уравнения не входят только члены с неизвестными в первой степени.

Как видно из последнего примера, в уравнениях может отсутствовать любой член. Так например, в (1) отсутствует Cy^2, а во (2) — член Ax^2. В этом случае в формулы следует подставить $C = 0$ и $A_1 = 0$.

Если в уравнении отсутствует постоянный член F_1, т. е. $F_1 = 0$, то

$$x = \frac{-B_1F \pm \sqrt{(B_1{}^2 - 4A_1C_1)F^2}}{2A_1F} y$$

или

[54] $$x = \frac{-B_1 \pm \sqrt{B_1{}^2 - 4A_1C_1}}{2A_1} y.$$

Эти линейные уравнения могут быть решены совместно с [49] или [50], как это было сделано в n⁰ 210.

212. Квадратные уравнения вида

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0$$

$$A_1x^2 + C_1y^2 + F_1 = 0. \quad [18]$$

Будем считать x^2 и y^2 за неизвестные и обозначим их через u и v соответственно так, что

$$u = x^2, \qquad v = y^2.$$

Подставив в оба заданные уравнения, находим

[55] $$\begin{cases} Au + Cv + F = 0 \\ A_1u + C_1v + F_1 = 0. \end{cases}$$

Последние уравнения соответствуют прямым линиям, т. е. являются линейными относительно u и v. Таким образом из них можно определить эти неизвестные, а следовательно x и y, причем

$$x = \pm\sqrt{u}\,, \qquad y = \pm\sqrt{v}\,.$$

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} 16x^2 + 27y^2 = 576 & (1) \\ x^2 + y^2 = 25. & (2) \end{cases}$$

Здесь

$$A = 16, \quad C = 27, \quad F = -576$$
$$A_1 = 1, \quad C_1 = 1, \quad F_1 = -25.$$

Подставляя значения коэффициентов в [55], имеем:

$$\begin{cases} 16u + 27v = 576 & (3) \\ u + v = 25 & (4) \end{cases}$$

Для того, чтобы исключить v, умножаем (4) на 27 и вычитаем из (3):

$$\begin{cases} 16u + 27v = 576 \\ 27u + 27v = 675, \end{cases}$$

откуда

$$11u = 99$$
$$u = 9$$
$$x = \pm 3.$$

Подставляя $u = 9$ в (4), находим

$$y = \pm 4.$$

Каждое значение x может быть взято с каждым из значений y, причем образуются следующие четыре комбинации:

$$(3, 4), \ (-3, 4), \ (3, -4), \ (-3, -4).$$

Другой способ решения заключается в том, что рассматривают (1) как особую форму уравнений, рассмотренных в n⁰ 211, где B и B_1 равны нулю. В этом случае найдем линейные уравнения

[56] $$x = +\frac{\sqrt{F_1F(A_1C + AC_1) - ACF_1^2 - A_1C_1F^2}}{A_1F - AF_1}\,y$$

$$[57] \quad x = -\frac{\sqrt{FF_1(A_1C + AC_1) - ACF_1^2 - A_1C_1F^2}}{A_1F - AF_1}\, y.$$

Подставляя в эти формулы соответствующие коэффициенты, имеем:

$$x = \pm \frac{\sqrt{25 \cdot 576\,(27 + 16) - 16 \cdot 27 \cdot 25 \cdot 25 - 1 \cdot 1 \cdot 576 \cdot 576}}{-576 - 16\,(-25)}\, y =$$

$$= \pm \frac{\sqrt{619\,200 - 270\,000 - 331\,776}}{-576 + 400}\, y = \pm \frac{132}{176}\, y = \pm \frac{3}{4}\, y.$$

Линейные уравнения имеют вид

$$4x + 3y = 0$$
$$4x - 3y = 0.$$

Решая эти уравнения совместно с (1) или (2), например посредством подстановки, получим искомые корни. Так как ур-ние (2) соответствует окружности, то графическое решение задачи очень просто.

213. Уравнения вида

$$[58] \qquad \begin{cases} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx = 0 \\ A_1x^2 + B_1xy + C_1y^2 + D_1x = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Ey = 0 \\ A_1x^2 + B_1xy + C_1y^2 + E_1y = 0. \end{cases}$$

В обеих системах уравнений все члены (за исключением членов с неизвестным в первой степени) одного и того же порядка по отношению к неизвестным.

Члены же первой степени в обоих уравнениях сходны.

Для решения такой системы необходимо прежде всего исключить последние члены, после чего получим однородное уравнение. Это уравнение разложим на множители, пользуясь формулой [46], а затем полученные линейные уравнения решим совместно с одним из данных, причем здесь можно применить как графический, так и аналитический методы.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} x^2 + 2xy = 6y & (1) \\ 2x^2 - xy + y^2 = 4y. & (2) \end{cases}$$

Умножая (1) на 2, а (2) на 3, получим:

$$\begin{cases} 2x^2+4xy=12y & (3) \\ 6x^2-3xy+3y^2=12y. & (4) \end{cases}$$

Вычитая (3) из (4), находим:

$$4x^2-7xy+3y^2=0. \qquad (5)$$

Последнее уравнение является однородным, а потому может быть разложено на множители.

Заметив, что в нем

$$A=4,\quad B=-7,\quad C=3,$$

подставляем в [46] (n^0 210):

$$x-\frac{7+\sqrt{49-4\cdot4\cdot3}}{2\cdot4}\,y=0,$$

$$x-\frac{7+1}{8}\,y=0;$$

первое линейное уравнение:

$$x=y. \qquad (6)$$

Кроме того

$$x-\frac{7-1}{8}\,y=0,$$

второе линейное уравнение

$$x=\frac{3}{4}\,y. \qquad (7)$$

Решая эти уравнения совместно с (1), имеем:

$$\begin{cases} x^2+2xy=6y & (1) \\ x=y & (6) \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+2xy=6y & (1) \\ x=\frac{3}{4}\,y & (7) \end{cases}$$

Подставляя (6) в (1):

$$y^2+2y^2-6y=0$$

$$3y^2-6y=0$$

$$y^2-2y=0.$$

Дополняя до квадрата, получим:

$$y^2-2y+1=1;$$

$$y-1=\pm1;$$

$$y=2 \text{ или } 0,$$

откуда,

$$x=2 \text{ или } 0.$$

Подставляя (7) в (1):

$$\frac{9}{16}y^2+\frac{3}{2}y^2-6y=0$$

$$33y^2-96y=0$$

$$11y^2-32y=0.$$

$$121y^2-352y+256=256;$$

$$11y-16=\pm16,$$

$$y=\frac{32}{11} \text{ или } 0,$$

откуда

$$x=\frac{24}{11} \text{ или } 0.$$

214. Система симметричных уравнений. Уравнение, которое не изменяется при перестановке коэффициентов у соответствующих членов его, называется *симметричным.*

Таковы например уравнения:

$$\begin{cases} 2x^2+xy+2y^2=4, \\ x^2+y^2+x+y=8. \end{cases}$$

Общая форма уравнений этого вида такова:

$$\left.\begin{aligned} A(x^2+y^2)+Bxy+D(x+y)+F=0 \\ A_1(x^2+y^2)+B_1xy+D_1(x+y)+F_1=0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Положим $x=u+v$, а $y=u-v$ и подставим эти значения в (1); тогда получим:

$$A(u^2+2uv+v^2+u^2-2uv+v^2)+B(u^2-v^2)+$$
$$+D(2u)+F=0.$$

Приводя подобные члены и предполагая, что оба уравнения симметричны, имеем:

$$(2A+B)u^2+(2A-B)v^2+2Du+F=0 \quad (2)$$
$$(2A_1+B_1)u^2+(2A_1-B_1)v^2+2D_1u+F_1=0. \quad (3)$$

Ур-ние (1) может быть обращено в квадратное относительно неизвестных u и v посредством прямой подстановки коэффициентов A, B, C и A_1, B_1, C_1 в (2) и (3).

Исключив из этих уравнений v^2, найдем значения u и v.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y=8 & \text{(a)} \\ xy+x+y=5. & \text{(b)} \end{cases}$$

В ур-нии (a) коэффициенты

$$A=1, \quad B=0, \quad D=1, \quad F_1=-8.$$

Подставляя их в формулу (2), найдем:

$$2u^2+2v^2+2u-8=0$$

или

$$u^2+v^2+u-4=0. \quad \text{(c)}$$

В ур-нии (b) коэффициенты

$$A_1=0, \quad B_1=1, \quad D_1=1, \quad F_1=-5,$$

так что после подстановки в (3) получим:

$$u^2-v^2+2u=5. \quad \text{(b)}$$

Решая совместно уравнения

$$\begin{cases} u^2+v^2+\ u=4 & \text{(c)} \\ u^2-v^2+2u=5, & \text{(d)} \end{cases}$$

исключим v^2 путем их сложения. Тогда имеем:

$$2u^2+3u=9, \tag{e}$$

откуда

$$u=\frac{3}{2} \text{ или } -3.$$

Четыре решения ур-ний (c) и (d) суть:

$$u=\frac{3}{2},\quad \frac{3}{2},\quad -3,\quad -3;$$

$$v=\frac{1}{2},\quad -\frac{1}{2},\quad i\sqrt{2},\quad -i\sqrt{2}.$$

Так как $x=u+v$, а $y=u-v$, то

$$x=1,\quad -3+i\sqrt{2},\quad -3-i\sqrt{2},\ 2$$

$$y=2,\quad -3-i\sqrt{2},\quad -3+i\sqrt{2},\ 1.$$

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y=8 \\ xy=2. \end{cases}$$

Имеем для (2) n° 214:

$$A=1,\quad B=0,\quad D=1,$$

откуда

$$A_1=0,\quad B_1=1,\quad D_1=0;$$

для (3) n° 214:

$$2u^2+2v^2+2u=8$$

или

$$u^2+v^2+u=4 \tag{c}$$

$$u^2-v^2=2\,. \tag{d}$$

Исключая v^2 путем сложения, имеем:

$$2u^2+u=6.$$

Дополняем до квадрата:

$$4u^2+2u+\frac{1}{4}=12\frac{1}{4}$$

$$2u+\frac{1}{2}=\pm\frac{7}{2}, \text{ т. е. } u=\frac{3}{2},\quad -2\,.$$

Подстановки $u=\frac{3}{2}$ в (c) дает: $v=\pm\frac{1}{2}$, а подстановка $u=-2$ дает: $v=\pm\sqrt{2}$.

Таким образом, значения u и v суть

$$u=\frac{3}{2},\quad \frac{3}{2},\quad -2,\quad -2$$
$$v=\frac{1}{2},\quad -\frac{1}{2},\quad +\sqrt{2},\quad -\sqrt{2}$$
$$x=\frac{3}{2}+\frac{1}{2},\quad \frac{3}{2}-\frac{1}{2},\quad -2+\sqrt{2},\quad -2-\sqrt{2}$$
$$y=\frac{3}{2}-\frac{1}{2},\quad \frac{3}{2}+\frac{1}{2},\quad -2-\sqrt{2},\quad -2+\sqrt{2}.$$

215. Частный случай. Если одно уравнение симметрично, а симметричность второго нарушена различием знаков его членов, то для решения задачи следует прежде всего найти значения $(x+y)$ и $(x-y)$.

Пример. Найти корни уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=68 & (1)\\ x-y=6. & (2)\end{cases}$$

Возвышаем (2) в квадрат:

$$x^2-2xy+y^2=36. \qquad (3)$$

Вычитаем (3) из (1):

$$+2xy=32. \qquad (4)$$

Складывая (4) и (1), имеем:

$$x^2+2xy+y^2=100.$$

Извлекаем квадратный корень:

$$x+y=\pm 10. \qquad (5)$$

Из (5) и (2):

$$x=8 \text{ или } -2,$$
$$y=2 \text{ или } -8.$$

216. Уравнения более высоких степеней, если они симметричны или если симметрия нарушается только в отношении знака, часто удается решить путем подстановки $x=u+v$ и $y=u-v$.

Пример. Найти корни уравнений

$$\begin{cases} x^4+y^4=272 & (1)\\ x-y=2. & (2)\end{cases}$$

Положим $x=u+v$, $y=u-v$; тогда:

$$u^4+4u^3v+6u^2v^2+4uv^3+v^4+u^4-4u^3v+6u^2v^2-4uv^3+v^4=272. \qquad (3)$$

Из (2)

$$2v=2 \text{ или } v=1. \qquad (4)$$

Деля (3) на 2 имеем:

$$u^4 + 6u^2v^2 + v^4 = 136. \quad (5)$$

Подставляя в (5) вместо v — единицу, имеем:

$$u = \pm 3 \text{ или } \pm \sqrt{-15}.$$

Подставляя эти значения u и v в выражения $x = u + v$, $y = u - v$, имеем:

$$x = 4, \quad -2, \quad 1 + \sqrt{-15}, \quad 1 - \sqrt{-15};$$

$$y = 2, \quad -4, \quad -1 + \sqrt{-15}, \quad -1 - \sqrt{-15}.$$

217. Решение посредством преобразования уравнений. Многие системы уравнений могут быть легко решены посредством нахождения величины для каждых двух выражений

$$x + y, \quad x - y, \quad xy,$$

а равно и других функций x и y, из которых можно получить значения этих неизвестных.

Пример 1. Найти корни уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 15(x - 2y) + 80 = 0 & (1) \\ xy = 6. & (2) \end{cases}$$

Умножая (2) на 4 и вычитая из (1), имеем:

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + 4y^2 - 15(x - 2y) + 56 = 0 \\ (x - 2y)^2 - 15(x - 2y) + 56 = 0. \end{cases}$$

Решаем сначала относительно функции $(x - 2y)$, а затем относительно x и y.

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} x^2 + xy = 12 & (1) \\ xy + y^2 = 4. & (2) \end{cases}$$

Складывая (1) и (2), находим:

$$x^2 + 2xy + y^2 = 16. \quad (3)$$

Вычитая (2) из (1):

$$x^2 - y^2 = 8. \quad (4)$$

Извлекая квадратный корень из (3):

$$x + y = \pm 4. \quad (5)$$

Разделив (4) на (5), находим:

$$x - y = \pm 2. \quad (6)$$

Из (5) и (6):

$$x = 3 \text{ или } -3; \quad y = 1 \text{ или } -1.$$

Первое значение $x - y$ соответствует только первому значению $x + y$. Следовательно, для x и y имеется только две пары значений

Иногда применяются специальные способы решений, при которых сперва находят величины выражений

$$\sqrt{xy},\quad \sqrt{x+y},\quad \frac{1}{x},\quad \frac{1}{y},\quad xy,\quad (x+y),\quad (x+y)^2,\quad x^2y \text{ и т. д.},$$

после чего определяют x и y.

В некоторых случаях оказывается удобным вводить новые переменные, например $\sqrt{xy}=u$ и т. д. Наиболее обычны подстановки

$$x=u+v,\quad y=u-v,\quad y=vx.$$

Часто путем небольших изменений формы уравнения его легко привести к виду, удобному для решения.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=52 & (1)\\[2ex] \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=2. & (2)\end{cases}$$

Возвышая в квадрат ур-ние (2), имеем:

$$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2xy}+\frac{1}{y^2}=4. \qquad (3)$$

Вычитая (3) из (1), получим:

$$\frac{1}{2xy}=48. \qquad (4)$$

Прибавляя (4) к (1):

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2xy}+\frac{1}{y^2}=100.$$

Извлекая квадратный корень:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\pm 10. \qquad (5)$$

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=2. \qquad (2)$$

Складывая (2) и (5):

$$\frac{2}{x}=12 \text{ или } -8$$

$$\frac{1}{x}=6 \text{ или } -4.$$

$$x=\frac{1}{-4} \text{ или } \frac{1}{6}.$$

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} x+y+\sqrt{x+y}=20 \\ x-y-\sqrt{x-y}=6. \end{cases}$$

Рассматривая $\sqrt{x+y}$ и $\sqrt{x-y}$ как неизвестные, определяем их, а затем находим x и y.

218. Деление одного уравнения на другое. Система из двух уравнений более высоких степеней может быть часто решена посредством деления одного из них на другое.

Пример.

$$\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=336 & (1) \\ x^2-xy+y^2=12. & (2) \end{cases}$$

Разделив (1) на (2), находим:

$$x^2+xy+y^2=28. \qquad (3)$$

Вычитая (2) из (3), имеем:

$$2xy=16$$

$$xy=8. \qquad (4)$$

Прибавляя (3) к (4) и извлекая квадратный корень, имеем:

$$x+y=\pm 6. \qquad (5)$$

Вычитая (4) из (2):

$$x^2-2xy+y^2=4.$$

Извлекая квадратный корень:

$$x-y=\pm 2. \qquad (6)$$

Из (5) и (6):

$$x=4,\ 2,\ -2,\ -4.$$

$$y=2,\ 4,\ -4,\ -2.$$

Так как (5) и (6) были выведены независимо друг от друга, мы берем первое значение $x+y$ с каждым из последовательных значений $x-y$, а второе значение $x+y$ — с каждым последовательным значением $x-y$ в том же порядке. Таким образом получим четыре пары значений для x и y.

219. Уравнения с тремя неизвестными. В этом случае рассматриваем систему двух уравнений, из которых исключаем одно неизвестное. Полученное уравнение решаем совместно с третьим, которое должно содержать неизвестные в простейшей форме.

Пример 1.

$$x^2+y^2+z^2=30 \qquad (1)$$

$$xy+yz+zx=17 \qquad (2)$$

$$x-y-z=2. \qquad (3)$$

Складываем удвоенное ур-ние (2) с (1) и, извлекая квадратный корень, получим (4).

Решая совместно (4) и (3), найдем нужные корни.

Пример 2. Найти корни

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=81 \\ x+y+z=14 \\ xy=8. \end{cases}$$

Прибавляем $2xy=16$ к (1) и подставляем $z=14-(x+y)$ в полученное уравнение. Находим сначала $x+y$, а затем x и y.

220. Графическое решение системы уравнений, некоторые из которых — квадратные. Решим графически систему

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x-y=-1. \end{cases}$$

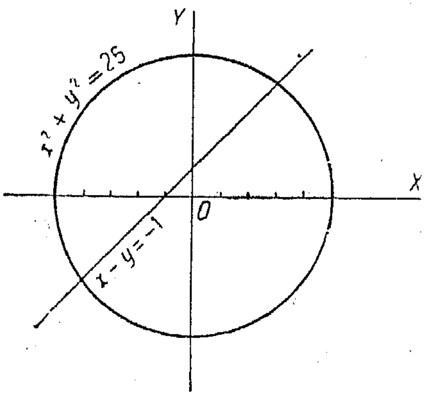


Рис. 64.

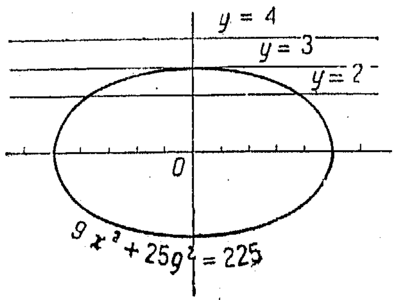


Рис. 65

Построив графики, видим, что первое уравнение соответствует окружности, а второе — прямой. Последняя пересекает окружность в двух точках: $(-4, -3)$ и $(3, 4)$. Таким образом система имеет два решения, а именно:

$$x=+3,\ y=+4 \text{ и } x=-4,\ y=-3.$$

Графики изображены на рис. 64.

Решим графически систему:

$$\begin{cases} 9x^2+25y^2=225 \\ y=2. \end{cases}$$

Первое уравнение соответствует эллипсу, второе — прямой, параллельной оси X (рис. 65).

Точки пересечения их суть:

$$x=3{,}7,\ y=2 \quad \text{и} \quad x=-3{,}7,\ y=2.$$

Полученные корни действительны и неравны между собой. Если бы уравнение прямой было $y=3$, то уравнение имело бы два действительных корня:

$$x=0,\ y=3 \quad \text{и} \quad x=0.\ y=3.$$

Если бы уравнение прямой имело вид $y=4$, графики не пересекались бы и корни были бы мнимыми.

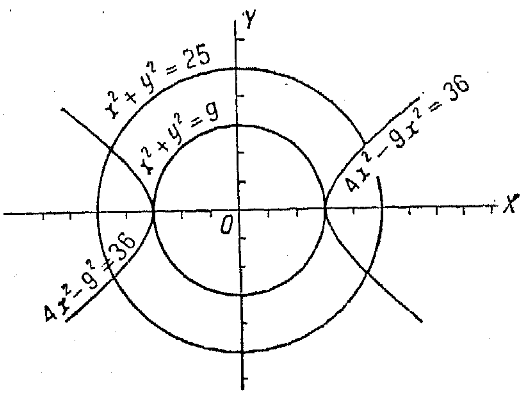


Рис. 66.

Система двух независимых уравнений с неизвестными x и y, из которых одно — линейное, а другое — квадратное, имеет два решения. Решения эти совпадают, если графики касаются друг друга, действительны и различны, если графики пересекаются, и мнимые — если они не пересекаются, т. е. если они не имеют общих точек.

Решим графически систему (рис. 66):

$$\begin{cases} 4x^2-9y^2=36 \\ x^2+y^2=25. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x&=4{,}5; & 4{,}5;& & -4{,}5;& & -4{,}5\\ y&=2{,}2; & -2{,}2;& & -2{,}2;& & 2{,}2. \end{aligned}$$

Для уравнения $x^2+y^2=9$:

$$\begin{aligned} x&=3; & 3;& & -3;& & -3\\ y&=0; & 0;& & 0;& & 0. \end{aligned}$$

Система двух независимых уравнений второй степени относительно x и y имеет четыре решения.

Точки пересечения их графиков соответствуют действительным решениям, а точки касания — паре равных совпадающих решений.

Если число действительных решений меньше четырех, то остальные корни — мнимые.

221. Во многих случаях единственным практически удобным способом решения системы квадратных уравнений является графический способ.

График каждого квадратного уравнения строится по методам, описанным выше (nn^0 196—210), после чего определяются точки их пересечения. Применим несколько построенных ранее графиков к решению нижеследующих примеров.

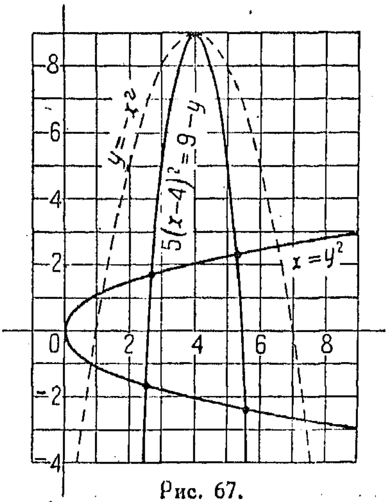


Рис. 67.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} y^2 = x & (1) \\ 5\,(x-4)^2 = 9 - y. & (2) \end{cases}$$

Второе уравнение соответствует параболе вида

$$y_1 + k = a\,(x+h)^2,$$

где $a = -5$, $k = -9$, $h = -4$ (n^0 172).

График функции $y = x^2$, который можно применить для решения, должен быть перевернут, так как a — отрицательное.

Начало координат расположится в точке (h, k), т. е. $(-4, -9)$, причем для преобразования ординат кривой $y = x^2$ можно применить циркуль для пропорционального деления, установленный на отношение $5:1$.

Для первого уравнения строим основной график функции $x = y^2$, причем вершина его совпадает с началом координат, а самая кривая обращена в сторону положительных x-ов.

Ось абсцисс является осью симметрии. Точки пересечения обеих кривых дают значения x и y, удовлетворяющие уравнениям (1) и (2) (рис 67).

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 + 4\sqrt{2}\,x + 2\sqrt{2}\,y + 11 = 0 \text{ (рис. 61).} \\ 5x^2 - 4xy + y^2 - 12x + 11 = 0 \text{ (рис. 58).} \end{cases}$$

Графики построены по методу, указанному в n^0 208. Значения неизвестных, удовлетворяющих обоим уравнениям, определяются точками пересечения кривых (рис. 68).

Пример 3. Решить систему:

$$\begin{cases} y^2 - 2xy + x^2 - 2x - 3 = 0 \text{ (рис. 57)} \\ 2x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x - 12 = 0 \text{ (рис. 59).} \end{cases}$$

Построение графиков произведено в n^0 208. Пересечения их определяют значения неизвестных, удовлетворяющих уравнениям рис. 69.

222. Система квадратных уравнений с иррациональными корнями. В n⁰ 195 был рассмотрен способ проверки корней, найденных из графиков, для случая квадратного уравнения с одним неизвестным. Тот же самый метод можно применить и для системы квадратных уравнений с двумя неизвестными.

Пример. Найти приближенное значение корней системы

$$\begin{cases} x^2+y^2-5\sqrt{2x}-5\sqrt{2}y=0 & (1) \\ xy-2x+y=8, & (2) \end{cases}$$

близкое к точным значениям их.

График каждого из этих уравнений строится, как это указано в пп⁰ 205 и 207 (рис. 70).

Уточним координаты точки пересечения $P(x, y)$.

Другую точку читатель может определить сам, пользуясь ею в качестве примера для упражнения.

Рассматривая график, видим, что для точки $P(x, y)$

$x = 8,5$ (приблизительно)

$y = 2,6$ (приблизительно).

Пусть

$$x = 8,5 + h \quad (3)$$

$$y = 2,6 + k \quad (4)$$

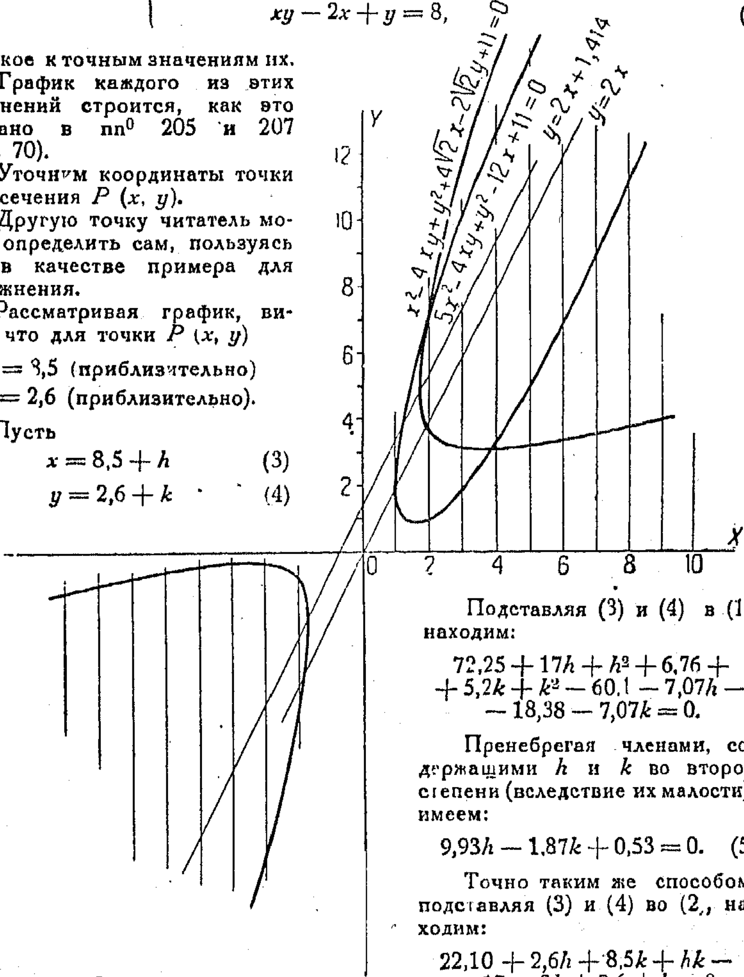


Рис. 63.

Подставляя (3) и (4) в (1), находим:

$$72,25+17h+h^2+6,76+ \\ +5,2k+k^2-60,1-7,07h- \\ -18,38-7,07k=0.$$

Пренебрегая членами, содержащими h и k во второй степени (вследствие их малости), имеем:

$$9,93h-1,87k+0,53=0. \quad (5)$$

Точно таким же способом, подставляя (3) и (4) во (2), находим:

$$22,10+2,6h+8,5k+hk- \\ -17-2h+2,6+k=8.$$

Пренебрегая членом, содержащим произведение неизвестных, имеем:

$$0{,}6h + 9{,}5k - 0{,}3 = 0. \qquad (6)$$

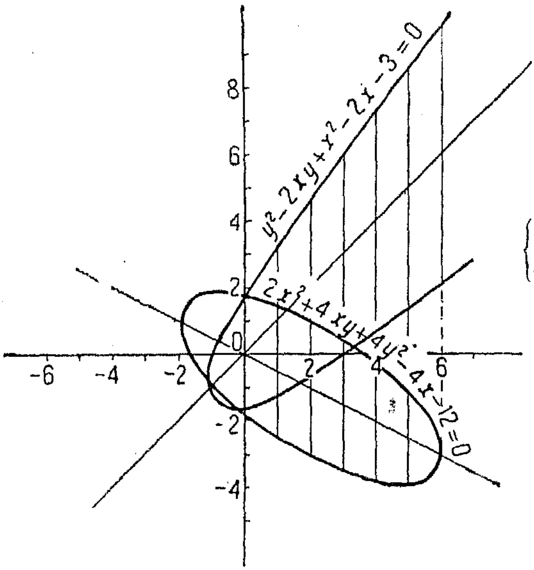


Рис. 69.

Решим линейные уравнения (5) и (6) совместно:

$$\begin{cases} 9{,}93h - 1{,}87k + 0{,}53 = 0 & (5) \\ 0{,}6h + 9{,}5k - 0{,}3 = 0. & (6) \end{cases}$$

Умножая (5) на 0,6, а (6) на 9,93, имеем:

$$\begin{cases} 5{,}958h - 1{,}122k + 0{,}318 = 0 & (7) \\ 5{,}958h + 94{,}335k - 2{,}979 = 0. & (8) \end{cases}$$

Вычитая (7) из (8), находим:

$$95{,}457k - 3{,}297 = 0,$$

откуда

$$k = 0{,}0346.$$

Подставляя это значение k в (6), получим:

$$h = -0{,}047.$$

Подставляя в (3) и (4):

$$x = 8{,}5 + h = 8{,}5 - 0{,}047 = 8{,}453$$

(приблизительно)

$$y = 2{,}6 + k = 2{,}6 + 0{,}0346 = 2{,}6346$$

(приблизительно).

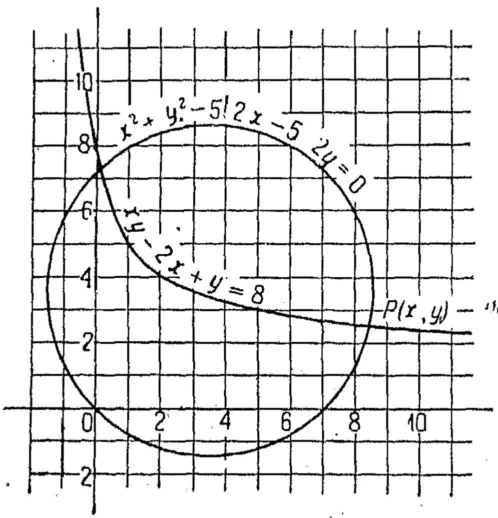


Рис. 70.

Если требуется определить значение корней с еще большей степенью точности, то действуем по тому же методу, положив:

$$x = 8{,}453 + h$$

$$y = 2{,}6346 + k$$

и продолжая решение, как в приведенном выше примере

Глава VIII.

ДРОБИ. ДРОБНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

Дроби.

223. Действия над дробями. При сложении или вычитании дробей следует сначала привести их к общему знаменателю, а затем надписать над ним сумму (или разность) числителей.

При вычитании дроби, когда перед ней стоит знак минус, необходимо, до приведения подобных членов, переменить знаки у всех членов числителя. Знак этот относится ко всей дроби, а не только к числителю или знаменателю; так, например, в выражении $\left(-\frac{x}{2a}\right)$ знак минус относится к дроби, у которой и числитель x и знаменатель $2a$ — положительные.

Чтобы изменить знак числителя или знаменателя, необходимо изменить его у всех членов дроби.

Нельзя сокращать какой-либо член в числителе и знаменателе, если один из них является многочленом.

В выражении

$$\frac{a+b+b^2}{b}$$

члены с буквой b в числителе и знаменателе не могут быть сокращены. Сокращать можно только на множители, входящие во все члены числителя и знаменателя, так как это не изменяет величины дроби.

Так например в выражении

$$\frac{ab+b^2}{ab}$$

b является общим множителем всех членов числителя и знаменателя, а потому его можно сократить.

Сделав это, получим:

$$\frac{a+b}{a}.$$

Дроби всегда следует приводить к простейшему виду, при котором числитель и знаменатель не имеют общих множителей. Для этого разлагают числитель и знаменатель на множители и сокращают те из них, которые являются общими для членов того или другого.

Числитель и знаменатель дроби можно умножить или разделить на одну и ту же величину (неравную нулю), так как величина дроби от этого не изменится.

224. Основные действия над дробями.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}; \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$$

$$a+\frac{b}{c}=\frac{a}{1}+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c}; \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}; \quad \frac{a}{b}=\frac{na}{nb}\ (n\neq 0);$$

$$\frac{a}{b}=\frac{\frac{a}{n}}{\frac{b}{n}}\ (n\neq 0); \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

$$-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}; \quad -\frac{a+b}{c}=\frac{-a-b}{c}$$

$$-\frac{a-b}{c}=\frac{-(a-b)}{c}=\frac{-a+b}{c}.$$

Дробные уравнения.

225. Дробные уравнения. Уравнение, содержащее дробь с неизвестным в знаменателе, называется *дробным уравнением.* Обычный метод решения таких уравнений заключается в том, что их сперва упрощают, а затем умножают каждый член на общее наименьшее кратное знаменателей (см. n^0 111) для того, чтобы избавиться от последних.

Общее наименьшее кратное, как и всякий множитель, содержащий неизвестное, может вызвать получение корней, не принадлежащих данному уравнению. Такие корни называются *посторонними.* Их можно найти, приравняв множитель нулю и решив относительно x полученное уравнение.

Для выяснения, которые из полученных корней являются посторонними, следует подставить все найденные корни в данное уравнение. Если некоторые из них не удовлетворяют ему, то их следует отбросить.

Ниже приведено несколько примеров решения дробных уравнений.

Пример 1. Найти значение x из уравнения

$$\frac{\frac{4}{5x}-16}{24}-\frac{\frac{2}{5x}+6}{60}=\frac{4\frac{1}{6}}{5}.$$

Упрощая, имеем:

$$\frac{1-20x}{30x}-\frac{1+15x}{150x}=\frac{5}{6}.$$

Умножая все члены уравнения на $150x$, т. е. на общее наименьшее кратное знаменателей, получим:

$$5-100x-1-15x=125x$$
$$240x=4$$
$$x=\frac{1}{60}.$$

Корень $\frac{1}{60}$ удовлетворяет уравнению.

Пример 2. Найти величину x из уравнения

$$\frac{3}{x^2-25}+\frac{1}{x+5}=\frac{2}{5-x}.$$

Член $\frac{2}{5-x}$ можно написать в таком виде:

$$-\frac{2}{x-5},$$

что не изменит его величины.

Умножая все члены уравнения на общее наименьшее кратное знаменателей, т. е. на x^2-25, имеем:

$$\frac{3(x^2-25)}{x^2-25}+\frac{x^2-25}{x+5}=-\frac{2(x^2-25)}{x-5}.$$

Сокращая, находим:

$$3+x-5=-2(x+5)=-2x-10$$
$$3x=-8$$
$$x=-\frac{8}{3}.$$

Полученный корень удовлетворяет заданному уравнению, в чем можно убедиться подстановкой.

Пример 3. Найти значение x из уравнения

$$2+\frac{9}{6+x}=x.$$

Умножая на $(6+x)$, наименьшее кратное знаменателей, получим:

$$12+2x+9=6x+x^2$$
$$x^2+4x-21=0$$
$$x=3 \text{ или } -7.$$

Оба корня, будучи подставлены в первоначальное уравнение $2+\frac{9}{6+x}=x$, удовлетворяют ему.

Пример 4. Найти величину x из уравнения

$$1+\frac{1}{x-1}=\frac{x^2}{x-1}-6.$$

Умножая все члены уравнения на $(x-1)$, имеем:

$$x-1+1=x^2-6x+6,$$

откуда

$$x=6 \text{ или } 1.$$

Корень $x=6$ удовлетворяет данному уравнению, а корень 1 не удовлетворяет ему. Поэтому его, как посторонний, следует отбросить. Мы ввели этот корень, умножив на $(x-1)$. Приравнивая этот множитель нулю, $x-1=0$, получим $x=1$.

226. Способ решения дробных уравнений, при котором избегается получение посторонних корней. В некоторых случаях, группируя члены дробного уравнения соответствующим образом, можно привести его к обычному виду, не производя умножения обеих частей его на знаменатель.

Пример 4 предыдущего n° можно решить этим способом.

$$1+\frac{1}{x-1}=\frac{x^2}{x-1}-6.$$

Перенося члены, получим:

$$\frac{x^2-1}{x-1}=7$$

$$x+1=7$$

$$x=6.$$

Пример. Найти величину x из уравнения

$$\frac{2x^2}{x-2}=\frac{3x+2}{x-2}+\frac{5x+9}{3}.$$

Перенося члены и складывая дроби, найдем:

$$\frac{2x^2-3x-2}{x-2}=\frac{5x+9}{3}.$$

Сокращая, имеем:

$$2x+1=\frac{5x+9}{3}$$

$$6x+3=5x+9$$

$$x=6.$$

Если бы мы умножили первоначальное уравнение на $3(x-2)$ — наименьшее кратное знаменателей, то мы бы ввели корень $x=2$, не удовлетворяющий данному уравнению (посторонний).

227. Дробные уравнения с несколькими одночленными знаменателями. Такие уравнения проще всего решаются следующим образом.

Сначала уничтожают одночленные знаменатели, упрощают полученное выражение и наконец уничтожают остальные знаменатели по способу, указанному в n° 225.

Пример. Найти величину x из уравнения

$$\frac{9x+5}{14}+\frac{8x-7}{6x+2}=\frac{36x+15}{56}+\frac{10\frac{1}{4}}{14}.$$

Избавляемся от одночленных знаменателей путем умножения всех членов на 56 — общее наименьшее кратное этих знаменателей.

Имеем:

$$36x+20+\frac{56\,(8x-7)}{6x+2}=36x+15+41.$$

Упрощая полученное уравнение

$$\frac{7\,(8x-7)}{3x+1}=9,$$

умножаем его на $(3x+1)$:

$$56x-49=27x+9,$$

$$29x=58$$

$$x=2.$$

228. Преобразование уравнений, содержащих в каждой части равенств пару членов вида

$$\frac{x+a}{x+b},$$

соединенных знаком —. Уравнения указанного вида удобно решаются, если объединить члены в каждой части уравнения. Для удобства преобразований иногда следует переносить члены из одной части уравнения в другую.

Пример. Решить уравнение

$$\frac{x-1}{x-2}+\frac{x-6}{x-7}=\frac{x-5}{x-6}+\frac{x-2}{x-3}.$$

Перенося вторые члены из одной части равенства в другую и приводя к общему знаменателю, имеем:

$$\frac{-1}{x^2-5x+6}=\frac{-1}{x^2-13x+42},$$

Так как дроби равны и имеют равные числители, то знаменатели также должны быть равны между собой. Таким образом

$$x^2-5x+6=x^2-13x+42,$$

откуда

$$x=4\frac{1}{2}.$$

Этот пример показывает, что иногда не следует сразу производить освобождение дробей от знаменателей.

Иррациональные уравнения.

229. Иррациональные уравнения преобразуются в рациональные путем возвышения обеих частей в одинаковую степень. Последняя зависит от высшей степени корня в данном уравнении.

Если в первоначальном уравнении имеется только один радикал, то рекомендуется перенести все рациональные члены в одну часть равенства, а радикал оставить в другой, после чего производить возвышение в степень.

Пример.

$$1+\sqrt{x}=5$$
$$\sqrt{x}=4$$
$$x=16.$$

Если бы мы извлекли корень квадратный из обеих частей уравнения

$$x-2=4,$$

то получили бы

$$\pm\sqrt{x-2}=2$$

или

$$\sqrt{x-2}=2 \quad и \quad \sqrt{v-2}=-2.$$

При извлечении корня из обеих частей уравнения следует принимать во внимание и тот и другой знак.

Если имеем $x-2=4$, то было бы неправильным считать, что $\sqrt{x-2}=2$, и пренебрегать значением корня

$$-\sqrt{x-2}=2.$$

Необходимо рассматривать оба случая, т. е. следует писать

$$\pm\sqrt{x-2}=2.$$

Если мы решаем иррациональное уравнение, то нам не приходится извлекать квадратный корень, так как это действие уже произведено и указан знак радикала. Так например, в уравнении $\sqrt{x-2}=x+17$ дан один случай, в уравнении же $\pm\sqrt{x-2}=x+17$ требуется рассмотреть оба случая.

Если задано уравнение

$$\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=\sqrt{2x},$$

то имеется в виду только положительное значение корня, в уравнении же

$$\pm\sqrt{a+x}\pm\sqrt{a-x}=\pm\sqrt{2x}$$

— оба значения.

Необходимо помнить, что в выражении $-\sqrt{a-x}$ самый радикал считается положительным, т. е. имеем: $-(+\sqrt{a-x})$.

Решая вышеуказанный пример

$$\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=\sqrt{2x},$$

имеем после возвышения в квадрат:

$$a+x+2\sqrt{a^2-x^2}+a-x=2x$$

$$\sqrt{a^2-x^2}=x-a.$$

Возвышая в квадрат вторично, получим:

$$a^2-x^2=x^2-2ax+a^2$$

$$2x^2-2ax=0$$

$$2x\ (x-a)=0$$

$$x=0 \text{ или } a.$$

Подстановка обоих корней в уравнение показывает, что $x=a$ удовлетворяет ему, а корень $x=0$ не удовлетворяет. В самом деле

$$\sqrt{a+0}+\sqrt{a-0}\neq\sqrt{2\cdot 0}.$$

Если бы мы взяли отрицательное значение корня $\sqrt{a-0}$, равное $-\sqrt{a}$, то уравнение удовлетворялось бы значением $x=0$. Полученный результат следует понимать так, что $\sqrt{a-x}$ означает $+\sqrt{a-x}$, а потому корень $x=0$ должен быть отброшен.

Возвышение в квадрат обеих частей иррационального уравнения равносильно умножению на величину, содержащую неизвестные, вследствие чего получаются посторонние корни (см. nn⁰ 225 и 129).

Пример. Найти корни уравнения

$$\sqrt{x-2}=x-4.$$

Возвышаем уравнение в квадрат:

$$x-2=x^2-8x+16.$$

Перенося члены и упрощая полученное равенство, имеем:

$$x^2-9x=-18.$$

Решая уравнение, получаем корни

$$x=6 \text{ или } 3.$$

Корень $x=6$, как это легко проверить подстановкой, удовлетворяет уравнению, а корень $x=3$ — посторонний.

Если бы рассматривать отрицательное значение радикала или $-\sqrt{x-2}$, то корень $x=3$ обращал бы уравнение в тождество.

Так как в задаче указано лишь положительное значение радикала, то посторонный корень $x=3$ должен быть отброшен.

Если в иррациональном уравнении имеются дробные члены, то до возвышения в степень следует упростить дробь или уничтожить иррациональность знаменателя.

Пример 1. Решить уравнение

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{x}}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2}+\sqrt{x}}-\frac{(x+2)^2}{2(x-2)}.$$

Делаем знаменатель рациональным:

$$\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{x})^2}{(\sqrt{2}-\sqrt{x})(\sqrt{2}+\sqrt{x})}=\frac{2\sqrt{x}(\sqrt{2}-\sqrt{x})}{(\sqrt{2}+\sqrt{x})(\sqrt{2}-\sqrt{x})}-$$

$$-\frac{(x+2)^2}{2(x-2)}$$

$$\frac{2+2\sqrt{2x}+x}{2-x}=\frac{2\sqrt{2x}-2x}{2-x}+\frac{x^2+4x+4}{2(2-x)}.$$

Умножая все члены уравнения на $2(2-x)$, имеем:

$$4+4\sqrt{2x}+2x=4\sqrt{2x}-4x+x^2+4x+4$$

$$x^2-2x=0$$

$$x(x-2)=0.$$

Отсюда

$$x=0 \text{ или } 2.$$

Подставим в первоначальное уравнение корень $x=0$. Тогда получим:

$$\frac{\sqrt{2}+0}{\sqrt{2}-0}=\frac{0}{\sqrt{2}+0}-\frac{(0-2)^2}{2(0-2)}.$$

или

$$1 = 0 + 1.$$

Таким образом корень $x = 0$ удовлетворяет уравнению.

Корень $x = 2$, как посторонний, не удовлетворяющий заданному уравнению, нужно отбросить, ибо он приводит к равенству, где знаменатели дробей нули.

Пример 2. Решить уравнение

$$\frac{\sqrt{2x} + 2}{\sqrt{2x} - 2} = \frac{\sqrt{x+1} + 3}{\sqrt{x+1} - 3}.$$

Умножаем обе части уравнения на $(\sqrt{2x} - 2)(\sqrt{x+1} - 3)$, т. е на общее наименьшее кратное знаменателей. Имеем:

$$(\sqrt{2x} + 2)(\sqrt{x+1} - 3) = (\sqrt{x+1} + 3)(\sqrt{2x} - 2),$$

$$\sqrt{2x^2 + 2x} + 2\sqrt{x+1} - 3\sqrt{2x} - 6 = \sqrt{2x^2 + 2x} - 2\sqrt{x+1} + $$
$$+ 3\sqrt{2x} - 6.$$

Упрощая, получим:

$$6\sqrt{2x} = 4\sqrt{x+1}$$
$$3\sqrt{2x} = 2\sqrt{x+1}.$$

Наконец, возвышая в квадрат:

$$18x = 4x + 4$$
$$x = \frac{2}{7}.$$

230. Некоторые особые приемы решений.

Пример 1. Решить уравнение

$$2\sqrt{x^2 - 9x + 18} - \sqrt{x^2 - 4x - 12} = x - 6.$$

Разложим подкоренные количества на множители:

$$2\sqrt{(x-3)(x-6)} - \sqrt{(x+2)(x-6)} = x - 6,$$
$$2\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{x-6} - \sqrt{x+2}\,\sqrt{x-6} = \sqrt{x-6}\cdot\sqrt{x-6},$$
$$\sqrt{x-6}\,(2\sqrt{x-3} - \sqrt{x+2} - \sqrt{x-6}) = 0.$$

Приравнивая множитель $\sqrt{x-6}$ нулю, найдем один из корней. Он равен очевидно $x = 6$ (см. n⁰ 129).

Кроме того

$$2\sqrt{x-3} - \sqrt{x+2} = \sqrt{x-6}.$$

Возвышаем это уравнение в квадрат:

$$4x - 12 - 4\sqrt{(x-3)(x+2)} + x + 2 = x - 6$$
$$-4\sqrt{x^2 - x - 6} = 4 - 4x$$
$$\sqrt{x^2 - x - 6} = x - 1.$$

Возвышаем вторично в квадрат:

$$x^2 - x - 6 = x^2 - 2x + 1,$$

откуда

$$x = 7.$$

Подстановкой значений $x = 6$ и $x = 7$ убеждаемся, что оба корня удовлетворяют уравнению.

Пример 2. Решить уравнение

$$\frac{x-7}{\sqrt{x-3}-2} + \frac{x-5}{\sqrt{x-4}-1} = 4\sqrt{x-3}.$$

Напишем числитель первой дроби в виде $(x-3)-4$, а числитель второй в виде $(x-4)-1$. Имеем:

$$\frac{(x-3)-4}{\sqrt{x-3}-2} + \frac{(x-4)-1}{\sqrt{x-4}-1} = 4\sqrt{x-3}.$$

Упрощаем полученное уравнение:

$$\sqrt{x-3} + 2 + \sqrt{x-4} + 1 = 4\sqrt{x-3}.$$

Приводим подобные члены:

$$\sqrt{x-4} = 3\sqrt{x-3} - 3 = 3(\sqrt{x-3} - 1).$$

Возвышаем в квадрат:

$$x - 4 = 9x - 27 - 18\sqrt{x-3} + 9$$

$$18\sqrt{x-3} = 8x - 14$$

$$9\sqrt{x-3} = 4x - 7.$$

Возвышаем в квадрат вторично:

$$81(x-3) = 16x^2 - 56x + 49$$

$$81x - 243 = 16x^2 - 56x + 49$$

$$16x^2 - 137x + 292 = 0.$$

Решая уравнение, находим корни:

$$x = \frac{73}{16} \text{ и } 4.$$

Оба значения x удовлетворяют заданному уравнению.

Глава IX.

КУБИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ.

231. Графическое изображение кубических функций.

График функции $y = x^3$ представляет собой кривую, называемую кубической параболой.

Если x — величина положительная, то y — также положительное; при отрицательном x, y — отрицательное. Оба случая представлены на рис. 71.

Если имеется функция $y = -x^3$, то положительные значения x дают также положительные x^3, следовательно соответствующее значение y окажется отрицательным.

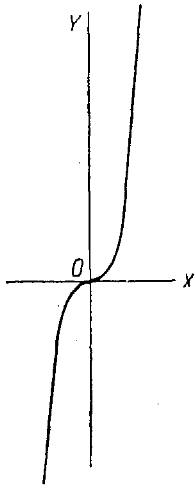


Рис. 71.

Очевидно, при отрицательных x значения x^3 — отрицательные, а y будут положительными.

График функции $y = -x^3$ изображен на рис. 72. Сравнение последней с рис. 71 показывает влияние знака минус перед x^3 на расположение графика.

Заметим, что для значений x, различающихся только знаком, абсолютные величины функции одинаковы, но знак различен.

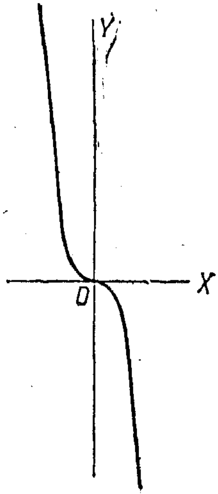


Рис. 72.

Рекомендуется аккуратно вычертить кривые обеих функций $y = x^3$ и $y = -x^3$, так, чтобы можно было в дальнейшем использовать их для графического решения задач.

232. Функция вида $y = ax^3$. График этой функции может быть легко получен из уже построенного графика функции

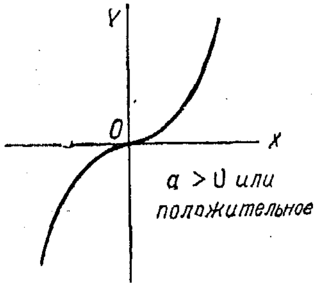


Рис. 73.

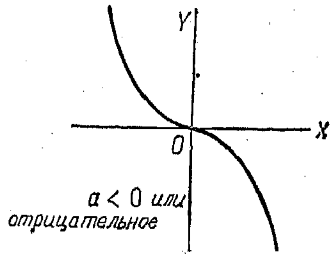


Рис. 74.

$y = x^3$, посредством уменьшения или увеличения масштаба ординат в отношении $a : 1$, в зависимости от того, будет ли

a больше или меньше единицы. Способ такого построения был уже рассмотрен в n° 170, где мы получили график функции $y = ax$ из графика $y = x^2$.

Здесь весьма удобен циркуль для пропорционального деления, так как с помощью него можно получить ординаты кривой $y = ax^3$ непосредственно из ординат $y = x^3$.

Если a — величина отрицательная, то знак этих ординат следует переменить на обратный. Влияние знака при a на характер кривой показано на рис. 73, где a — положительное ($a > 0$), и на рис. 74, где a—отрицательное ($a < 0$).

233. Функция $y = a(x-h)^3 + k$. Эту функцию можно представить в таком виде:

[59] $$y - k = a(x-h)^3.$$

Уравнение соответствует кривой $y = ax^3$, у которой начало координат передвинуто в точку $(-h, -k)$, причем k измерено в масштабе новых ординат (рис. 75, 76).

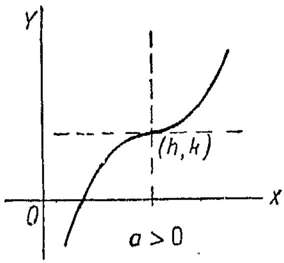


Рис. 75.

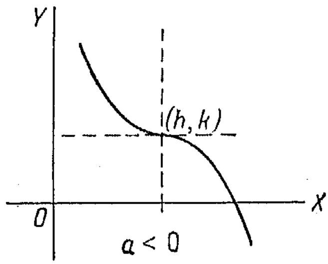


Рис. 76.

Таким образом, вычерчивая график функции $y = ax^3$ и располагая начало координат в точке $(-h, -k)$, получим кривую функции

$$y - k = a(x-h)^3,$$

отнесенную к новым осям.

234. Добавление члена mx в кубическое уравнение. В случае прибавления этого члена функция принимает вид $y = x^3 + x$ или $y = ax^3 + mx$, а график основных функций $y = x^3$ и $y = ax^3$ изменяется.

График функции $y = x^3 + x$ можно легко вычертить, пользуясь графиком $y = x^3$, ординаты которого y увеличиваются или уменьшаются на величины, равные значениям независимой переменной x.

Пример. Преобразовать график $y = x^3$ так, чтобы он соответствовал функции

$$y = x^3 - 3x.$$

Так как ординаты графика последней функции равны ординатам кривой $y = x^3$, уменьшенным на величину $3x$, то мы можем произвести вычитание графически, пользуясь следующим способом:

Проведем на графике $y = x^3$ (рис. 77) прямую AB с наклоном -3. Если мы возьмем какую-нибудь точку P на нашей кривой, отложим при помощи циркуля ее ординату y от линии AB, как это показано для

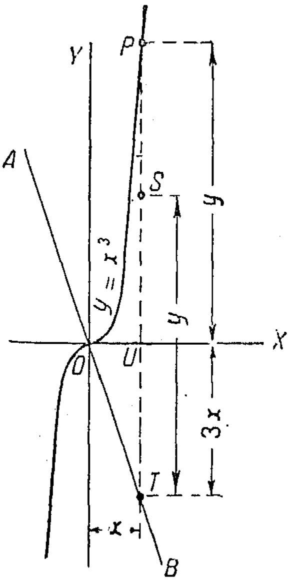


Рис. 77.

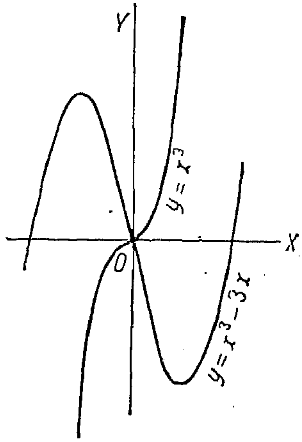


Рис. 78.

ST, то этим самым мы вычтем из y величину $3x$ и получим точки искомой кривой $y = x^3 - 3x$. Кривая эта изображена на рис. 78.

Пересечение кривой с осью x-ов дает корни уравнения

$$x^3 - 3x = 0.$$

График отнесен к первоначальным осям координат.

Изменение формы, которое получает график $y = x^3$ после преобразования его в график функции $y = x^3 - 3x$, назовем *сдвигом* кривой на величину $y = -3x$.

235. График функции

[60] $$y = ax^3 + mx$$

имеет в зависимости от знаков при a и m одну из форм, изображенных на рис. 79—84.

Как было указано ранее, кривую $y = ax^3$ можно легко получить из графика $y = x^3$, так как ординаты их во всех случаях относятся как $a:1$. Если a — не слишком велико, то весьма удобным является циркуль для пропорционального деления, так как при помощи него можно весьма просто произвести нужные преобразования (см. n⁰ 232).

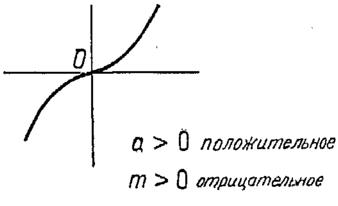


Рис. 79

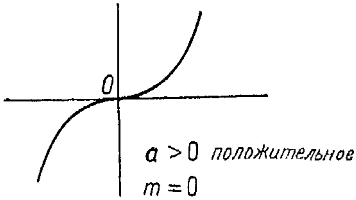


Рис. 80.

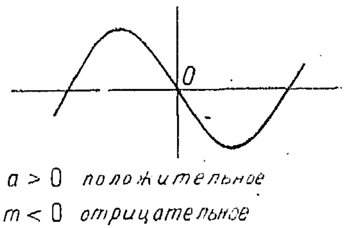


Рис. 81.

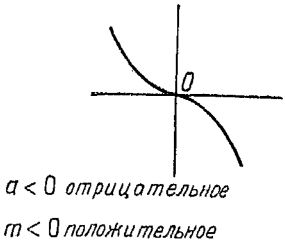


Рис. 82.

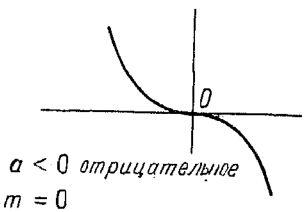


Рис. 83.

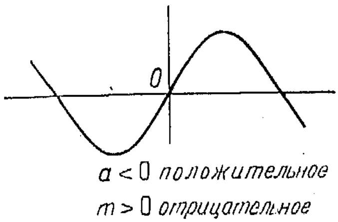


Рис. 84.

236. Введение постоянных h и k в уравнение $y = ax^3 + mx$, которое производится путем подстановки $x+h$ вместо x и $y+k$ вместо y и обращает его в уравнение

$$y + k = a(x+h)^3 + m(x+h), \tag{1}$$

соответствует перенесению начала координат в точку (h, k).

Раскрывая в (1) скобки, получим:

$$y = ax^3 + 3ahx^2 + (3ah^2 + m)x + ah^3 + mh - k. \tag{2}$$

Сравнивая полученное выражение с общей формой кубической функции

[61] $$y = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

видим, что

$$b = 3ah,\ c = 3ah^2 + m,\ d = ah^3 + mh - k. \qquad (3)$$

Значения коэффициентов a и b всякого уравнения, представленного в общем виде, определяют величину h, так как

[62] $$h = \frac{b}{3a},$$

после чего легко определить и m:

[63] $$m = c - 3ah^2 = c - \frac{b^2}{3a}.$$

Наконец, зная h и m, найдем величину k из уравнения (3):

[64] $$k = \frac{bc}{3a} - \frac{2b^3}{27a^2} - d.$$

Итак, если мы имеем уравнение $y = ax^3 + mx$, то путем перенесения начала координат в точку (h, k) можем привести его к общему виду

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Координаты нового начала (h, k) можно выразить в зависимости от коэффициентов a, b, c и d; тогда указанные координаты будут $\left(\frac{b}{3a};\ \frac{bc}{3a} - \frac{2b^3}{27a^2} - d\right)$.

237. Для того, чтобы начертить график кубической функции, приводим уравнение к общему виду

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad [61].$$

Затем берем уже построенный ранее график функции $y = x^3$, преобразовываем его в $y = ax^3$ и находим величину m из [63]:

$$m = c - \frac{b^2}{3a}.$$

Сдвигая соответствующим образом график $y = ax^3$, получим график $y = ax^3 + mx$.

Перенося начало координат в точку (h, k), заканчиваем преобразование первоначальной кривой и получаем график искомой функции

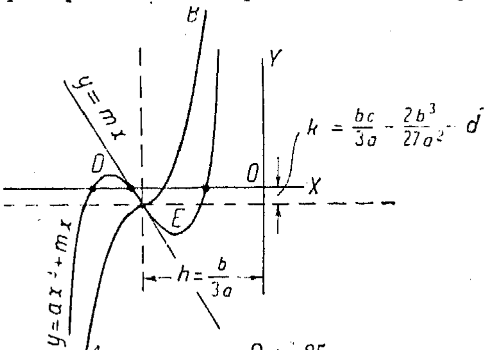


Рис. 85.

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Пусть AB (рис. 85) есть график функции $y = x^3$, а $ADEB$—тот же график после преобразования в $y = ax^3 + mx$ по методу, изложенному в nn⁰ 234 и 235.

Координаты (h, k) точки, в которую следует перенести начало координат, определяются выражениями

$$h = \frac{b}{3a} \text{ и } k = \frac{bc}{3a} - \frac{2b^3}{27a^2} - d.$$

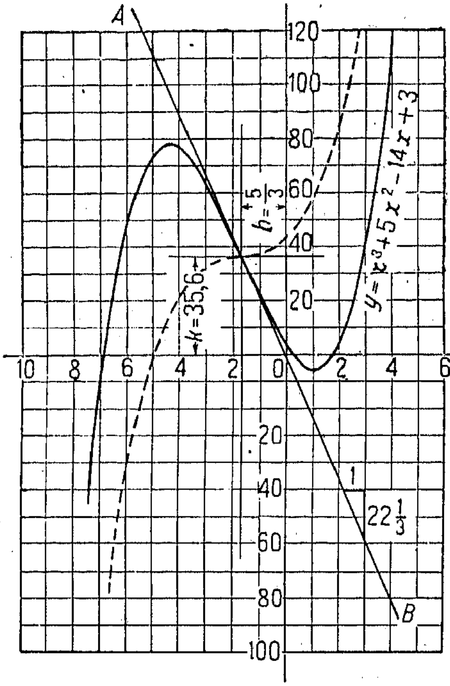


Рис. 86

График, построенный указанным выше способом и отнесенный к новому началу, соответствует функции

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad [61]$$

являющейся общим выражением кубической функции.

Решение любого уравнения третьей степени с одним неизвестным может быть произведено теперь графически.

После того, как найдены приблизительные значения x, которые обращают y в нуль, подставляют их в общее уравнение, а затем, пользуясь методом, изложенным в nn⁰ 195 и 222, определяют, если это необходимо, более точные значения независимого переменного.

При построении графика кубической функции рекомендуется брать масштаб y в десять раз меньше, чем масштаб x, так как это позволяет поместить на листе бо́льшие значения y.

Пример 1. Начертить график функции

$$y = x^3 + 5x^2 - 14x + 3.$$

Имеем:

$$m = c - \frac{b^2}{3a} = -14 - \frac{25}{3} = -22\frac{1}{3}.$$

Строим график функции $y = x^3$ и проводим линию сдвига с наклоном $-22\frac{1}{3}$: 1 (AB на рис. 86). Сдвигаем кривую по отношению к AB, для чего откладываем от последней ординаты графика $y = x^3$. Затем переносим начало координат в точку (h, k):

$$h = \frac{b}{3a} = \frac{5}{3}; \quad [62]$$

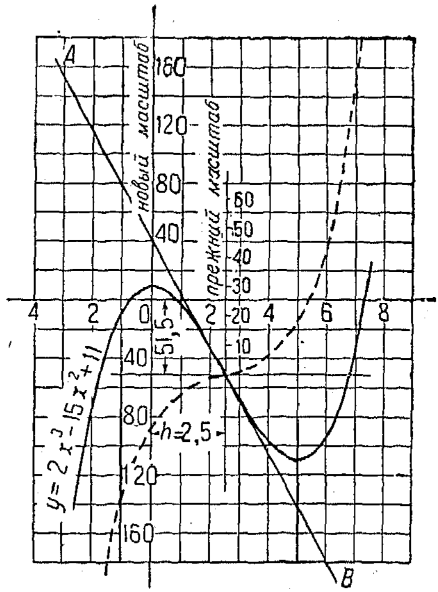


Рис. 87.

$$k = \frac{5(-14)}{3} - \frac{2 \cdot 125}{27} - 3 = -35{,}6 \quad [64].$$

Таким образом кривая, начало координат которой расположено в точке $\left(\frac{5}{3}, \ -35{,}6\right)$, выражает уравнение

$$y = x^3 + 5x^2 - 14x + 3.$$

Пример 2. Начертить график уравнения

$$y = 2x^3 - 15x^2 + 11.$$

Имеем:

$$m = c - \frac{b^2}{3a} = 0 - \frac{225}{6} = -37{,}5$$

$$h = \frac{-15}{6} = -2{,}5$$

$$k = 0 - \frac{2(-15)^3}{27 \cdot 4} - 11 = 51{,}5.$$

Строим график основной функции $y = x^3$ и уменьшаем масштаб ординат на 2, благодаря чему график будет соответствовать функции $y = 2x^3$. Проводим линию сдвига AB с наклоном — 37,5 : 1, измеренным в новом масштабе, после чего сдвигаем кривую $y = 2x^3$ по отношению к AB. Перенеся начало координат в точку (n, k), т. е. в точку $(-2,5,\ 51,5)$, получим график функции (рис. 87):

$$y = 2x^3 - 15x^2 + 11.$$

238. Графическое решение уравнений вида $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

Для решения таких уравнений с одним неизвестным является полезным график функции $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Сперва рассмотрим случай, когда необходимо найти корни уравнения

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

График функции $y = x^3 + bx^2 + cx + d$ дает все значения этой функции, соответствующие действительным значениям независимой переменной x, в том числе и таким, которые обращают $x^3 + bx^2 + cx + d$ в нуль, т. е. корням уравнения

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Пример. Найти корни уравнения

$$x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0.$$

Начертим график функции

$$y = x^3 - 4x^2 - 4x + 16,$$

употребляя для этого график $y = x^3$:

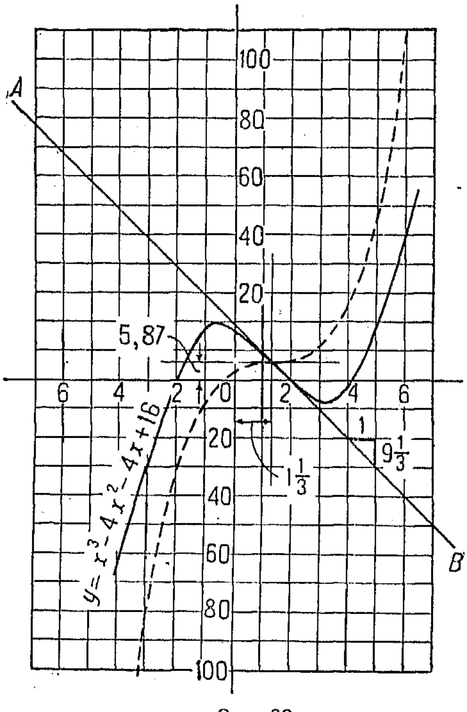


Рис. 88.

$$m = -9\frac{1}{3}, \quad h = -1\frac{1}{3} \quad \text{и} \quad k = -5,87.$$

Пересечение построенного графика с осью X (рис. 88) дает значения x, обращающие функцию $x^3 - 4x^2 - 4x + 16$ в нуль, т. е. корни уравнения $x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0$. Эти корни суть:

$$x = 2, \quad x = 4 \quad \text{и} \quad x = -2.$$

239. Система двух уравнений с двумя неизвестными x и y. Если одно из уравнений имеет вид $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, то систему можно решить, вычерчивая график каждой из данных функций и находя их точки пересечения.

Пример. Найти значения x и y, удовлетворяющие уравнениям

$$9x^2+16y^2-18x+32y-56=0$$

$$y = 2x^3 - 11x^2 + 17x - 6.$$

Строим графики, пользуясь методами, указанными в пп⁰ 205 и 237. Необходимо обращать внимание на то, чтобы ординаты обеих кривых имели одинаковый масштаб. Точки пересечения могут быть также найдены посредством вычерчивания каждого графика в отдельности на прозрачной бумаге и накладывания их друг на друга таким образом, чтобы координатные оси совпадали.

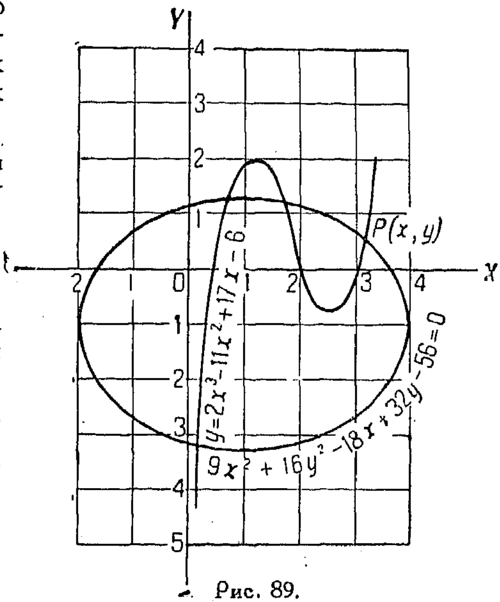


Рис. 89.

Значения неизвестных, удовлетворяющие заданным уравнениям, будут (рис. 89):

$$(0{,}2,\ -3{,}2),\ (0{,}7,\ 1{,}3)\ (1{,}6,\ 1{,}3)\ (3{,}2,\ 0{,}6).$$

240. Система уравнений, имеющих иррациональные корни и заданных в форме, сходной с уравнениями предыдущего n^0, решается графически, а более точные значения корней можно определить, пользуясь методом, изложенным в n^0 222.

Найдем значения для координат точки $P(x, y)$, если заданы уравнения

$$\begin{cases} 9x^2+16y^2-18x+32y-56=0 & (1)\\ y=2x^3-11x^2+17x-6. & (2)\end{cases}$$

Из рис. 89 видим, что координаты P суть (3,2; 0,6). Положим

$$x = 3{,}2 + h \quad \text{и} \quad y = 0{,}6 + k. \qquad (3)$$

Подставляя (3) в (1) и пренебрегая членами второго порядка относительно h и k, имеем:

$$92{,}16+57{,}6h+5{,}76+19{,}2k-57{,}6-18h+19{,}2+\\+32k-56=0$$

или, после упрощения,

$$39{,}6h+51{,}2k+3{,}52=0. \qquad (4)$$

Точно таким же образом после подстановки (3) во (2) и отбрасывания членов второго и третьего порядка относительно h и k, найдем:

$$0{,}6+k=65{,}54+61{,}44h-112{,}64-70{,}4h+54{,}4+17h-6,$$

откуда

$$k=8{,}4h+0{,}7. \qquad (5)$$

Подставив (5) в (4), имеем:

$$39{,}6h+430{,}08h+35{,}84+3{,}52=0$$
$$469{,}68h=-39{,}36$$
$$h=-0{,}084.$$

Подставляя в (5), находим:

$$k=0{,}7056-0{,}7=0{,}006.$$

Подставляя значения h и k в (3), найдем более точные величины корней

$$y=3{,}116; \qquad y=0{,}606.$$

Для получения еще более точных значений x и y описанный прием может быть повторен.

241. Другой способ графического решения кубического уравнения $x^3+bx^2+cx+d=0$ состоит в следующем:

Предположим, что имеется система двух уравнений

$$\begin{cases} y=x^3 \text{ и} \\ y=-cx-d \end{cases}$$

(если член с x^2 отсутствует).

Как известно, ординаты точек пересечения графиков, соответствующих этим двум линиям, одни и те же, другими словами—абсциссы точек пересечения соответствуют тем значениям x, при которых обе функции имеют одинаковую величину. Поэтому

$$x^3=-cx-d \text{ или } x^3+cx+d=0.$$

Таким образом, имея основной график $y = x^3$ и проводя прямую $x = -cx - d$, мы сможем быстро определить по точкам пересечения значения x, удовлетворяющие уравнению

$$x^3 + cx + d = 0.$$

Если в дальнейшем имеется член, содержащий x^2, то получим систему:

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = -bx^2 - cx - d. \end{cases}$$

Чтобы решить ее, вычерчиваем оба графика в одной и той же системе координат. Точки пересечения их дадут искомые корни.

Пользуясь описанным способом, можно решать весьма трудные задачи; если же решения вообще не имеется, то графики сразу покажут это.

242. Еще один удобный способ решения кубических уравнений заключается в том, что посредством перенесения начала координат добиваются исчезновения члена с x^2. Это достигается подстановкой $x - \frac{a}{3}$ вместо x, или же выбором $h = \frac{a}{3}$.

Так как мы начинаем решение задачи с построения графика $y = x^3$, то можно перенести его начало в точку $(-h, 0)$ или $\left(-\frac{a}{3}, 0\right)$. Поэтому, после того как указанное перенесение произведено, проводим прямую, соответствующую уравнению $y = -cx - d$, и отмечаем точки пересечения этих линий.

243. Также весьма удобно знать наклон кривой, т. е. скорость изменения функции по отношению к независимой переменной в общем уравнении

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Этот наклон, найденный по методам, излагаемым в дифференциальном исчислении, для любой точки $P_1(x_1, y_1)$ равен

$$m = 3ax_1^2 + 2bx_1 + c.$$

После того как график функции вычерчен, легко определить ее максимальное и минимальное значения. Они имеют место в точках, где наклон кривой равен нулю, т. е. где касательная к ней параллельна оси X (рис. 90).

Для определения точек максимума и минимума функции, необходимо приравнять приведенное выше выражение для m нулю и найти из полученного уравнения значения x_1.

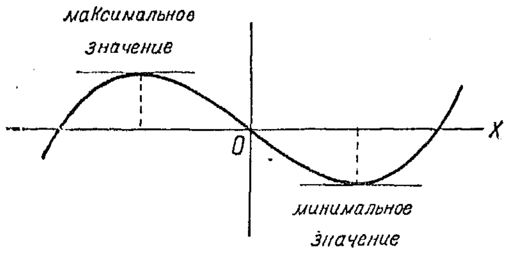


Рис. 90.

Задача. Цилиндрический бак помещен под стропилами крыши. Размеры помещения указаны на рис. 91. Какие размеры придать баку, чтобы он имел максимальную емкость?

Пусть x — высота бака, z — радиус основания, y — объем бака.

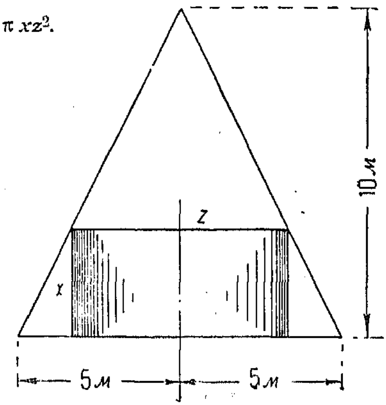


Рис. 91

Тогда

$$y = \pi x z^2.$$

Из подобия треугольников

$$\frac{10 - x}{z} = \frac{10}{5},$$

откуда

$$z = \frac{10 - x}{2}.$$

Таким образом

$$y = \pi x \left(\frac{10 - x}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}(x^3 - 20x^2 + 100x).$$

т. е.

$$y = 0{,}7354x^3 - 15{,}7x^2 + 78{,}54x.$$

Сравнивая с общим уравнением, имеем:

$$a = 0{,}7854, \quad b = -15{,}7, \quad c = 78{,}54.$$

Подставляя в выражение

$$m = 3a(x_1)^2 + 2b(x_1) + 78{,}54,$$

находим:

$$m = 3 \cdot 0{,}7854x_1^2 + 2(-15{,}7)x_1 + 78{,}54 = 2{,}356(x_1)^2 - 31{,}4(x_1) + 78{,}54.$$

Чтобы найти максимум, приравниваем m нулю:

$$2{,}356(x_1)^2 - 31{,}4(x_1) + 78{,}54 = 0.$$

По формулам [4] и [5]

$$x_1 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{+31,4 \pm \sqrt{(31,4)^2 - 4 \cdot 2,36 \cdot 78,54}}{2 \cdot 2,36} =$$
$$= 3,32 \text{ или } 10.$$

Однако высота бака x не может быть равной 10 метрам, следовательно она составляет 3,32 метра.

Из приведенного сперва уравнения

$$z = \frac{10 - x}{2} = \frac{10 - 3,32}{2} = 3,34.$$

Таким образом размеры бака будут такими: высота 3,32 метра, радиус основания 3,34 метра. Максимальный объем равен

$$y_0 = \pi xz^2 = 3,1416 \cdot 3,32 \cdot (3,34)^2 = 114,7 \text{ м}^3.$$

График функции

$$y = 0,7854x^3 - 15,7x^2 + 78,54x,$$

полученный из основного графика $y = x^3$ и сдвинутый по методу, указанному в n⁰ 236, показывает, как значения y увеличиваются до максимума

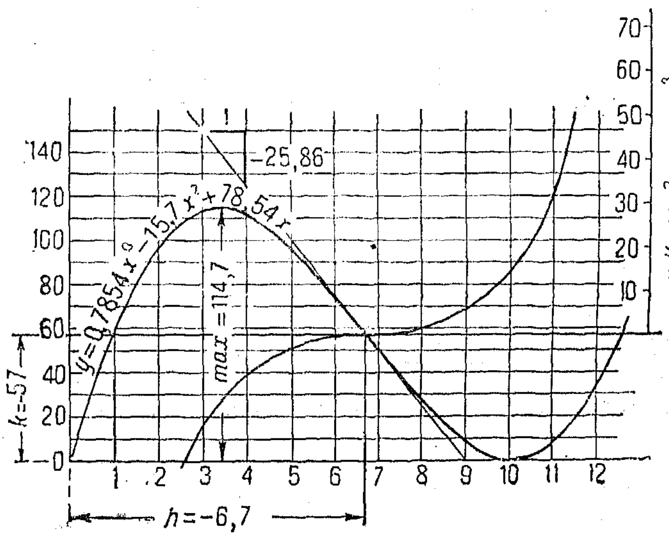


Рис. 92.

в точке, абсцисса которой равна 3,32, и уменьшаются до нуля при $x = 10$ (рис. 92).

Наклон графика в точке, где функция достигает максимума, равен нулю.

Глава X.

ЦЕЛЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ.

244. Целую рациональную функцию или многочлен (полином), содержащий степени одной неизвестной, можно представить в общем виде таким образом:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n.$$

Степень каждого члена этого выражения на единицу меньше степени предыдущего, вследствие чего при сложении, вычитании, умножении и делении таких многочленов можно рассматривать только коэффициенты при степенях. Если какой-либо из членов приведенного многочлена отсутствует, то это означает, что его коэффициент равен нулю.

Пример. Сложить многочлены:

$$x^2-1,\ x^4+2x^3+4x^2+3x+5 \quad \text{и} \quad 2x^3-5x^2+x+1.$$

Имеем:

$$\begin{array}{rrrrr} & & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ & 2 & -5 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 4 & 0 & 4 & 5 \end{array} = x^4+4x^3+4x+5.$$

Перемножить многочлены:

$$2x^3+3x^2-x-2 \quad \text{и} \quad x^2+x+4.$$

$$\begin{array}{rrrrrr} 2 & 3 & -1 & -2 & & \\ 1 & 1 & 4 & & & \\ \hline 2 & 3 & -1 & -2 & & \\ & 2 & 3 & -1 & -2 & \\ & & 8 & 12 & -4 & -8 \\ \hline 2 & 5 & 10 & 9 & -6 & -8 \end{array} = 2x^5+5x^4+10x^3+9x^2-6x-8.$$

245. Теорема об остатке. Теорема. *Если многочлен $f(x)$ разделить на $x-c$, то остаток равен $f(c)$, т. е. величине многочлена, в который вместо x подставлено c.*

Доказательство. Пусть частное от деления многочлена $f(x)$ на $x-c$ равно $Q(x)$, а остаток равен постоянному R, так что

$$\frac{f(x)}{x-c} = Q(x) + \frac{R}{x-c}.$$

Требуется доказать, что

$$R = f(c).$$

Из выражений

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

$$f(c)=a_0c^n+a_1c^{n-1}+\ldots+a_{n-1}c+a_n$$

получаем:

$$f(x)-f(c)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n-$$
$$-(a_0c^n+a_1c^{n-1}+\ldots+a_{n-1}c+a_n)=a_0\ (x^n-c^n)+$$
$$+a_1\ (x^{n-1}-c^{n-1})+\ldots+a_{n-1}(x-c).$$

Так как множитель $(x-c)$ входит во все члены последнего выражения, то можно вынести его за скобки, обозначив оставшееся в скобках выражение через $Q(x)$; тогда получим:

$$f(x)-f(c)=(x-c)\ [Q(x)].$$

Деля на $(x-c)$, найдем:

$$\frac{f(x)}{x-c}=Q(x)+\frac{f(c)}{x-c},\text{ т. е. } R=f(c),$$

что и требовалось доказать.

Пример. Пусть $f(x)=2x^3+3x^2-4x-6$, а $c=2$.

$$\begin{array}{l|l}
2x^3+3x^2-4x-6 & x-2 \\ \hline
\underline{2x^3-4x^2} & 2x^2+7x+10 \\
\quad 7x^2-4x & \\
\quad \underline{7x^2-14x} & \\
\qquad 10x-6 & \\
\qquad \underline{10x-20} & \\
\qquad\quad 14 &
\end{array}$$

$f(c)=2\cdot2^3+3\cdot2^2-4\cdot2-6=14=$ остатку.

246. Теорема о множителе. Теорема. *Если c есть корень уравнения $f(x)=0$ (где $f(x)$ — многочлен), то $x-c$ является множителем выражения $f(x)$.*

Доказательство. Если c — корень уравнения $f(x)=0$, то $f(c)=0$. Из теоремы об остатке нам известно, что, если $f(x)$ разделить на $x-c$, то остаток равен $f(c)$, т. е. нулю, а следовательно $f(x)$ нацело делится на $x-c$.

Обратно. *Если многочлен $f(x)$ нацело делится на $x-c$, то c есть корень уравнения $f(x)=0$.*

247. Сокращенное деление. В случаях, когда делитель имеет вид $x-c$, а делимое

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$

деление можно значительно упростить.

Разделим, пользуясь обычным способом, многочлен

$$f(x)=2x^4-9x^3-4x^2-25 \text{ на } x-5.$$

Имеем:

$$
\begin{array}{l|l}
2x^4-9x^3-4x^2+0x-25 & x-5 \\
\underline{2x^4-10x^3} & \overline{2x^3+x^2+x+5} \\
\quad x^3-4x^2 & \\
\quad \underline{x^3-5x^2} & \\
\qquad x^2-0x & \\
\qquad \underline{x^2-5x} & \\
\qquad\quad 5x-25 & \\
\qquad\quad 5x-25 &
\end{array}
$$

Если расположить делимое по убывающим степеням буквы x, не пропуская ни одной степени (отсутствующие степени следует писать с коэффициентом 0), то в частном члены будут также расположены в убывающем порядке.

Степень высшего члена частного можно определить сразу, после чего легко написать степени остальных членов, убывающие последовательно на единицу.

Таким образом нет необходимости выписывать каждый раз степени буквы x, а достаточно, зная показатель этой буквы в высших членах делимого и делителя, производить самое действие (т. е. деление) над коэффициентами.

Выпишем соответствующие коэффициенты в приведенном выше примере. Имеем:

$$
\begin{array}{l|l}
2-9-4+0-25 & 1-5 \\
\underline{\;\;-10} & \overline{2+1+1+5} \\
\;1+ & \\
\quad\;\; \underline{5} & \\
\quad +1 & \\
\qquad \underline{-5} & \\
\qquad +5 & \\
\qquad\quad \underline{-25} &
\end{array}
$$

Знак минус при члене 5 в делителе изменяет знак отдельных произведений на обратный; поэтому, заменяя (-5) на 5, можем прибавлять эти произведения к делимому, вместо того чтобы вычитать их.

Располагая все числа в ряд, получим:

$$\begin{array}{l|l} 2-9-4+0-25 & \;5 \\ \underline{\;+10+5+5+25} & \\ 2+1+1+5+\;0 & \end{array}$$

Последнее число (в данном случае 0) есть остаток от деления. Очевидно, это число равно величине $f(x)$ после подстановки 5 вместо x, т. е., другими словами, равно $f(5)$, ибо по теореме об остатке значение $f(5)$ равно остатку от деления $f(x)$ на $x-5$.

Заметим, что все числа в третьей строке последнего выражения суть коэффициенты при x в частном. Таким образом частное равно:

$$2x^3+x^2+x+5.$$

П р а в и л о. *При делении многочлена, содержащего степени одного неизвестного, на двучлен вида $x-a$ будем поступать следующим образом:*

Расположим многочлен по убывающим степеням неизвестного, причем отсутствующие степени напишем с коэффициентом 0.

Умножим число, которое должно быть подставлено вместо x, на первый коэффициент и сложим (алгебраически) полученное произведение со вторым коэффициентом.

Умножим найденную сумму на число, которое должно быть подставлено вместо x (т. е. на a), прибавим к третьему коэффициенту и будем продолжать действовать таким же образом, пока не дойдем до последнего коэффициента. Последняя сумма и будет остатком. Он равен величине многочлена, в котором вместо x подставлено a.

Пример. Разделить $f(x)=2x^4-3x^3+x^2-x-9$ на $x-2$.

Имеем:

$$\begin{array}{l|l} 2\;-3\;+1\;-1\;-\;9 & \;2 \\ \underline{\;\;\;+4\;+2\;+6\;+10} & \\ 2\;+1\;+3\;+5\;+\;1. & \end{array}$$

Последнее число, т. е. 1, есть остаток, равный значению $f(2)$. Частное же равно $2x^3+x^2+3x+5$.

248. Нахождение корней многочленов. Метод, описанный в предыдущем n^0, весьма полезен для нахождения целых корней уравнения какой угодно степени. Пользуясь им, мы испытываем небольшое число целых чисел в качестве возможных корней и разлагаем многочлен на множители.

Пример. Найти корни уравнения

$$4x^3 - x^2 - 19x + 10 = 0.$$

Испытываем в качестве корня число 2.
Имеем:

$$\begin{array}{rrrr|l} 4 & -1 & -19 & +10 & \underline{2} \\ & 8 & +14 & +10 & \\ \hline 4 & +7 & -5 & 0. & \end{array}$$

Остаток равен нулю, следовательно $x = 2$ есть корень уравнения, а $(x - 2)$ является множителем многочлена, находящегося в левой части равенства.

Частное от деления на $x - 2$ равно

$$4x^2 + 7x - 5.$$

Следовательно, имеем:

$$(x - 2)(4x^2 + 7x - 5) = 0.$$

Решая уравнение

$$4x^2 + 7x - 5 = 0,$$

найдем, что остальные корни многочлена

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{129}}{8}.$$

Говоря о выборе чисел, которые следует испытывать в качестве корней, следует заметить, что они должны быть множителями постоянного члена, т. е. в предыдущем примере — множителями десяти. Предполагается, что до этого уравнение освобождено от дробей.

Таким образом в уравнении

$$x^4 - 17x^2 - 34x - 30 = 0$$

возможными целыми корнями будут следующие числа:

$$\pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \ \pm 5, \ \pm 6, \ \pm 10, \ \pm 15, \ \pm 30,$$

являющиеся множителями 30.

При испытании следует начинать с меньших чисел. Легко выяснить, что корней бо́льших 5 это уравнение не имеет. Оно обращается в тождество при следующих значениях x:

$$5, \ -3, \ -1 + \sqrt{-1} \quad \text{и} \quad -1 - \sqrt{-1},$$

которые и являются корнями.

249. Дробные корни. Дробь $\frac{p}{q}$ может являться корнем уравнения, если числитель p есть множитель постоянного члена, а знаменатель q — множитель коэффициента при наивысшей степени неизвестного x в этом уравнении.

Пример. Найти дробные корни уравнения

$$24x^5+2x^4-3x^3-21x^2+x+6=0.$$

Постоянный член есть 6. Его множителями являются: 1, 2, 3, 6.

Коэффициент при наивысшей степени неизвестного равен 24, причем его множители суть:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 и 24.

Все возможные комбинации из множителей указанных чисел, взятых в качестве числителей и знаменателей дробей, будут:

$$\pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{2}{3},\ \pm\frac{1}{4},\ \pm\frac{3}{2},\ \pm\frac{3}{4},\ \pm\frac{1}{6},\ \pm\frac{1}{8},\ \pm\frac{3}{8},\ \pm\frac{1}{12},\ \pm\frac{1}{24}.$$

Подставляя $+\frac{1}{2}$, убедимся, что эта дробь не является корнем уравнения. Испытывая $\left(-\frac{1}{2}\right)$, имеем:

$$\begin{array}{rrrrrr|l} 24 & +2 & -3 & -21 & +1 & +6 & -\frac{1}{2} \\ & -12 & +5 & -1 & +11 & -6 & \\ \hline 24 & -10 & +2 & -22 & +12 & 0. & \end{array}$$

Остаток равен нулю, следовательно $\left(-\frac{1}{2}\right)$ — корень уравнения.

Испытаем теперь в качестве корня полученного частного дробь $+\frac{2}{3}$.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 24 & -10 & +2 & -22 & +12 & \frac{2}{3} \\ & +16 & +4 & +4 & -12 & \\ \hline 24 & +6 & +6 & -18 & 0; & \end{array}$$

$+\frac{2}{3}$ является корнем.

Испытываем $+\frac{3}{4}$:

$$\begin{array}{rrrr|l} 24 & +6 & +6 & -18 & \frac{3}{4} \\ & +18 & +18 & +18 & \\ \hline 24 & +24 & +24 & 0; & \end{array}$$

$+\frac{3}{4}$ является корнем.

Деление последнего частного на 24 дает

$$x^2+x+1.$$

Таким образом множители заданного многочлена будут:

$$24\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)(x^2+x+1).$$

250. Перенесение графиков функций. Вычисление коэффициентов преобразованного уравнения. Пусть график функции $y=f(x)$ перенесен на h единиц влево, так что каждое значение x будет заменено значением $x-h$.

Пусть теперь уравнение новой кривой будет иметь вид

$$[65] \qquad y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n.$$

Если эту кривую передвинуть в прежнее положение, то уравнение [65] обратится в следующее:

$$y=f(x)=a_0(x-h)^n+a_1(x-h)^{n-1}+a_2(x-h)^{n-2}\ldots$$
$$\ldots+a_{n-1}(x-h)+a_n.$$

Разделив $f(x)$ на $(x-h)$, мы получим в остатке a_n, в то время как частное будет равно

$$a_0(x-h)^{n-1}+a_1(x-h)^{n-2}+\ldots+a_{n-2}(x-h)+a_{n-1}.$$

Разделив полученное выражение на $(x-h)$ вторично, имеем следующее частное.

$$a_0(x-h)^{n-2}+a_1(x-h)^{n-3}+\ldots+a_{n-2}.$$

Следующее деление на $(x-h)$ даст в остатке a_{n-3}. Продолжаем действие до тех пор, пока не дойдем до последнего коэффициента. Полученные остатки являются коэффициентами преобразованного уравнения.

Пример. Требуется перенести график уравнения

$$y=x^3+7x^2-22x-4$$

на две единицы влево и написать уравнение нового графика.

Имеем:

$$\begin{array}{rrrr|l}
1 & +7 & -22 & -4 & \underline{2} \\
 & +2 & +13 & -8 & \\
\hline
1 & +9 & -4 & \mathbf{-12} & \\
 & +2 & +22 & & \\
\hline
1 & +11 & \mathbf{+18} & & \\
 & +2 & & & \\
\hline
1 & \mathbf{+13} & & &
\end{array}$$

Жирные числа суть коэффициенты преобразованного уравнения, которое имеет вид

$$x^3+13x^2+18x-12=f(x).$$

251. Приближенное решение уравнений, имеющих иррациональные корни. Метод, изложенный в n⁰ 250, полезен для нахождения приблизительных значений иррациональных корней с любой степенью точности.

Положим, что значение корня находится между 2 и 3, причем после вычерчивания графика видно, что более точное его значение лежит между 2,4 и 2,5, так что кривую следуе перенести на 2,4 единицы влево (рис. 93). Тогда истинное значение корня отличается от полученного менее чем на 0,1.

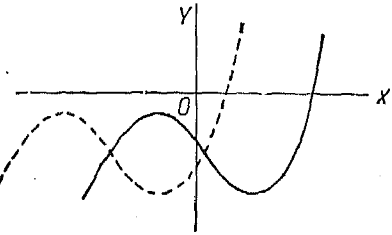


Рис. 93.

Перенося вторично начало координат, положим — влево на 0,07 единицы, и найдя, что при этом получается более близкое к истинному значение x, получим последнее, складывая результаты последовательных приближений:

$$x = 2 + 0{,}4 + 0{,}07 = 2{,}47.$$

252. Графическое изображение многочленов. При вычерчивании графика многочлена, с целью облегчить вычисление можно воспользоваться тем, что остаток, получающийся при делении, дает значение функции y при подстановке в данное выражение соответствующих значений x.

Рассмотрим выражение

$$y = x^3 + 3x^2 - 2x - 18.$$

Значение y при $x = 0$ находится прямой подстановкой и равно (-18).

Имеем:

При $x = 1$

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & +3 & -2 & -18 & 1 \\ & 1 & +4 & +2 & \\ \hline 1 & +4 & +2 & -16. & \end{array}$$

Остаток (-16).

При $x = 2$

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & +3 & -2 & -18 & 2 \\ & +2 & +10 & +16 & \\ \hline 1 & +5 & +8 & -2 & \end{array}$$

Остаток (-2).

При $x = 3$

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & +3 & -2 & -18 & 3 \\ & 3 & +18 & +48 & \\ \hline 1 & +6 & +16 & +30. & \end{array}$$

Остаток $(+30)$.

Можно заметить, что если x еще больше, то остаток будет положительным количеством.

Рассмотрим теперь значения функции при отрицательных x.

При $x = -1$

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & +3 & -2 & -18 & -1 \\ & -1 & -2 & +4 & \\ \hline 1 & +2 & -4 & -14. & \end{array}$$

Остаток (-14).

При $x = -2$

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & +3 & -2 & -18 & -2 \\ & -2 & -2 & +8 & \\ \hline 1 & +1 & -4 & -10. & \end{array}$$

Остаток (-10)

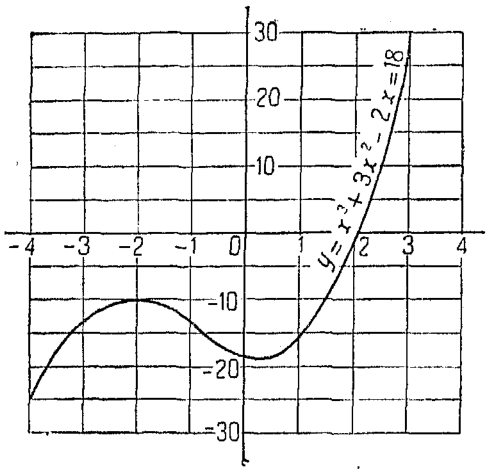


Рис. 94.

При $x = -3$

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & +3 & -2 & -18 & -3 \\ & -3 & 0 & +6 & \\ \hline 1 & 0 & -2 & -12 & \end{array}$$

Остаток (-12).

При $x = -4$

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & +3 & -2 & -18 & -4 \\ & -4 & +4 & -8 & \\ \hline 1 & -1 & +2 & -26. & \end{array}$$

Остаток (-26).

Все отрицательные значения x, которые по абсолютной величине больше (-4), дают отрицательные остатки.

Для удобства построения кривой по точкам выпишем значен я переменных в виде таблицы:

x	y
-4	-26
-3	-12
-2	-10
-1	-14
0	-18
1	-16
2	-2
3	$+30$

Точки пересечения кривой с осью X дают корни уравнения.

В данном случае имеется один действительный и два мнимых корня (см. nn⁰ 254 и 260).

253. Применение метода перенесения кривой (метод Хорнера).

Для того, чтобы найти приближённое значение иррационального корня уравнения

$$x^3 + 3x^2 - 2x - 18 = 0,$$

график которого был получен в предыдущем n⁰, мы замечаем из последнего, что величина корня находится между 2 и 3, а потому переносим кривую на 2 единицы влево. Имеем:

$$\begin{array}{rrrr|l}
+1 & +3 & -2 & -18 & \ 2 \\
 & 2 & +10 & +16 & \\
\hline
1 & +5 & +8 & -2 & \\
 & 2 & +14 & & \\
\hline
1 & 7 & 22 & & \\
 & 2 & & & \\
\hline
1 & +9. & & &
\end{array}$$

Уравнение кривой после перенесения будет

$$x^3 + 9x^2 + 22x - 2 = 0.$$

Для $h = 2$ мы получили остаток (-2) и определяем что для следующего перенесения h должно быть около $0{,}08$; тогда остаток будет близок к нулю.

$$\begin{array}{rrrr|l}
1 & +9{,}00 & +22{,}0000 & -2{,}0000 & \ 0{,}08 \\
 & +0{,}08 & +\ 0{,}7264 & +1{,}8181 & \\
\hline
1 & +9{,}08 & +22{,}7264 & -0{,}1819 & \\
 & 0{,}08 & 0{,}7328 & & \\
\hline
1 & +9{,}16 & +23{,}4592 & & \\
 & 0{,}8 & & & \\
\hline
1 & +9{,}24. & & &
\end{array}$$

Новое уравнение будет иметь вид

$$x^3 + 9{,}24x^2 + 23{,}4592x - 0{,}1819 = 0,$$

откуда видно, что постоянный член равен (—0,1819). Для следующего перенесения испытываем значение $h = 0{,}007$.

$$\begin{array}{lllll|l}
1 & +9{,}240 & +23{,}4592 & -0{,}1819 & & 0{,}007 \\
 & +0{,}007 & 0{,}0647 & +0{,}1647 & & \\
\hline
1 & +9{,}247 & +23{,}5239 & -0{,}0172 & & \\
 & 0{,}007 & +\ 0{,}0648 & & & \\
\hline
1 & +9{,}254 & +23{,}5887 & & & \\
 & +0{,}007 & & & & \\
\hline
1 & +9{,}261 & & & &
\end{array}$$

Новое уравнение будет иметь вид

$$x^3 + 9{,}261x^2 + 23{,}5887x - 0{,}0172 = 0.$$

Последнее перенесение дает очень малый постоянный член; поэтому, вместо того чтобы продолжать действовать по-предыдущему, для получения дальнейшего приближения применим другой метод.

Так как x является величиной весьма малой, то, пренебрегая членами, содержащими квадрат и куб неизвестной, получим:

$$23{,}5887x = 0{,}0172,$$

откуда

$$x = 0{,}00069.$$

Складывая величины, на которые мы переносили кривую, найдем значение корня

$$2 + 0{,}08 + 0{,}007 + 0{,}00069 = 2{,}08769.$$

Описанный метод нахождения приближенного значения корня носит название *метода Хорнера*.

254. Кратные корни. Некоторые уравнения, например

$$x^3 - 8x^2 + 21x - 18 = 0,$$

удовлетворяются только двумя значениями x: 2 и 3; однако мы говорим, что 3 есть двойной корень, так как $(x-3)^2$ является множителем многочлена

$$x^3 - 8x^2 + 21x - 18.$$

Общее число корней многочленного уравнения n-ой степени равно n. В это число корней входят как действительные, так и мнимые корни; что касается кратных корней, то число их равняется числу раз, которое они повторяются.

Если целое рациональное уравнение с действительными коэффициентами имеет среди корней комплексную величину $c + id$, то оно обязательно должно иметь и корень $c - id$. Комплексные корни встречаются попарно. Отсюда следует, что каждое уравнение нечетной степени с действительными коэффициентами имеет, по крайней мере, один действительный корень. Графики многочленов степени выше второй обычно образуют несколько петель, как это показано на рис. 95.

Если ось X коснется кривой, то уравнение имеет два действительных равных корня, которые выражаются абсциссой точки касания. В случае, если петли перенесены выше или ниже оси X благодаря наличию членов, влияющих на это перенесение, то уравнение имеет комплексные корни. Характер графика, если эти условия соблюдены, показан на рис. 96 и 97. Следует, однако, отметить, что если график не имеет петель, то все-таки возможно присутствие комплексных корней.

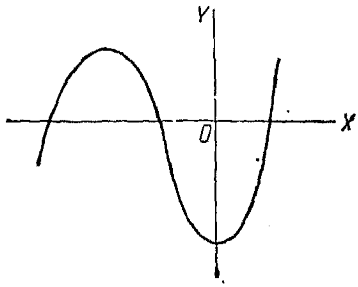


Рис. 95.

Комплексные корни, как уже указывалось, встречаются попарно, и каждой вершине кривой соответствуют два комплексных корня за исключением того случая, когда ветви, идущие от вершины, пересекают ось OX, или кривая касается

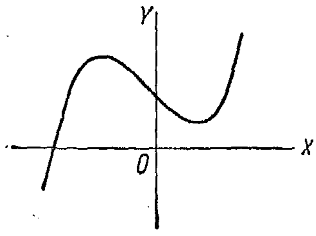


Рис. 96.

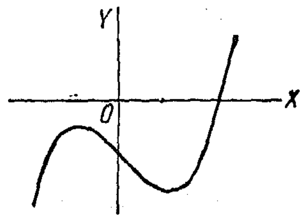


Рис. 97.

своей вершиной оси X, и тогда точка касания соответствует двум действительным и равным между собой корням.

Чем больше разность между значениями корней, тем значительнее расхождение частей кривой в обе стороны петли. Обратно, чем меньше отличаются значения корней друг от друга, тем ближе сходятся ветви кривой. Если корнем уравнения с рациональными коэффициентами является иррациональный двучлен $a+\sqrt{b}$, то его сопряженная величина $a-\sqrt{b}$ является корнем того же уравнения, и обратно.

255. Соотношение между корнями и коэффициентами в общем уравнении n-ой степени. Пусть имеем общую форму

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n = 0,$$

полученную из уравнения [65] путем деления последнего на a_0.

В этом случае имеем:

Сумма корней равна коэффициенту второго члена с обратным знаком, т. е., если $n = 4$:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -p_1.$$

Сумма произведений корней, взятых попарно, равна коэффициенту третьего члена, т. е.

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 = p_2.$$

Сумма произведений корней, взятых по три, равна коэффициенту четвертого члена с обратным знаком, т. е.

$$x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 = -p_3.$$

Произведение корней равно свободному члену, причем если n нечетное, то знак свободного члена следует переменить на обратный. Таким образом, имеем

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = p_4.$$

256. Составление уравнений по данным корням. Если заданы корни x_1, x_2, $x_3 \ldots x_n$, то, перемножая двучлены $(x - x_1)$, $(x - x_2)$, $(x - x_3) \ldots (x - x_n)$ и приравняв полученное произведение нулю, найдем искомое уравнение.

Пример. Пусть даны корни 4, -3, $\pm\frac{3}{2}$.

В этом случае имеем

$$(x - 4)(x + 3)\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) = 0;$$

раскрывая скобки, найдем:

$$x^4 - x^3 - \frac{57}{4}x^2 + \frac{9}{4}x + 27 = 0,$$

или

$$4x^4 - 4x^3 - 57x^2 + 9x + 108 = 0.$$

График многочлена, стоящего в левой части этого уравнения, показан на рис. 98.

Можно также составить уравнение, пользуясь соотношениями, указанными в n⁰ 255.

В таком случае имеем.

$$p_1 = -\left(4 - 3 + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right) = -1.$$

$$p_2 = 4\,(-3) + 4\left(\frac{3}{2}\right) + 4\left(-\frac{3}{2}\right) + (-3)\left(\frac{3}{2}\right) + (-3)\left(-\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) = -12 - \frac{9}{4} = -\frac{57}{4}.$$

$$p_3 = -\left[4\,(-3)\left(\frac{3}{2}\right) + 4\,(-3)\left(-\frac{3}{2}\right) + 4\left(\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) + (-3)\left(\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\right] = -\left[-\frac{36}{4} + \frac{27}{4}\right] = \frac{9}{4}.$$

$$p_4 = 4\,(-3)\left(\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{108}{4}.$$

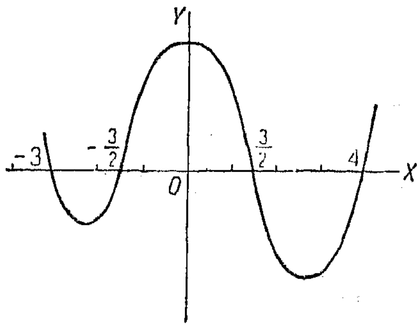


Рис. 98.

Составляя уравнение, получим:

$$x^4 - x^3 - \frac{57}{4}x^2 + \frac{9}{4}x + \frac{108}{4} = 0,$$

или

$$4x^4 - 4x^3 - 57x^2 + 9x + 108 = 0.$$

257. Указания, облегчающие графическое решение. После того как график многочлена вычерчен (причем для получения величин y, соответствующих различным значениям x, пользуются методом, указанным в n⁰ 252), сперва определяем, имеются ли рациональные корни. Необходимо помнить, что если уравнение представлено в виде

$$x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \ldots + p_{n-1}x + p_n = 0,$$

свободный член p_n равен произведению корней. Если, например, он равен трем, то только ± 3 или ± 1 могут быть корнями уравнения при условии, что уравнение имеет рациональные корни.

258. Увеличение корней уравнения в k раз. Если в уравнении

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$$

корнями являются x_1, x_2, x_3 ... x_n и мы желаем составить уравнение, имеющее корни, в k раз большие по сравнению с первоначальным, то в последнем уравнении следует заменить x через $\frac{x}{k}$. Тогда имеем

$$f\left(\frac{x}{k}\right)=a_0\left(\frac{x}{k}\right)^n+a_1\left(\frac{x}{k}\right)^{n-1}+a_2\left(\frac{x}{k}\right)^{n-2}+\ldots$$
$$\ldots+a_{n-1}\left(\frac{x}{k}\right)+a_n=0.$$

После освобождения от дробей, получим:

$$a_0x^n+a_1kx^{n-1}+a_2k^2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}k^{n-1}x+k^na_n=0.$$

259. Составление уравнений, имеющих корни, равные по абсолютной величине корням данного уравнения, но противоположные им по знаку. Если требуется составить уравнение, корни которого имеют знаки, противоположные знакам корней данного уравнения, то для этого следует изменить знаки членов последнего через один.

Очевидно, что это равносильно умножению корней на $k=-1$.

260. Правило Декарта относительно знаков. Число действительных положительных корней уравнения $f(x)=0$ не более, чем число изменений знаков функции $f(x)$.

Общее уравнение $f(x)=0$ имеет число действительных отрицательных корней не большее, чем число изменений знака функции $f(-x)$.

Если a — число положительных корней и b — число отрицательных корней, то $n-(a+b)=$ число комплексных корней, где n — степень уравнения.

Графический метод решения уравнений высших степеней особенно рекомендуется в инженерной практике. Если требуется определить точное значение функции, то части кривой, лежащие вблизи пересечения графика с осью X, могут быть начерчены в очень большом масштабе, со ответственно чему получим большую степень точности решения.

Глава XI.

СТЕПЕННЫЕ ФУНКЦИИ.

261. Степенные функции. Алгебраические функции, состоящие из единственного члена, который является простой степенью переменной, например функции

$$x^2,\ x^3,\ \frac{1}{x^2},\ x^{\frac{2}{3}},\ ax^{-2} \text{ и т. д.,}$$

называются *степенными*.

По своему значению они занимают первое место после линейных функций, причем степенная функция вида $y = ax^n$ выражает один из трех основных законов, управляющих явлениями природы.

В n⁰ 170 мы исследовали функцию, получаемую возвышением в квадрат переменной. Нет необходимости что-либо добавить к этому исследованию, за исключением разве того, что обратить внимание читателя на некоторые законы природы, выражаемые этой функцией. Площадь круга изменяется пропорционально квадрату радиуса, а путь, проходимый падающим телом, пропорционален квадрату времени падения. Можно было бы привести много примеров, подобных перечисленным, для того чтобы подчеркнуть важность изучения степенной функции $y = ax^2$.

Кроме того имеется много других соотношений между переменными, имеющих вид $y = ax^3$, например соотношение между объемом шара и его радиусом или между объемом куба и его стороной. Функция $y = ax^3$ была уже рассмотрена в n⁰ 232 с достаточными для наших целей подробностями. Здесь мы разберем еще некоторые виды степенных функций, о которых ранее не упоминалось.

Для каждой задачи значение a различно, хотя в течение всего рассуждения оно остается постоянным. В n⁰ 232 было замечено, какое влияние оказывает величина a на вид графика функции $y = x^n$.

262. Случай 1. $y = x^n$ [66], где n — положительное. Все уравнения этого типа, например $y = x$, $y = x^2$, изображаются кривыми, которые все проходят через точки $(0, 0)$ и $(1, 1)$. Эти кривые называются *параболами*.

Кривая $y = x^2$ называется просто *параболой*,

$y = x^3$ называется *кубической параболой*,

$y = x^{\frac{3}{2}}$ называется *полукубической параболой*

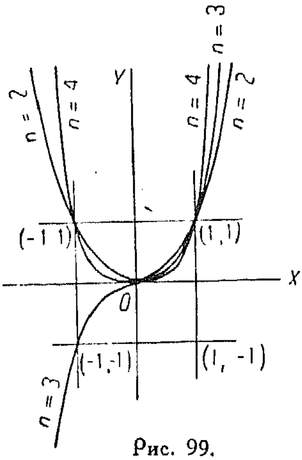


Рис. 99.

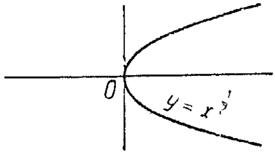


Рис. 100

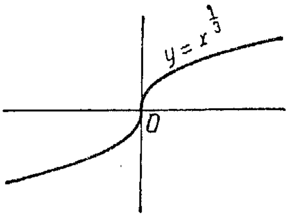


Рис. 101.

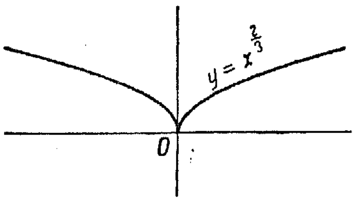


Рис. 102.

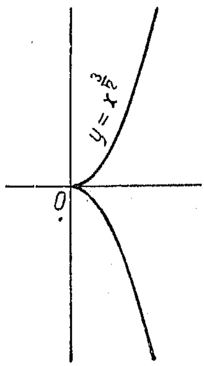


Рис. 103.

Вид кривых для различных целых значений n показан на рис. 99.

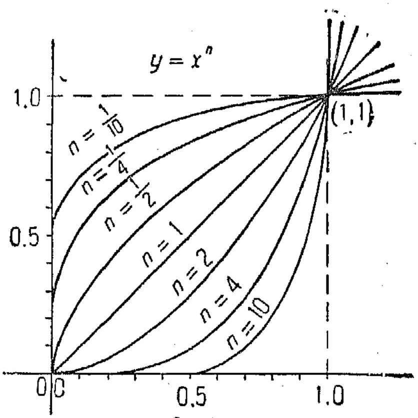


Рис. 104.

Графики эти могут быть заменены прямыми, если пользоваться логарифмической бумагой, как это показано на рис. 127 и 128.

263. Параболы при n дробном. Соотношение между графиками $y = x^n$ для различных дробных значений n показано на рис. 100, 101, 102 и 103.

На рис. 104 даны графики функций при различных дробных значениях n, расположенные в первой четверти.

264. Случай 2. $y=x^n$ [66], **где** n **— отрицательное.** Эти кривые носят название *гиперболических*. Общая форма их уравнений такова:

$$y=x^{-n} \quad \text{или} \quad y=\frac{1}{x^n}$$

или

$$yx^n=1, \text{ где } n>0.$$

Частный случай, когда $xy=1$, уже рассматривался в n^0 206. Соответствующая кривая называется *равносторонней гиперболой*.

На рис. 105 изображен ряд графиков гиперболических функций для различных целых отрицательных значений n, а на рис. 106— ряд кривых, соответствующих различным отрицательным дробным значениям n.

Рис. 107 показывает расположение графиков $y=x^{-n}$ в первой четверти.

Гиперболические кривые только-что упомянутого типа приближаются к асимптотам, которыми здесь являются оси X и Y.

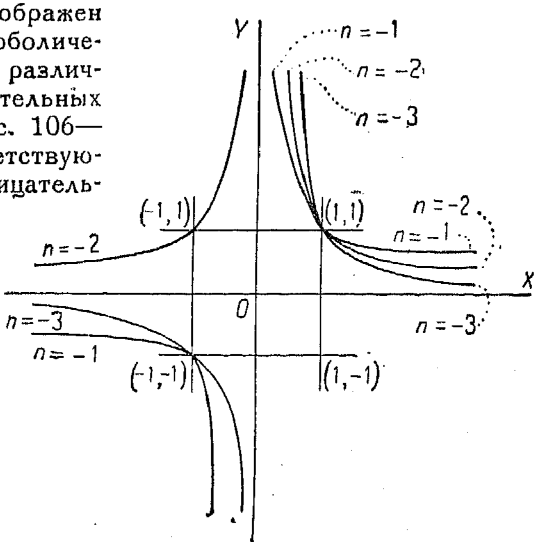


Рис. 105.

Скорость, с которой они приближаются к этим осям, зависит от относительной величины показателей при x и y. Четверть, в которой располагаются кривые, определяется четностью или нечетностью показателей.

265. Изменение переменной. Если в уравнении, содержащем x и y, заменить x на $(-x)$, то график, полученный таким образом, будет зеркальным отражением первоначального относительно оси Y.

266. Если в функции, содержащей x и y, заменить y на $(-y)$, то соответствующая кривая является отражением первоначальной по отношению к оси X

267. Если в функции, содержащей переменные x и y, поставить одно взамен другого, то полученная функция в этом случае будет изображаться кривой, являющейся отражением графика первоначальной функции по отношению к прямой $y=x$.

268. Если при замене x на $(-x)$ функция не изменяется, то график симметричен по отношению к оси Y (рис. 108).

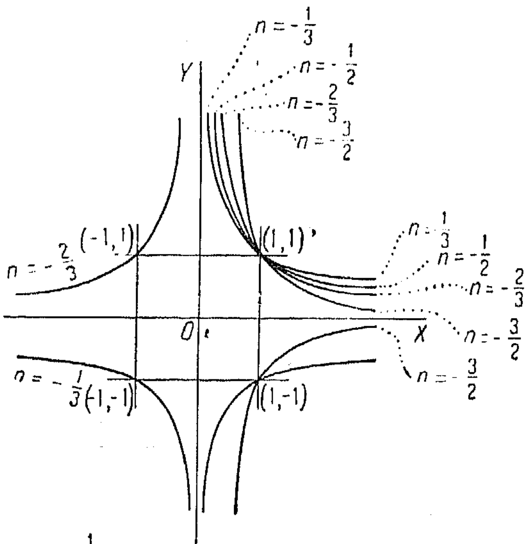


Рис. 106.

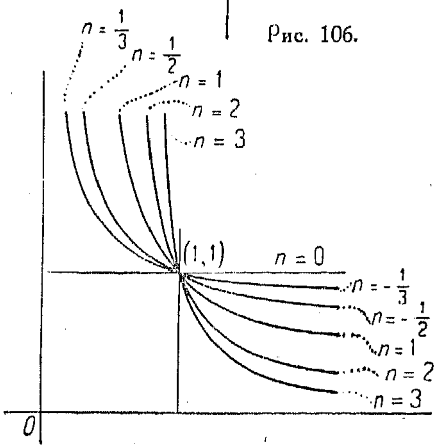


Рис. 107.

269. Если при замене y на $(-y)$ функция не изменяется, то соответствующая кривая симметрична относительно оси X.

270. Если функция не изменяется оттого, что x и y поставлены одно на место другого, то кривая симметрична относительно прямой $y=x$.

271. Если при замене x на $-x$ и y на $-y$ функция не изменяется, то кривая симметрична относительно начала координат.

272. Если при замене x на $(-y)$ и y на $(-x)$ функция не изменяется, то соответствующая кривая симметрична относительно прямой $y=-x$.

273. Подстановка $\left(\frac{x}{a}\right)$ вместо x в уравнение кривой соответствует умножению всех ее абсцисс на величину a.

274. Подстановка $\left(\frac{y}{a}\right)$ вместо y в уравнение кривой соответствует умножению всех ее ординат на a.

275. Функции $y = ax^n$ и $y = x^n$ (см. nn° 261 и 232). Постоянная a, в выражении $y = ax^n$, увеличивает или уменьшает величину функции по отношению к $y = x^n$ в a раз.

Если $a > 1$, то y увеличивается, если же $a < 1$, то значения y делаются по сравнению с $y = x^n$ меньшими.

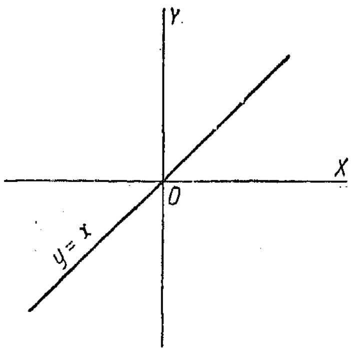


Рис. 108.

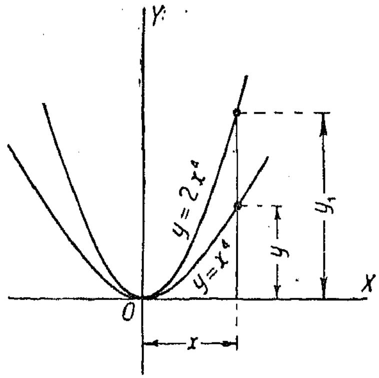


Рис. 109.

На рис. 109 показаны графики функций $y = x^n$ и $y_1 = 2x^n$. Очевидно, ординаты y_1 вдвое больше соответствующих ординат y.

276. Если между переменными x и y существует соотношение $y = ax^n$, где n—число положительное, то говорят, что y пропорционально x^n. Точно так же в случае $y = \frac{a}{x^n}$ говорят, что y обратно пропорционально x^n.

277. Во всякой степенной функции от x, при умножении x на постоянное число, y также изменяется в постоянное число раз.

Пусть $y = ax^n$. Возьмем несколько значений x и соответствующих им значений y, например x_1, x_2 и y_1, y_2:

$$y_1 = a\ (x_1)^n \tag{1}$$

$$y_2 = a\ (mx_1)^n = am^n\ (x_1)^n. \tag{2}$$

Разделив (2) на (1), имеем:

$$\frac{y_2}{y_1}=\frac{am^n\,(x_1)^n}{a\,(x_1)^n}=m^n.$$

Это значит, что если в степенной функции умножить x на постоянную m, то y увеличится в m^n раз, т. е. в постоянное число раз.

Это правило применяют в тех случаях, когда желают выяснить, существует ли между полученными из опыта данными степенная зависимость.

278. Случай функции [67] $y=\left(\frac{x}{a}\right)^n$. График $y=\left(\frac{x}{a}\right)^n$ может быть получен из основного графика $y=x^n$ посредством умножения всех абсцисс последней на a. Отношение абсцисс этих кривых равно $a:1$.

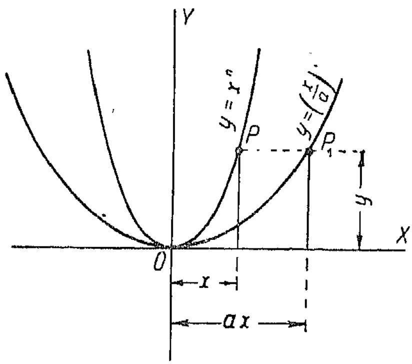


Рис. 110.

На рис. 110 изображены графики указанных функций. Из нее видны как различие в форме, так и способ построения.

Из n⁰ 273 следует, что подстановка $\left(\frac{x}{a}\right)$ вместо x в уравнение любой кривой рассматриваемого вида соответствует умножению всех абсцисс на a.

279. Перенесение графиков степенных функций. Если в степенную функцию $y=x^n$ вместо x подставить $(x+h)$, то получим:

[68] $$y=(x+h)^n$$

Как и в случае квадратного уравнения (n⁰ 172), это соответствует передвижению начала координат на расстояние h в направлении оси X.

Если мы начертим график функции $y=x^n$ и желаем преобразовать его в график функции $y=(x+h)^n$, то для этого следует перенести начало координат в точку $(h, 0)$. Полученная кривая $y=(x+h)^n$ отнесена к новому началу.

Пример. Перенести начало координат графика $y=x^{\frac{3}{2}}$ так, чтобы он соответствовал функции $y=\left(x-\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$.

Начертим график $y=x^{\frac{3}{2}}$, представленный на рис. 111 (на рисунке обозначен AO_1B). Здесь вспомогательные оси суть YY_1 и XX_1. Так как $h=-\frac{3}{2}$, то начало координат следует передвинуть влево.

Заметим, что $y=x^{\frac{3}{2}}$ можно также написать так:

$$y^2=x^3,$$

в такой форме эта функция встречается весьма часто.

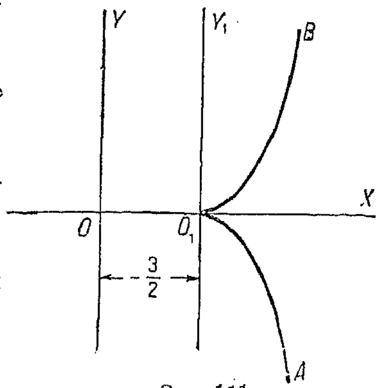


Рис. 111.

280. Случай, при котором в уравнении показательной функции имеется член mx. В случае прибавления члена, содержащего x в первой степени, например mx, график основной функции $y=x^n$ необходимо сдвинуть точно таким же способом, какой применялся для кривых $y=x^2$ и $y=x^3$ (см. n⁰ 234).

Если $m=1$, то имеем:

$$y=ax^n+x.$$

Это равенство указывает на то, что значение $y=ax^n$ увеличивается или уменьшается на величину x.

Если x—положительное, то мы получим увеличение y, в противном случае y уменьшается.

Указанное сложение или вычитание члена, содержащего x, можно произвести графически. Для этого проводим через начало координат прямую, имеющую наклон m, и откладываем значения y (из $y=ax^n$) от нее.

Пример. Преобразовать график $y=x^{\frac{2}{3}}$ посредством сдвига таким образом, чтобы он соответствовал функции $y=x^{\frac{2}{3}}+\frac{x}{2}$.

Начертим график $y=x^{\frac{2}{3}}$, как это показано на рис. 112.

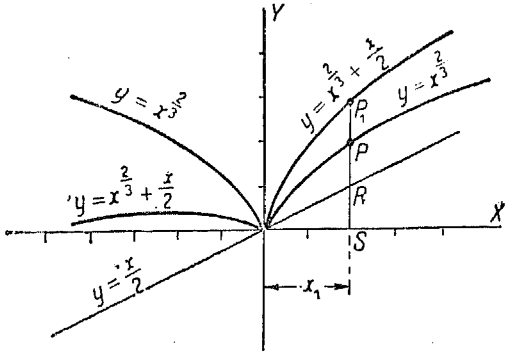


Рис. 112.

Проведем прямую $y=\frac{x}{2}$ с наклоном $\frac{1}{2}$.

Возьмем какое-нибудь расстояние x и посредством циркуля отложим $y=SP=RP_1$ от точки R вверх.

Сделав такое же построение для нескольких точек и соединив их плавной кривой, получим искомый график, который и является графиком функции

$$y=x^{\frac{2}{3}}+\frac{x}{2}.$$

Глава XII.

НЕРАВЕНСТВА И ПЕРЕМЕННЫЕ.

281. Неравенства. Принято говорить, что одно число больше другого, если при вычитании второго числа из первого разность их — положительная.

Если a больше чем b, то это обозначается так: $a > b$. Если же a меньше b, то пишут:

$$a < b.$$

Знаки $\not>$ и $\not<$ означают, соответственно, „не больше чем" и „не меньше чем".

Если в двух неравенствах каждый первый член больше каждого второго члена, то говорят, что оба неравенства имеют одинаковый смысл. Так, неравенства $x > a$ и $y > b$ имеют одинаковый смысл.

Если в одном неравенстве первый член больше второго, а во втором неравенстве первый член меньше второго, то говорят, что неравенства имеют противоположный смысл. Так, например, неравенства $x > b$ и $y < a$ имеют противоположный смысл.

282. Если к обоим членам неравенства прибавить или отнять от них одно и то же число, то получим неравенство, имеющее тот же смысл, что и данное.

Пусть $a > b$, и пусть c — некоторое положительное или отрицательное число; тогда очевидно

$$a - b = p,$$

где p — число положительное.

Прибавляя $c - c = 0$, получим:

$$a + c - (b + c) = p,$$

следовательно

$$a + c > b + c.$$

Примеры.

$$\begin{array}{r} \text{Дано: } 8 > 5 \\ \text{Прибавим } \underline{2 \quad 2} \\ 10 > 7 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} \text{Дано: } 8 > 5 \\ \text{Вычтем } \underline{2 \quad 2} \\ 6 > 3 \end{array}$$

283. Если оба члена неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получим неравенство, имеющее тот же смысл, что и данное.

Если же оба члена неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, то полученное неравенство будет иметь смысл, противоположный смыслу данного.

Пусть $a > b$ и пусть c — какое-нибудь положительное число; тогда

$$a - b = p,$$

где p — число положительное.

Умножая последнее равенство на c, имеем

$$ca - cb = cp.$$

Здесь cp — число положительное, следовательно

$$ca > cb.$$

284. Умножение на (-1) изменяет знаки членов равенства $ca - cb = cp$ на обратные; поэтому имеем

$$cb - ca = -cp.$$

Очевидно $(-cp)$ является числом отрицательным.

Напишем последнее равенство в такой форме:

$$-ca - (-cb) = \text{отрицательному числу.}$$

Отсюда видим, что

$$-ca < -cb.$$

Примеры.

$$\begin{array}{rccc} \text{Дано} & 8 & > & 5 \\ \text{Умножаем на} & 2 & & 2 \\ \hline & 16 & > & 10 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 16 & > & 10 \\ -2 & & -2 \\ \hline -32 & < & -20 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \text{Дано} & 16 & > & 10 \\ \text{Делим на} & 2 & & 2 \\ \hline & 8 & > & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 16 & > & 10 \\ -2 & & -2 \\ \hline -8 & < & -5 \end{array}$$

285. Каждый член неравенства может быть перенесен из одной части его в другую, но при этом необходимо изменить его знак на обратный.

Пусть

$$a-b > c-d.$$

Добавляя b к обеим частям неравенства (n⁰ 282), получим:

$$a > c-d+b.$$

Прибавляя $(-c)$ к обеим частям последнего неравенства, имеем:

$$a-c > b-d.$$

286. Если переменить знаки всех членов неравенства на обратные, то полученное неравенство будет иметь смысл, противоположный смыслу данного.

Справедливость этой теоремы следует из n⁰ 283, так как перемена знака равносильна умножению на (-1). К тому же результату можно притти, перенося все члены в неравенстве $a-b > c-d$, как это сделано в n⁰ 285.

Тогда получим:

$$d-c > b-a \text{ или } -a+b < -c+d.$$

287. Если сложить соответствующие члены нескольких неравенств, имеющих одинаковый смысл, то полученное неравенство будет иметь тот же смысл. Пусть

$$a > b, \quad c > d, \quad e > f \dots$$

Так как $a-b$, $c-d$, $e-f \dots$ суть величины положительные, то их сумма

$$(a+c+e+\dots)-(b+d+f+\dots)$$

также положительная, а следовательно

$$(a+c+e+\dots) > (b+d+f+\dots).$$

288. Если каждый член неравенства вычесть из соответствующих членов равенства, то в результате получим неравенство, имеющее смысл, противоположный смыслу данного.

Положим $a > b$, и пусть c — какое-нибудь число.

Так как $a - b$ = положительному числу и так как число уменьшается, если вычесть из него положительную величину, то

$$c - (a - b) < c.$$

Переносся члены, имеем:

$$c - a < c - b.$$

Таким образом, если вычесть каждый член неравенства $a > b$ из соответствующих членов равенства $c = c$, то полученное неравенство по смыслу противоположно данному.

289. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

В самом деле,

$$a - b = \text{положительному числу},$$

$$b - c = \text{положительному числу},$$

следовательно

$$(a - b) + (b - c) = \text{положительному числу}.$$

Упрощая, получим

$$a - c = \text{положительному числу, т. е. } a > c.$$

Примечание. Точно таким же образом можно доказать, что если $a < b$, $b < c$, то $a < c$.

291. Если соответствующие члены двух неравенств перемножить между собой и если все эти члены — положительные, то полученное неравенство будет иметь тот же смысл, что и данное.

Пусть $a > b$ и $c > d$, где a, b, c и d — положительные. Умножая первое неравенство на c, а второе на b, получим:

$$ac > bc \quad \text{и} \quad bc > bd.$$

Отсюда согласно n⁰ 289 заключаем, что

$$ac > bd.$$

Примечание. Если некоторые члены неравенств — отрицательные, то полученное после перемножения неравенство либо имеет тот же смысл, что и данные, либо — противоположный, либо, наконец, обратится в равенство.

Рассмотрим выражение $12 > 6$ и перемножим его члены на соответствующие члены неравенства $-2 > -5$; тогда получим:

$$-24 > -30.$$

Умножая на соответствующие члены неравенства $-2 > -4$, имеем:

$$-24 = -24.$$

Умножая на соответствующие члены неравенства $-2 > -3$, находим:

$$-24 < -18.$$

292. Частное от деления соответствующих членов неравенства друг на друга может оказаться либо неравенством, у которого первый член больше или же меньше второго, либо — равенством.

Рассмотрим например выражение: $12 > 6$. Разделив оба его члена на соответствующие члены выражения $3 > 2$, получим: $4 > 3$. Разделив их на члены неравенства $4 > 2$, имеем:

$$3 = 3.$$

Наконец, разделив на члены неравенства $6 > 2$, имеем:

$$2 < 3.$$

293. Задачи.

Пример 1. Найти значения x, удовлетворяющие неравенству

$$3x - 10 > 11.$$

Перенося члены из одной части неравенства в другую (согласно n⁰ 285) или прибавляя к обеим частям его по 10 (см. n⁰ 282), получим:

$$3x > 21.$$

Разделив на 3 (согласно n⁰ 283), имеем:

$$x > 7.$$

Следовательно, неравенство справедливо для всех значений x, бо̀льших 7.

Пример 2. Найти значения x, удовлетворяющие системе

$$3x + 5 < 38 \quad (1)$$

$$4x < 7x - 18. \quad (2)$$

Перенося члены в (1), имеем:

$$3x < 33.$$

Деля оба члена на 3, получим:

$$x < 11.$$

Переносяч лены во (2), находим

$$-3x < -18$$

или

$$x > 6.$$

Результат показывает, что оба неравенства удовлетворяются значениями x, лежащими между 6 и 11, иначе говоря 6 есть низший, а 11 высший предел для x.

Пример 3. Найти значения x и y, удовлетворяющие условиям:

$$3x - y > -14 \tag{1}$$

$$x + 2y = 0. \tag{2}$$

Умножая члены (1) на 2, имеем

$$6x - 2y > -28. \tag{3}$$

Прибавляя (2) к (3), находим

$$7x > -28 \tag{4}$$

или

$$x > -4.$$

Умножим (2) на 3:

$$3x + 6y = 0. \tag{5}$$

Вычтем (5) из (1):

$$-7y > -14.$$

Делим оба члена неравенства на -7:

$$y < 2.$$

Таким образом нижний предел x есть (-4), а высший предел y равен 2

Пример 4. Найти значения x, удовлетворяющие неравенству

$$x^2 + 3x > 28.$$

Переносяч члены, находим:

$$x^2 + 3x - 28 > 0.$$

Разлагаем левую часть на множителей:

$$(x-4)(x+7) > 0.$$

Так как $(x-4)(x+7)$ является величиной либо положительной, либо равной нулю, то оба множителя — или положительные или отрицательные. Первый случай будет иметь место при $x > 4$, второй — при $x < -7$.

Отсюда следует, что x может быть равен любому числу, не лежащему между 4 и -7 и не равному 4 и -7.

Пример 5. Доказать, что если a и b — два положительных, не равных между собой числа, то

$$a^2 + b^2 > 2ab.$$

Независимо от того, положительное ли $(a-b)$ или отрицательное, величина $(a-b)^2$ — положительна.

Так как a и b не равны между собой, то $(a-b)^2 > 0$ или $a^2 - 2ab + b^2 > 0$.

Перенося член $(-2ab)$ в правую часть неравенства, имеем, согласно n⁰ 285:

$$a^2+b^2>2ab.$$

Примечание. Если a и b равны между собой, то

$$a^2+b^2=2ab.$$

294. Переменная величина. Во многих задачах приходится иметь дело с величинами, которые изменяются. Такие величины называются *переменными*.

Говорят, что одна величина изменяется прямо пропорционально другой, если при изменении одной из них вторая изменяется в том же отношении.

Знак $\propto$ означает: „изменяется пропорционально"; например $x\propto y$ есть краткое обозначение пропорции

$$x:x'=y:y'.$$

Здесь x' — значение, которое принимает x, когда y делается равным y'.

Выражение $x\propto y$ означает, что если x увеличивается вдвое, то y также возрастает в два раза, т. е. отношение x и y всегда остается равным некоторой постоянной a.

Если величину постоянного отношения обозначить буквой k, то при $x\propto y$

$$\frac{x}{y}=k \text{ или } x=ky.$$

Если x изменяется пропорционально y $(x\propto y)$, то x равно y, умноженному на постоянную k.

295. Говорят, что данная величина обратно пропорциональна другой, если при увеличении первой в некоторое число раз вторая уменьшается в такое же число раз. Так, например, время, потребное для выполнения какой-либо работы, изменяется обратно пропорционально числу работающих.

Если $x\propto\frac{1}{y}$, то величина отношения $x:\frac{1}{y}$ равна постоянной k (при всех значениях переменных),

$$\frac{x}{\frac{1}{y}}=k \text{ или } xy=k, \text{ откуда } x=\frac{k}{y}.$$

296. Переменная величина изменяется пропорционально двум другим, если она пропорциональна произведению этих последних.

В случае если $x \propto yz$, причем величина отношения равна постоянной k, имеем:

$$\frac{x}{yz} = k \text{ или } x = kyz.$$

297. Переменная величина прямо пропорциональна второй и обратно пропорциональна третьей переменной, если она пропорциональна произведению второй на величину, обратную третьей.

В случае, когда $x \propto y\frac{1}{z}$ или $x \propto \frac{y}{z}$, причем k есть постоянная величина отношения, имеем:

$$x : \frac{y}{z} = k \text{ или } x = k\frac{z}{y}.$$

Время, нужное для выкапывания канавы, прямо пропорционально ее длине и обратно пропорционально числу землекопов.

В самом деле, если длина канавы в 10 раз больше первоначальной, а число занятых рабочих увеличено в 5 раз, то для выполнения работы потребуется в 2 раза больше времени, чем раньше.

Если x пропорционально y при z постоянном и если x пропорционально z при y постоянном, x прямо пропорционально произведению переменных zy.

Точно так же, если x пропорционально каждому из трех или большего числа переменных, причем остальные имеют постоянные значения, то x пропорционально их произведению.

$$x \propto yzv.$$

298. Задачи.

Пример 1. Если x обратно пропорционально y, причем $x = 6$ при $y = 8$, то какова величина x при $y = 12$?

Так как $x \propto \frac{1}{y}$, то, полагая постоянное отношение x к $\frac{1}{y}$ равным k, имеем:

$$xy = k.$$

При $x = 6$, $y = 8$, следовательно

$$k = 6 \cdot 8 = 48.$$

Как сказано выше, k—постоянная, равная 48 при всяком значении y, в том числе и при $y = 12$.

Подставляя значения k и y в уравнение

$$k = xy,$$

имеем

$$x \cdot 12 = 48; \; x = 4.$$

Пример 2. Если $x \propto y$ и $y \propto z$, то докажем, что $x \propto z$.

Пусть m представляет собой величину постоянного отношения x к y, а n — величину постоянного отношения y к z. Имеем:

$$x = my \qquad (1)$$

$$y = nz \qquad (2)$$

Подставляя nz вместо y в уравнение (1), получим:

$$x = mnz.$$

Но произведение $m \cdot n$ есть величина постоянная, следовательно

$$x \propto z.$$

Пример 3. Объем конуса изменяется прямо пропорционально высоте и квадрату диаметра основания. Если высота равна 15, а диаметр основания 10, то объем равен 392,7.

Каков будет объем конуса, если высота равна 5, а диаметр основания 20?

Пусть V, H и D обозначают соответственно объем, высоту и диаметр основания любого конуса, а V' — объем конуса высотой 5, имеющего диаметр основания равный 20.

Так как $V = \propto HD^2$ или $V = kHD^2$, то при $V = 392{,}7$, $H = 15$ и $D = 10$, имеем:

$$392{,}7 = k \cdot 15 \cdot 100. \qquad (1)$$

Но V обращается в V' при $H = 5$ и $D = 20$;

$$V' = k \cdot 5 \cdot 400. \qquad (2)$$

Деля (1) на (2), получим:

$$\frac{V'}{392{,}7} = \frac{5}{15} \cdot \frac{400}{100} = \frac{4}{3}; \quad V' = \frac{4}{3}\,(392{,}7) = 523{,}6.$$

Глава XIII.

ПРОГРЕССИИ.

299. Ряд. Совокупность величин, находящихся между собой в таком отношении, что каждая из них может быть получена из одной или нескольких предыдущих по некоторому определенному закону, называется рядом.

300. Арифметическая прогрессия. Арифметической прогрессией называется ряд, каждый член которого, за исключением первого, получается из предыдущего путем прибавления к нему постоянного количества. Это количество называется разностью прогрессии.

[69] $$a,\ (a+d),\ (a+2d),\ (a+3d)\ .\ .\ .$$

В этой арифметической прогрессии a — первый член, d — разность.

Если $a=3$, a $d=4$, то прогрессия будет иметь вид:

$$3,\ 7,\ 11,\ 15,\ 19\ .\ .\ .$$

и является возрастающей.

Если $a=17$ и $d=-7$, то получим прогрессию

$$17,\ 10,\ 3,\ -4,\ -11\ .\ .\ .\ ,$$

которая является убывающей.

Так как для получения каждого последующего члена к предыдущему прибавляется постоянная величина d, то для получения третьего члена к a прибавляется $2d$, для получения четвертого члена к a прибавляется $3d$, для получения n-ного члена к a следует прибавить $(n-1)\,d$. Отсюда

[70] последний n-ный член равен $a+(n-1)\,d$.

В дальнейшем мы будем обозначать последний член буквой l.

301. Сумма S первых n членов арифметической прогрессии. Пусть

$$S=a+(a+d)+(a+2d)+\ .\ .\ .\ +(l-d)+l.$$

Напишем члены в обратном порядке:

$$S=l+(l-d)+\ .\ .\ .\ +(a+2d)+(a+d)+a.$$

Складывая, имеем:

$$2S=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\ .\ .\ .\ +(a+l)$$

или

$$2S=n\ (a+l).$$

302. Из предыдущего n⁰ имеем:

[71] $$S=\frac{n}{2}(a+l),$$

где n — порядковый номер последнего члена l, Так как $l = a + (n-1)\,d$, то, подставляя в [71], получим

$$S = \frac{n}{2}\left\{a + [a + (n-1)\,d]\right\}$$

или

[72] $$S = \frac{n}{2}\left[\,2a + (n-1)\,d\,\right].$$

303. В большинстве задач на арифметические прогрессии входят пять величин: a, d, n, l и S.

Если три из них заданы, то остальные две могут быть найдены путем решения системы уравнений:

$$\begin{cases} l = a + (n-1)\,d & [70] \\ S = \frac{n}{2}(a + l). & [71] \end{cases}$$

Для удобства представим ряд в следующем виде:

[73] $$a + (a + d) + (a + 2d) + \ . \ . \ . + [a + (n-1)\,d] = \frac{n}{2}\left[\,2a + (n-1)\,d\,\right].$$

Если три величины составляют арифметическую прогрессию, то член, стоящий между двумя остальными, называется *средним арифметическим*.

Пусть имеется ряд a, x, b.

Так как разность этих величин одинакова, то

$$x - a = b - x.$$

Решая уравнение, получим:

[74] $$x = \frac{a+b}{2},$$

где x есть арифметическое среднее между a и b.

304. График арифметической прогрессии. Так как каждый член арифметической прогрессии образуется из предыдущего путем прибавления к нему разности d, то ряд

$$a + (a + d) + (a + 2d) + \ . \ . \ . \ [a + (n-1)\,d] \quad [73]$$

можно представить графически, если ординаты будут соответствовать величинам членов, а абсциссы — их порядковым номерам.

Арифметическая прогрессия изобразится совокупностью точек, расположенных на прямой с наклоном d. Абсциссы этих точек являются целыми числами, ордината же, соответствующая точке 1, определяется величиной первого члена.

Из графика легко найти величину любого члена прогрессии, например шестого: его ордината будет AB.

Сумму членов ряда можно рассматривать как сумму n ординат, из которых каждая равна a, и отрезков, заключенных между сторонами треугольника, лежащего выше ординат a (рис. 113).

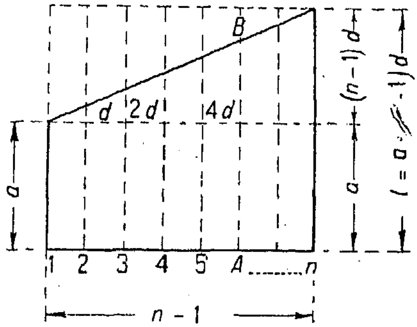


Рис. 113.

Вместо указанного треугольника можно рассматривать прямоугольник, высота которого равна половине отрезка $(n-1)\,d$, как это ясно из чертежа. Таким образом сумма отрезков ординат, заключенных между сторонами треугольника, равна полусумме отрезков n ординат длиной, равной наибольшему из этих отрезков, т. е.

$$\frac{n\,(n-1)\,d}{2}.$$

В таком случае

Сумма членов прогрессии равна сумме ординат нижнего прямоугольника + сумма отрезков ординат между сторонами треугольника:

$$na+\frac{n\,(n-1)\,d}{2}=\frac{2na+(n-1)\,nd}{2}=\frac{n}{2}\left[2a+(n-1)\,d\right],$$

что совпадает с выражением, полученным ранее аналитически.

Из графика можно определить как величину каждого члена, так и сумму любого числа членов. Для последней цели следует измерить и сложить соответствующие ординаты.

305. Некоторые арифметические ряды. Пользуясь общим выражением [73]

$$a+(a+d)+(a+2d)+\ .\ .\ .\ .+=\frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right],$$

мы можем написать ряд, прибавляя разность d к каждому члену и получая таким образом последующие члены. Действительно, прибавляя d к третьему члену, получим четвертый член, третий же был найден из второго путем прибавления к нему разности d. Пятый член в свою очередь получается из четвертого, шестой из пятого и т. д. Поступая подобным же образом, мы сможем найти n членов ряда.

Сумму членов указанного ряда определим подстановкой соответствующих величин в формулу

$$S = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]. \quad [72]$$

Способ образования рядов и подстановки показаны на нижеследующих примерах.

Пример. Написать ряд, для которого $a = 1$, $d = 1$.

Имеем:

Первый член $= \quad a = 1$
Второй „ $= a + d = 1 + 1 = 2$
Третий „ $= 2 + d = 2 + 1 = 3$
Четвертый „ $= 3 + d = 3 + 1 = 4$
Пятый „ $= 4 + d = 4 + 1 = 5$
Последний член $= 1 + (n-1)\,1 = n$.

Ряд будет иметь вид:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 \;.\;.\;. (n-1) + n.$$

Сумма n членов равна

$$\frac{n}{2}\left[2\cdot 1 + (n-1)\;1\right] = \frac{n\;(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2},$$

так что

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \;.\;.\;.\; + (n-1) + n = \frac{n^2+n}{2}.$$

306. *Пример 1.* Написать арифметический ряд, для которого

$$a = 2,\; d = 3.$$

Имеем:

Первый член $= \quad a = 2$
Второй „ $= a + d = 2 + 3 = 5$
Третий „ $= 5 + d = 5 + 3 = 8$
Четвертый „ $= 8 + d = 8 + 3 = 11$

Последний член $= 2 + (n-1)\;3 = 3n - 1$.
Сумма n членов равна

$$\frac{n}{2}\left[2\cdot 2 + (n-1)\;3\right] = \frac{n}{2}(3n+1) = \frac{3n^3+n}{2}.$$

Ряд будет иметь вид:

$$2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + \;.\;.\;.\; + (3n-1) = \frac{3n^2+n}{2}.$$

Пример 2. Написать ряд, для которого $a = p$, $d = 1$.

Имеем:

$$p + (p+1) + (p+2) + (p+3) + \ldots + (q-1) + q = \frac{(q+p)(q-p+1)}{2},$$

так как

$$q = p + (n-1)\,1$$
$$n = q - p + 1.$$

Подставляя значения n и a в выражение для суммы, имеем:

[75] $$S = \frac{q-p+1}{2}\left[2p + (q-p+1) - 1\right] = \frac{(p+q)(q-p+1)}{2}.$$

307. Дан ряд

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + \ldots$$

Пусть требуется написать выражение для n-го члена и для суммы n членов этого ряда.

Данный ряд представляет собой арифметическую прогрессию, так как каждый его член отличается от предыдущего на постоянную величину и мы можем найти любой член, например пятый. Для этого подставим в выражение для n-го члена

$$a + (n-1)\,d$$

величины $n = 5$, $a = 2$, $d = 2$; тогда получим:

$$2 + (5-1)\,2 = 10.$$

Последний член ряда будет равен

$$2 + (n-1)\,2 = 2n.$$

Сумма всех членов его будет равняться

$$S = \frac{n}{2}\left[4 + (n-1)\,2\right] = n\,(n+1).$$

Таким образом можем написать:

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 \ldots + (2n-2) + 2n = n\,(n+1).$$

308. Ряд, образованный нечетными числами, имеет вид:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n-3) + (2n-1) = n^2.$$

Пользуясь этим выражением, мы можем, при помощи арифмометра, составить таблицу квадратов.

Первый член	$= 1 = (1)^2$	$n = 1$
Второй член	$= 3$	
Сумма	$= 4 = (2)^2$	$n = 2$
Третий член	$= 5$	
Сумма	$= 9 = (3)^2$	$n = 3$
Четвертый член	$= 7$	
Сумма	$= 16 = (4)^2$	$n = 4$
Пятый член	$= 9$	
Сумма	$= 25 = (5)^2$	$n = 5$
Шестой член	$= 11$	
Сумма	$= 36 = (6)^2$	$n = 6$
Седьмой член	$= 13$	
Сумма	$= 49 = (7)^2$	$n = 7$
Восьмой член	$= 15$	
Сумма	$= 64 = (8)^2$	$n = 8$
Девятый член	$= 17$	
Сумма	$= 81 = (9)^2$	$n = 9$
Десятый член	$= 19$	
Сумма	$= 100 = (10)^2$	$n = 10.$

309. Геометрическая прогрессия. Геометрическая прогрессия представляет собой ряд чисел, каждое из которых, за исключением первого, получается из предыдущего путем умножения на постоянную величину, называемую *знаменателем* прогрессии.

Так например, ряды

$4,\ 12,\ 36,\ 108$ (знаменатель $= 3$)

$4, -2, +1, -\frac{1}{2}$ (знаменатель $= -\frac{1}{2}$)

$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3$ (знаменатель $= r$)

представляют собой геометрические прогрессии.

Для нахождения n-го члена такого ряда по известному первому члену и знаменателю, рассмотрим прогрессию

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ ar^4 \text{ и т. д.} \qquad [76]$$

и заметим, что для получения указанного n-го члена придется умножить a на r^{n-1}.

Таким образом последний член прогрессии, который мы в дальнейшим будем обозначать буквой l, есть ar^{n-1}.

[77] $$l = ar^{n-1}.$$

310. Для того, чтобы найти сумму n первых членов геометрической прогрессии, поступаем так:

Напишем ряд

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1}. \quad (1)$$

Умножим обе части равенства на r, тогда

$$rS = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^n. \quad (2)$$

Вычтем (1) из (2):

$$S\ (r-1) = ar^n - a$$

или

[78] $$S = \frac{ar^n - a}{r-1} = a\left(\frac{r^n - 1}{r-1}\right).$$

311. В большинство задач на геометрические прогрессии входят пять величин: a, r, n, l и S. Если три из них заданы, то остальные две можно определить, решая систему уравнений:

$$l = ar^{n-1} \quad [74]$$

$$S = a\left(\frac{r^n - 1}{r-1}\right). \quad [78]$$

312. Среднее геометрическое. Среднее геометрическое между двумя числами равно корню квадратному из их произведения или:

$$\sqrt{ab},$$

где a и b — данные числа.

Пусть среднее геометрическое этих чисел равно G. Из определения геометрической прогрессии имеем:

$$\frac{G}{a} = \frac{b}{G};\ G^2 = ab;$$

[79] $$G = \sqrt{ab}.$$

Пусть между числами 9 и 576 требуется вставить пять членов, так чтобы они образовали с данными геометрическую прогрессию.

Общее число членов ряда равно $5+2=7$; подставляя в формулу [77], имеем:

$$576=9r^6$$
$$r^6=64$$
$$r=\pm 2.$$

Поэтому искомые ряды имеют вид:

$$9,\ 18,\ 36,\ 72,\ 144,\ 288,\ 576$$

и

$$+9, -18, +36, -72, +144, -288, +576.$$

313. Бесконечная геометрическая прогрессия. Если знаменатель геометрической прогрессии r меньше единицы, то по мере увеличения n величина r^n уменьшается. В этом случае выражение [78] можно написать так:

[80] $$S=\frac{a-ar^n}{1-r}=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}.$$

Если взять n достаточно-большим, то величина $\frac{ar^n}{1-r}$ может быть сделана как угодно малой. Следовательно, при большом числе членов ряда, сумма их S может отличаться от $\frac{a}{1-r}$ на величину, меньшую какого угодно наперед заданного малого числа.

Указанное свойство бесконечной геометрической прогрессии обозначается таким образом:

[81] $$S_{n\to\infty}=\frac{a}{1-r}.$$

Это и есть предел суммы членов геометрической прогрессии при r меньшем единицы и бесконечно большом числе членов.

314. Некоторые геометрические ряды. Общее выражение для рядов этого вида таково:

$$a+ar+ar^2+ar^3+\ .\ .\ .\ +ar^{n-1}=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}.$$

Весьма важным является ряд:

$$a+\frac{a}{2}+\frac{a}{2^2}+\frac{a}{2^3}+\frac{a}{2^4}+\ .\ .\ .\ +\frac{a}{2^{n-1}}=2a-\frac{a}{2^{n-1}}.$$

Предел суммы членов этого ряда

$$S_\infty = 2a.$$

315. Смешанная арифметическая и геометрическая прогрессия. Ряд частично арифметический и частично геометрический имеет следующий вид:

[82] $$a,\ (a+d)\,r,\ (a+2d)\,r^2,\ (a+3d)\,r^3 \text{ и т. д.}$$

Сумма n первых членов этого ряда равна

[83] $$S = \frac{a-[a+(n-1)\,d]\,r^n}{1-r} + \frac{rd\ (1-r^{n-1})}{(1-r)^2}\ ^{1)}.$$

316. Графическое изображение геометрической прогрессии. Так как a является общим множителем, входящим в каждый член прогрессии, то первый член можно принять за единицу.

В таком случае получим ряд.

$$1+r+r^2+r^3+\ .\ .\ .\ +r^{n-1}.$$

---

1) Формула [83] может быть выведена на основании следующих соображений. Представим сумму S_n первых n членов в виде

$$S_n = a+(a+d)\,r+(a+2d)\,r^2+\ .\ .\ .\ +[a+(n-1)\ d]\ r^{n-1} =$$
$$= (a+ar+ar^2+\ .\ .\ .\ +ar^{n-1})+(dr+dr^2+\ .\ .\ .\ +dr^{n-1})+$$
$$+(dr^2+dr^3+\ .\ .\ .\ dr^{n-1})+(dr^3+\ .\ .\ .\ +dr^{n-1})+\ .\ .\ .\ +dr^{n-1}.$$

Выражения, стоящие в скобках, представляют геометрические прогрессии. Сумму S_n можно представить иначе:

$$S_n = \frac{a-ar^n}{1-r} + \frac{dr-dr^n}{1-r} + \frac{dr^2-dr^n}{1-r} + \frac{dr^3-dr^n}{1-r} + \ .\ .\ .$$
$$.\ .\ .\ + \frac{dr^{n-1}-dr^n}{1-r} = \frac{a-ar^n-(n-1)dr^n}{1-r} +$$
$$+\frac{dr}{1-r} + \frac{dr^2}{1-r} + \frac{dr^3}{1-r} + \ .\ .\ .\ + \frac{dr^{n-1}}{1-r}$$

или

$$S_n = \frac{a-[a+(n-1)\,d]\,r^n}{1-r} + \frac{dr}{1-r}(1+r+r^2+\ .\ .\ .\ +r^{n-2}) =$$
$$= \frac{a-[a+(n-1)\,d]\,r^n}{1-r} + \frac{dr\,(1-r^{n-1})}{(1-r)^2}.$$

Прим. ред.

Возьмем $OM=1$; $r>1$

$$OS_1=1$$

$$S_1P_1=r$$

и продолжим прямую MP_1.

Приняв S_1 за центр, а S_1P_1 за радиус, проведем дугу P_1S_2, засечем точку S_2 и восставим из нее перпендикуляр S_2P_2. Далее, приняв за центр — S_2, а S_2P_2 за радиус, проведем дугу P_2S_3. Аналогичным образом получим P_nS_n (рис. 114).

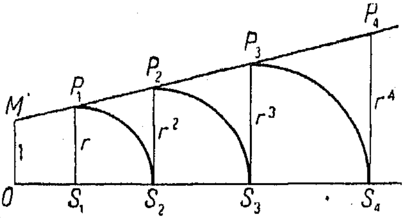


Рис. 114.

Наклон прямой MP_1 равен $(1-r)$.

$$OM=OS_1=1.$$

$P_1S_1=S_1S_2=r$, следовательно $OS_2=1+r=$ сумме двух первых членов.

Вообще $P_{n-1}S_{n-1}=S_{n-1}S_n=r^{n-1}$, т. е. $OS_n=1+r+r^2+$ $+r^3+\ .\ .\ .\ +r^{n-1}=$ сумме n членов.

317. В случае, если $r<1$, следует поступать так же, как и в предыдущем n⁰.

Наклон прямой MP_1P_2 и т. д. есть $(r-1)$ (рис. 115).

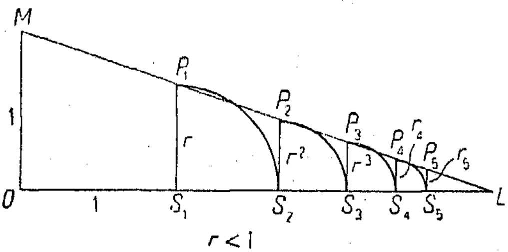


Рис. 115.

Уравнение MP_1P_2 и т. д. в обоих случаях имеет вид

$$x=\frac{1-y}{1-r}.$$

В данном случае, т. е. при сходящемся ряде и при беспредельном увеличении числа членов, сумма OS_n приближается к OL как к пределу.

Это дает возможность графически определить предел суммы членов ряда: следует просто продолжить MP_1 до пересечения с OL.

Длина OL соответствует значению x при $y=0$, следовательно предел суммы членов ряда есть

$$\frac{1}{1-r}.$$

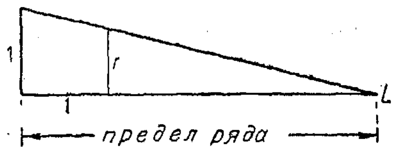


Рис. 116.

318. Выше мы рассмотрели ряд, первый член которого равен единице. Путем умножения величины OS_n или x на a можно найти сумму членов ряда, у которого первый член равен a (рис. 116).

Предел этой суммы равен

$$\frac{a}{1-r},$$

и для ряда

$$a+ar+ar^2+ar^3+\ \ldots\ +ar^{n-1}$$

умножаем величину x или OL на a.

319. Гармоническая прогрессия. Величины a, b, c и т. д. образуют гармоническую прогрессию, если обратные им числа

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \text{ и т. д.}$$

составляют арифметическую прогрессию.

Так например, ряд

$$3, \tfrac{3}{2}, 1, \tfrac{3}{4}, \tfrac{3}{5}, \tfrac{1}{2} \ldots$$

представляет собой гармоническую прогрессию, так как дроби, обратные его членам,

$$\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, 1, \tfrac{4}{3}, \tfrac{5}{3}, 2$$

образуют арифметическую.

Гармонические ряды обычно приводятся к арифметическим посредством нахождения величин обратных членам первых.

Для непосредственного получения суммы членов гармонических рядов общего метода не существует.

320. Гармоническое среднее. Гармоническое среднее между двумя числами равно удвоенному произведению этих чисел, деленному на их сумму:

[84] $$H=\frac{2ab}{a+b}.$$

Пусть a и b — два заданных числа, H — их гармоническое среднее.

По определению, имеем:

$$\frac{1}{a},\ \frac{1}{H},\ \frac{1}{b},$$

откуда

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{H}=\frac{1}{H}-\frac{1}{a}$$

$$aH-ab=ab-bH$$

$$aH+bH=2ab$$

или

$$H=\frac{2ab}{a+b}.$$

321. Геометрическое среднее между двумя числами есть в то же время геометрическое среднее между их арифметическим и гармоническим средними.

$$A=\frac{a+b}{2} \tag{1}$$

$$G=\sqrt{ab} \tag{2}$$

$$H=\frac{2ab}{a+b}. \tag{3}$$

Умножая (1) на (3), получим:

$$AH=ab.$$

Извлекая квадратный корень, имеем:

$$\sqrt{AH}=\sqrt{ab}.$$

Но $G=\sqrt{ab}$ [из (2)], следовательно

$$G=\sqrt{AH},$$

т. е. равно геометрическому среднему между арифметическим и гармоническим средними чисел a и b.

Если a и b — первый и второй члены гармонического ряда, то n-ый член этого ряда имеет вид

[85] $$l=\frac{ab}{(n-1)a-(n-2)b}\text{ [1]}.$$

Всякий ряд, члены которого образованы по этому закону, есть гармонический.

322. Соотношение между гармонической и арифметической прогрессиями. Это соотношение может быть пояснено графически следующим образом:

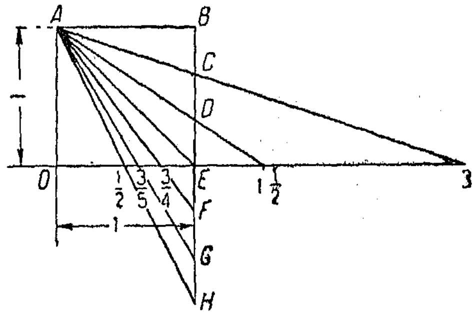


Рис. 117.

Начертим квадрат $ABEO$, сторона которого равна единице.

Отложим на OE от точки O отрезки, соответствующие по величине членам гармонической прогрессии, равные в данном случае

$$3,\ 1\tfrac{1}{2},\ 1,\ \tfrac{3}{4},\ \tfrac{3}{5},\ \tfrac{1}{2}\ \text{и т. д.}$$

---

[1] Согласно определению гармонической прогрессии имеем:

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=\ldots=\frac{1}{k}-\frac{1}{l}.$$

Здесь величина

$$\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c},\ \ldots\ \frac{1}{l}$$

образует арифметическую прогрессию. Согласно свойствам членов арифметической прогрессии имеем:

$$\frac{1}{l}=\frac{1}{a}+(n-1)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$$

или

$$\frac{1}{l}=\frac{n-1}{b}-\frac{n-2}{a}=\frac{(n-1)a-(n-2)b}{ab}.$$

Последнее равенство показывает, что

$$l=\frac{ab}{(n-1)a-(n-2)b}.$$

Прим. ред.

Проведем из вершины A прямые через точки

$$3,\ \frac{3}{2},\ 1,\ \frac{3}{4}\ \text{и т. д.}$$

так, чтобы они пересекли вертикальную линию BH.

Расстояния BC, BD, BE, BF[1]) и т. д. изображают члены соответствующей арифметической прогрессии. Это значит, что отрезки BC, CD, DE и т. д. равны между собой.

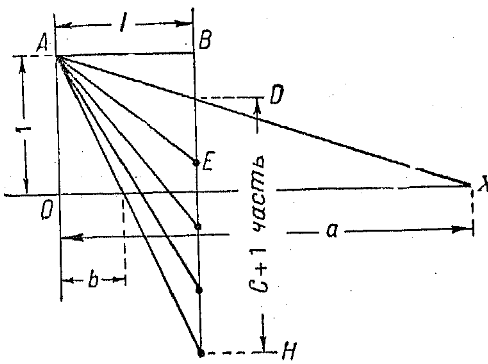


Рис. 118.

Если же точки B, C, D, E и т. д. расположены не на одинаковых расстояниях, то ряд — не гармонический.

323. Для графического построения гармонического ряда по двум данным его членам, например a и b, и при условии, что имеется c промежуточных членов, поступают так:

Расстояние между точками, соответствующими величинам, обратным a и b (на вертикальной шкале DH), делят на $c+1$

---

[1]) Не трудно видеть, что $\triangle ABC$ (черт. 117) подобен $\triangle$ку, имеющему вершины в точках A, O и 3. Оба треугольника — прямоугольные и имеют равные острые углы.

Из подобия треугольников вытекает пропорция

$$BC : 1 = 1 : 3$$

$$BC = \frac{1}{3}.$$

Таким же образом из подобия $\triangle ABD$ и треугольников с вершинами в точках O, A и $1^1/_2$ следует, что

$$BD = 1 : 1\frac{1}{2} = \frac{2}{3}.$$

Из подобия или в данном случае равенства $\triangle ABC$ и $\triangle AOE$ следует, что

$$BE = 1 : 1 = 1$$

и т. д.

Отрезки BC, BD, BE и т. д., будучи по величине обратными членам гармонической прогрессии, образуют прогрессию арифметическую. Длины отрезков BC, CD, DE и т. д. между собою равны.

Прим. ред.

равных частей. Через полученные точки деления проводят из A пучок прямых линий и отмечают пересечения их с линией OX.

Гармоническое среднее между двумя числами может быть найдено аналогичным способом, если через середину отрезка DH (рис. 118) провести прямую и отметить точку пересечения ее с OX.

Глава XIV.

ПЕРЕМЕННЫЕ, ПРЕДЕЛЫ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ.

324. Предел переменной. Пусть переменная принимает ряд значений, которые приближаются к некоторому постоянному числу, так что разность между нею и указанным постоянным, начиная с некоторого значения, может быть сделана и остается меньше любого как угодно малого наперед заданного числа.

В таком случае постоянное число называется *пределом переменной*. Говорят, что последняя стремится к этому постоянному как к пределу.

Переменная 0,3, 0,33, 0,333 . . ., увеличение которой при переходе от предыдущего значения к последующему составляет $^1/_{10}$ предыдущего приращения, приближается к $\frac{1}{3}$ как к пределу.

0,3 отличается от $\frac{1}{3}$ меньше чем на $\frac{1}{10}$.

0,33 отличается от $\frac{1}{3}$ меньше чем на $\frac{1}{100}$.

0,333 отличается от $\frac{1}{3}$ меньше чем на $\frac{1}{1000}$.

Взяв достаточное число десятичных знаков, можно сделать разность между переменной и $\frac{1}{3}$ меньше какого угодно малого числа. Это значит, что разность приближается к пределу нуль, т. е. является величиной бесконечно малой.

325. Переменная величина может принимать ряд значений, как например 6,6, 6,66, 6,666 и т. д., приближающихся к некоторому числу, которое не является ее пределом. В данном случае можно сказать, что значение переменной приближается к 7. Последнее число однако не является пределом этой переменной, так как невозможно сделать разность между ней и 7 меньше любого малого числа. Указанная разность всегда остается большей чем $\frac{1}{3}$, независимо от взятого числа десятичных знаков. Предел рассматриваемого переменного равен $6^2/_3$.

326. Переменная может приближаться к пределу и всегда оставаться больше него или всегда оставаться меньше него, или же быть то меньше, то больше предела. Во всех этих случаях важно только то, что разность между переменной и ее пределом становится и остается по абсолютной величине меньше любого, как угодно малого, заранее заданного числа.

327. Переменная величина может изменяться так, что, начиная с некоторого значения, она остается по абсолютной величине все время больше или все время меньше наперед заданного числа. Если она остается больше любой заданной величины, то говорят, что она обращается в бесконечность или возрастает неограниченно. То обстоятельство, что переменная x возрастает неограниченно и обращается в бесконечность, обозначается знаком

$$x \to \infty.$$

Если переменная остается по абсолютной величине меньше любого наперед заданного числа, то говорят, что она приближается к пределу нуль, и называют ее *бесконечно малой*.

Это изображается знаком $x \to 0$.

328. $$\frac{a}{x} \to \infty \qquad [x \to 0].$$

Если постоянное конечное число разделить на бесконечно малую, то частное обращается в бесконечность. Действительно, если числитель дроби $\frac{a}{x}$ — постоянная, а знаменатель уменьшается так, что делается по абсолютной величине меньше любого заранее заданного числа, то частное возрастает и может достичь сколь угодно больших значений.

329. $$\frac{a}{x} \to 0 \qquad [x \to \infty].$$

Если разделить постоянную конечную величину на переменную, которая безгранично возрастает, то частное будет числом бесконечно малым. В самом деле, если числитель дроби $\frac{a}{x}$ есть величина постоянная, а знаменатель стремится к бесконечности, то частное уменьшается и приближается в пределе к нулю.

330. Переменная не может приближаться к двум неравным пределам одновременно.

331. Если две переменные всегда равны между собой и каждая из них приближается к пределу, то их пределы также равны между собой.

332. Предел алгебраической суммы постоянной и переменной величин равен алгебраической сумме постоянной и предела указанной переменной.

333. Предел произведения переменной и постоянной величин равен произведению постоянной на предел переменной.

334. Предел переменной суммы конечного числа переменных равен сумме их пределов.

335. Предел произведения двух или нескольких переменных равен произведению их пределов.

336. Предел частного двух переменных равен частному их пределов (если предел делителя не равен нулю).

337. Выражение

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

читается:

„предел функции x, если x приближается к пределу, равному a".

Если в функции

$$4x - 3y$$

предел $x = 5$, а предел $y = 2$, то предел функции от x и y равен:

$$4 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = 14.$$

Найдем

$$\lim \left[\frac{x^2 - 1}{x - 1}\right]_{x \to 1}.$$

Если подставить значение предела непосредственно в выражение для функции, то получим:

$$\frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0},$$

которое представляется неопределенным.

Разложив предварительно числитель на множители, получим:

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = x + 1;$$

так как $x \to 1$, то

$$\lim\left[\frac{x^2-1}{x-1}\right]_{x\to 1} = 1+1=2.$$

Данное выражение стремится к 2 как к пределу, если x приближается к 1.

Найдем предел выражения

$$\left[\frac{4x^3-2x+1}{2x^3-3x^2+4}\right]_{x\to\infty}.$$

Прямая подстановка дает $\frac{\infty}{\infty}$; однако, разделив числитель и знаменатель на x^3, получаем:

$$\lim\left[\frac{4-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{2-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^3}}\right]_{x\to\infty}.$$

Так как $x\to\infty$, то $\frac{2}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{3}{x}$, $\frac{4}{x^3}$ приближаются к нулю, следовательно предел заданного выражения равен 2.

Найдем предел выражения:

$$\left[\frac{x^2}{2x-4}-\frac{3x-4}{x-2}\right]_{x\to 2}.$$

Прямая подстановка дает $\infty-\infty$.

Упростим заданное выражение:

$$\frac{x^2-6x+8}{2(x-2)}=\frac{x-4}{2}$$

$$\lim\left[\frac{x-4}{2}\right]_{x\to 2}=-\frac{2}{2}=-1.$$

338. Другие методы.

$$\left[\frac{4x^3-2x^2+3x+1}{3x^3-x^2+x+2}\right]_{x\to 0}.$$

Если x приближается к нулю, то первые три члена числителя и первые три члена знаменателя также приближаются к нулю; следовательно, согласно n° 326, числитель $\to 1$, а знаменатель $\to 2$; таким образом дробь, согласно n°328, стремится к пределу, равному $\frac{1}{2}$.

339. Если числитель дроби $\frac{a}{x}$ есть величина постоянная, в то время как знаменатель, возрастая, становится по величине больше любого заданного числа, то частное уменьшается и в пределе становится меньшим любого заданного числа.

340. Неопределенные выражения. Если в результате действий над переменными и их пределами получаются выражения вида

$$\infty - \infty,\ 0 \times \infty,\ \infty \times 0,\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{0},\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty,$$

то эти выражения являются неопределенными.

При непосредственных подстановках пределов в данные выражения, часто получаются неопределенности указанного вида.

Если данное выражение — дробное, то прежде всего следует его сократить.

Знак $\to$ означает: „приближается к пределу".

Если, придавая переменной x значения, достаточно близкие к ее пределу, можно приблизить и значения какой-нибудь функции от x как угодно близко к конечной постоянной l, то l называется *пределом* функции при $x \to a$.

Если $x \to \infty$, т. е. становится бесконечно большим, то три последние члена знаменателя в примере n°337 делаются бесконечно малыми по сравнению с первыми членами, а потому ими можно пренебречь. Следовательно, если $x \to \infty$, то дробь приближается к предельному значению, равному

$$\frac{4x^3}{3x^3} = \frac{4}{3}.$$

Пример. Найти предельное значение

$$\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right]_{h \to 0},$$

если $f(x) = x^3$.

Имеем:

$$\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{2} = 3x^2 + 3xh^2 + h^3,$$

откуда

$$\lim \left[\frac{(x+h)^3 - x^3}{h}\right]_{h \to 0} = 3x^2.$$

Глава XV.

ЛОГАРИФМЫ.

341. Джон Непер (1550—1617), сравнивая арифметическую и геометрическую прогрессии, нашел, что между членами этих двух рядов существует определенная связь. Это привело к открытию соотношений, оказавшихся чрезвычайно полезными в смысле облегчения вычислений.

Рассмотрим приведенную ниже в таблице арифметическую прогрессию, первый член которой равен нулю, и геометрическую — с первым членом, равным единице.

Геометрическая прогрессия	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
Арифметическая прогрессия	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Произведение любых двух членов геометрической прогрессии может быть найдено путем сложения членов арифметической, стоящих под ними. Указанное произведение находится над членом арифметической прогрессии, равным этой сумме.

Так, например, произведение 8 на 32 найдется следующим образом:

Сложив члены арифметической прогрессии, стоящие под членами 8 и 32 геометрической, имеем:

$$3+5=8.$$

Разыщем в нижней строке число 8 и найдем непосредственно над ним искомое произведение, равное 256.

Заметим, что знаменатель данной геометрической прогрессии равен 2, так что ее можно представить в таком виде:

$$2^0,\ 2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5,\ 2^6,\ 2^7,\ 2^8,\ 2^9,\ 2^{10}.$$

Показатели этих степеней составляют арифметическую прогрессию, члены которой даны в нижней строке таблицы.

Число 2 является основанием системы, а показатели членов геометрической прогрессии (составляющие, как было указано, арифметическую) называются *логарифмами* чисел, которые стоят в верхней строке таблицы над ними.

Так, например, логарифм числа 16 при основании 2 равен 4, что обозначается так:

$$\lg_2 16=4.$$

Рассмотренные нами ряды, однако, неудобны для вычислительных целей, так как произведения отсутствующих там чисел, не являющихся членами геометрической прогрессии, например 68 или 250, не могут быть найдены в таблице.

Можно написать какое угодно число рядов, но все они будут страдать тем недостатком, что между их членами остаются незаполненные промежутки.

Непер установил для своей системы особое основание. Он разыскал для промежутка между единицей и двумя ряд из ста чисел, находящихся в равных отношениях. Таким образом между 1 и 2 он вставил сто средних геометрических. Отсюда и произошло название „логарифм", которое по-гречески означает „число отношения".

312. Приведенные в начале предыдущего n⁰ ряды могут быть продолжены безгранично как в правую, так и в левую сторону. В последнем случае мы будем иметь:

Геометрическая прогрессия	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2...
Арифметическая прогрессия	—5	—4	—3	—2	—1	0	1...

В этом случае соответствующая геометрическая прогрессия будет иметь вид:

$$\frac{1}{2^5},\ \frac{1}{2^4},\ \frac{1}{2^3},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^0}\ldots$$

или

$$2^{-5},\ 2^{-4},\ 2^{-3},\ 2^{-2},\ 2^{-1},\ 2^0\ldots$$

Чтобы составить таблицу логарифмов для большего ряда целых чисел, а также для дробных, находящихся в промежутках между ними (например между 1 и 2), пришлось бы отыскивать средние геометрические между этими числами.

Вставим по одному геометрическому среднему между членами последнего ряда. Так как для двух чисел a и b оно равно $\sqrt{ab}$, то имеем:

Геометрическая прогрессия	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}\ldots$
Арифметическая прогрессия	—2	$-\frac{3}{2}$	—1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}\ldots$

Путем дальнейших вставок мы можем составить таблицу логарифмов.

Итак, находя n средних геометрических между какими-нибудь членами геометрической прогрессии, например между 1 и 2, а также n средних арифметических между соответствующими членами арифметической, можем составить ряды:

Геометрическая прогрессия	2^0	$2^{\frac{1}{n}}$	$2^{\frac{2}{n}}$	$2^{\frac{3}{n}}$	$2^{\frac{4}{n}} \ldots$	$2^{\frac{n}{n}}$	$2^{\frac{n+1}{n}}$
Арифметическая прогрессия	0	$\frac{1}{n}$	$\frac{2}{n}$	$\frac{3}{n}$	$\frac{4}{n} \ldots$	$\frac{n}{n}$	$\frac{n+1}{n}$

Продолжив их далее, найдем:

Геометрическая прогрессия	$2^{\frac{n+1}{n}}$,	$2^{\frac{n+2}{n}}$,	$2^{\frac{n+3}{n}}$,	$\ldots,$	$2^{\frac{n+n-1}{n}}$,	$2^{\frac{2n}{n}}$
Арифметическая прогрессия	$\frac{n+1}{n}$,	$\frac{n+2}{n}$,	$\frac{n+3}{n}$,	$\ldots,$	$\frac{n+n-1}{n}$,	$\frac{2n}{n}$

343. Логарифм числа по данному основанию есть показатель степени, в которую надо возвысить основание, чтобы получить это число.

Таким образом в выражении

$$a^x = N$$

x есть логарифм числа N по основанию a. В дальнейшем будем обозначать это символом

$$x = \lg_a N.$$

Основание a может быть любым положительным числом, кроме 1 или 0.

Наибольшим распространением пользуются две системы логарифмов: неперова или натуральная с основанием 2,71828... и обыкновенная или бриггова с основанием 10.

Неперова система употребляется в высшей математике, так как она обладает тем удобством, что наклон касательной к кривой показательной функции в любой ее точке равен ординате в этой точке.

Как будет ясно из дальнейшего (см. главу XLI), основным действием в дифференциальном исчислении является нахождение наклона касательной к кривой в любой ее точке, Если этот наклон равен y, т. е. самой функции, то процесс дифференцирования оказывается весьма простым.

Обычные вычисления гораздо удобнее производить при помощи бригговых логарифмов с основанием 10.

Независимо от принятого основания, между числами и их логарифмами существуют следующие соотношения:

$$\lg(ab) = \lg a + \lg b; \quad \lg\left(\frac{a}{b}\right) = \lg a - \lg b.$$

$$\lg\left(\frac{1}{n}\right) = -\lg n; \quad \lg a^n = n \lg a.$$

$$\lg(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n}\lg a; \quad \lg \text{основания} = 1, \ \lg 1 = 0.$$

Чтобы выяснить связь между обеими упомянутыми системами логарифмов, составим следующую таблицу для небольшого ряда чисел:

Неперова система		Бриггова система	
арифм. прогрессия	геометрическая прогрессия	арифм. прогрессия	геометрическая прогрессия
−3	$\frac{1}{e^3} = e^{-3} = 0{,}04979$	−3	$\frac{1}{10^3} = 0{,}001$
−2	$\frac{1}{e^2} = e^{-2} = 0{,}13534$	−2	$\frac{1}{10^2} = 0{,}01$
−1	$\frac{1}{e^1} = e^{-1} = 0{,}3678$	−1	$\frac{1}{10} = 0{,}1$
0	$e^0 = 1{,}0$	0	$10^0 = 1$
1	$e^1 = 2{,}71828$	1	$10^1 = 10$
2	$e^2 = 7{,}389$	2	$10^2 = 100$
3	$e^3 = 20{,}085$	3	$10^3 = 1000$
4	$e^4 = 54{,}589$	4	$10^4 = 10000$

344. Рассматривая приведенную таблицу обыкновенных логарифмов с основанием 10, отметим, что целая часть логарифма на единицу меньше числа цифр, стоящих слева от запятой. В случае десятичной дроби, которая выражается единицей с предшествующими нулями, целая часть логарифма содержит столько отрицательных единиц, сколько имеется нулей, считая в том числе и нуль целых.

В этой системе мантисса или дробная часть логарифма не изменяется при перенесении запятой. Так

$$10^{2{,}1038}\text{[1]} = 127 \quad \text{или} \quad \lg\ 127 = 2{,}1038$$
$$10^{1{,}1038} = 12{,}7 \quad \text{или} \quad \lg\ 12{,}7 = 1{,}1038$$
$$10^{0{,}1038} = 1{,}27 \quad \text{или} \quad \lg\ 1{,}27 = 0{,}1038.$$

Мантисса всегда остается положительной, а знак минус относится только к целой части логарифма или к его характеристике. Так как таблица логарифмов составлена для чисел между 1 и 10, то эти логарифмы являются десятичными дробями, иначе говоря — состоят только из мантиссы. В таком виде они и даются в таблицах, служащих для вычислений.

Всякое число, например 2834, можно рассматривать как произведение двух множителей: 2,834 и 10^3.

Согласно основному правилу

$$\lg\ 2{,}834 = 0{,}4524,\ \lg\ 10^3 = 3{,}0000,$$

следовательно

$$\lg\ 2834 = 0{,}4524 + 3{,}0000 = 3{,}4524.$$

Итак для нахождения логарифма числа разлагаем его на два множителя. Первый из них является числом, у которого запятая стоит непосредственно после первой слева значащей цифры; например для числа 2834 первый множитель будет 2,834.

Второй множитель представляет собой в данном случае 10^3, так как запятая должна быть передвинута на три знака вправо, чтобы не изменить величину первоначально взятого числа 2834.

Логарифм первого множителя мы находим непосредственно из таблиц, так как в них указаны логарифмы чисел от 1 до 10.

Логарифм второго множителя равен показателю степени при 10, т. е. в данном случае числу 3, являющемуся характеристикой логарифма произведения.

Таким образом, все действия, необходимые для нахождения логарифма, сводятся к перенесению запятой за первую слева значащую цифру и нахождению соответствующей мантиссы; число знаков, на которое перенесена запятая, определяет характеристику.

---

[1]) Найдено из таблиц.

Пусть, например, требуется найти lg 0,0002834. Поступая согласно сказанному, имеем:

$$\lg 0{,}0002834 = \lg (2{,}834 \cdot 10^{-4}) = \lg 2{,}834 + \lg 10^{-4}.$$

Но

$$\lg 2{,}834 = 0{,}4524$$

$$\lg 10^{-4} = -4 \text{ или } \bar{4}{,}0000,$$

следовательно

$$\lg 0{,}0002834 = \bar{4}{,}4524 \text{ или } 0{,}4524 - 4.$$

Описанный метод отыскания логарифмов значительно облегчает их применение, и если следовать ему, то это действие не представит никакой трудности.

345. Интерполирование. Часто случается, что обычные четырехзначные таблицы не дают непосредственно значение логарифма с принятой точностью, и поэтому приходится совершать дополнительное действие.

Логарифм числа 283,4 не содержится непосредственно в таблице. Четвертая слева цифра — 4 составляет $\frac{4}{10}$ от разности чисел 283,0 и 284,0. В таблице разности между соседними логарифмами табулированы, и, обращаясь к таблице, находим:

$$\lg 283{,}0 = 2{,}4518,$$

а разность (по отношению к lg 284,0) оказывается равной 15.

Поэтому для получения lg 283,4 прибавляем к lg 283 $\frac{4}{10}$ от 15.

Итак

$$\begin{array}{r} \lg 283{,}0 = 2{,}4518 \\ 6 \\ \hline \lg 283{,}4 = 2{,}4524 \end{array}.$$

Следует всегда помнить, что с увеличением числа возрастает и логарифм, а потому, если искомое число больше данного в таблице, то разность должна быть прибавлена к последнему.

346. Нахождение числа по данному логарифму его. Это действие является обратным по отношению к предыдущему. Оно состоит в следующем:

Находим в таблицах мантиссу, ближайшую меньшую к данной.

Положим, например, что дана мантисса 0,4371. Ближайшая меньшая есть 0,4362, причем разность со следующей большей указана в таблицах и равна 16, разность же между 0,4362 и 0,4371 равна 9 (десятитысячным).

Логарифму 0,4362 соответствует число 2,73. Логарифм искомого числа (т. е. 0,4371) больше найденного на $\frac{9}{16}$ последнего десятичного знака. Обращая $\frac{9}{16}$ в десятичную дробь, найдем, что она равна 0,56, или, округляя, 0,6. Поэтому искомое число будет равно 2,736.

Так как характеристика данного логарифма равна нулю, то в найденном числе отделяем запятой одну цифру слева, потому что, как было установлено в предыдущем, характеристика всегда на единицу меньше числа цифр слева от запятой в искомом числе, и стало-быть в нем следует брать на одну цифру больше слева от запятой, чем число единиц в характеристике.

Необходимо помнить, что имеющиеся в таблицах мантиссы являются логарифмами чисел между 1 и 10, следовательно в числах, им соответствующих, нужно отделять запятой один знак слева.

347. Как избежать получения отрицательной мантиссы? Было бы крайне неудобным получить в конце вычислений результат вроде

$$N = 10^{-0,39685},$$

так как в таблицах даны только положительные мантиссы.

По определению степени с отрицательным показателем, можно написать в данном случае:

$$N = \frac{1}{10^{0,39685}}.$$

Однако для вычисления N пришлось бы после нахождения степени произвести дополнительное деление.

Во избежание указанных трудностей, необходимо все время тщательно следить, чтобы мантисса в процессе вычислений всегда оставалась положительной. Для этого следует увеличить меньший логарифм на некоторое целое число и таким образом сделать его бо́льшим. В то же время, чтобы сохранить истинную величину логарифма неизменной, следует вычесть указанное число.

Возьмем например выражение

$$x = \frac{1{,}58}{4326}.$$

$$\lg x = \lg 1{,}58 - \lg 4326$$
$$\lg 1{,}58 = 0{,}19866$$
$$\lg 4326 = 3{,}63609.$$

Увеличим первый логарифм на 4 и вычтем это число:

$$\begin{array}{r} \lg 1{,}58 = 4{,}19866 - 4 \\ \underline{\lg 4326 = 3{,}63609} \\ \lg x = 0{,}56257 - 4. \end{array}$$

Заметим, что мантисса x — положительная, а характеристика равна (-4).

Число, логарифм которого равен 0,56257, есть 3,652. Передвигая запятую на 4 знака влево, найдем:

$$x = 0{,}0003652.$$

348. Если $\lg N = 3{,}4524$, то мантисса соответствует какому-то числу между 1 и 10, а характеристика — степени 10 (в данном случае третьей). Таким образом, найдя число, соответствующее мантиссе 0,4524, и перенеся запятую на 3 знака вправо, получим искомое число.

Если $\lg N = 0{,}4524 - 4$, то характеристика равна (-4) и соответствует 10^{-4}, следовательно необходимо перенести запятую на 4 знака влево. В результате получим:

$$N = 0{,}0002834.$$

349. Умножение посредством логарифмов. Для умножения находим по таблицам логарифмы сомножителей и складываем их. Полученная сумма соответствует логарифму произведения. Для нахождения последнего разыскиваем в таблицах число, логарифм которого равен полученной сумме.

Пример. $x = 4{,}056 \cdot 92{,}1 \cdot 0{,}0001832.$

Имеем:

$$\begin{array}{r} \lg 4{,}056 = 0{,}6081 \\ \lg 92{,}1 = 1{,}9643 \\ \underline{\lg 0{,}0001832 = 0{,}2629 - 4} \\ \lg x = 2{,}8353 - 4 = 0{,}8353 - 2. \end{array}$$

$$x = 6{,}84 \cdot 10^{-2} = 0{,}0684.$$

350. Деление посредством логарифмов. Вычитаем логарифм делителя из логарифма делимого, получим логарифм частного. По найденному логарифму найдем из таблиц и самое частное. Рассмотрим в качестве примера нахождение частного в следующем случае:

$$N=\frac{2314}{141}=\frac{2314}{1}\cdot\frac{141^{-1}}{1}.$$

$$\lg N=\lg 2314-\lg 141$$

$$\lg N=3{,}3643-2{,}1492=1{,}2151.$$

Из таблиц находим $N=16{,}41$.

Пример.

$$N=\frac{3{,}128}{0{,}000168}$$

$$\begin{array}{r}\lg 3{,}128 \quad = 0{,}4953\\ \underline{\lg 0{,}000168 = 0{,}2253-4}\\ \lg N = 0{,}2700+4\\ N=18620.\end{array}$$

Если из меньшей мантиссы приходится вычитать бо́льшую, то во избежание получения отрицательной мантиссы прибавляем к меньшей единицу и вычитаем эту единицу из характеристики.

Пусть, например,

$$N=\frac{0{,}0333}{49{,}1}.$$

$$\lg 0{,}0333=0{,}5224-2=1{,}5224-3$$

$$\lg 49{,}1 \quad =0{,}6911+1.$$

Теперь можно произвести вычитание:

$$\begin{array}{r}\lg 0{,}0333=1{,}5224-3\\ \underline{\lg 49{,}1 \quad =0{,}6911+1}\\ \lg N=0{,}8213-4\end{array}.$$

$$N=6{,}62\cdot 10^{-4}=0{,}000662.$$

Число N, соответствующее данному логарифму, называется *антилогарифмом* последнего.

351. Кологарифм. Остаток, полученный после вычитания логарифма из 1,0000—1, называется дополнением логарифма или *кологарифмом* числа.

Пользуясь кологарифмами, можно заменить комбинированное умножение и деление одним умножением.

$$\operatorname{colg} N = -\lg N = \lg \frac{1}{N}.$$

$$\begin{array}{r} 1{,}0000-1 \\ \underline{\lg 0{,}0734 = 0{,}8657-2} \\ 0{,}1343+1 = \operatorname{colg} 0{,}0734. \end{array}$$

Пусть имеется

$$N = \frac{0{,}0216 \cdot 0{,}831}{61{,}3 \cdot 4{,}12}.$$

$$\begin{array}{ll} \lg 0{,}0216 & = 0{,}3345-2 \\ \lg 0{,}831 & = 0{,}9196-1 \\ \operatorname{colg} 61{,}3 & = 0{,}2125-2 \quad (\lg 61{,}3 = 0{,}7875+1) \\ \operatorname{colg} 4{,}12 & = 0{,}3851-1 \quad (\lg 4{,}12 = 0{,}6149) \end{array}$$

$$\lg N = 1{,}8517-6 = 0{,}8517-5.$$

$$N = 7{,}167 \cdot 10^{-5} = 0{,}00007167.$$

352. Нахождение степеней посредством логарифмов. Если число a возвышено в n-ую степень, т. е.

$$a^n = a \cdot a \cdot a \ldots (n \text{ раз}),$$

то

$$\lg (a^n) = \lg a + \lg a + \ldots (n \text{ раз})$$

или

$$\lg (a^n) = n \cdot \lg a.$$

Поэтому для вычисления степени отыскиваем в таблицах логарифм ее основания и умножаем его на показатель n, а затем по найденному произведению находим соответствующий антилогарифм. Это и будет искомая степень.

Пример.

$$N = (0{,}033)^3.$$

$$\lg 0{,}033 = 0{,}5185-2$$

$$\lg N = (0{,}5185-2)\,3 = 1{,}5555-6 = 0{,}5555-5.$$

$$N = 3{,}59 \cdot 10^{-5} = 0{,}0000359.$$

353. Нахождение дробных степеней посредством логарифмов.

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^m.$$

$$\lg \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = n \lg a^{\frac{m}{n}}; \quad \lg a^m = m \lg a.$$

Следовательно

$$n \lg\left(a^{\frac{m}{n}}\right) = m \lg a$$

или

$$\lg a^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} \lg a.$$

Пример.

$$\sqrt[3]{(125)^2} = 125^{\frac{2}{3}}.$$

$$\lg\left(125^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3} \lg 125 = \frac{2}{3}(2{,}0969) = 1{,}3979.$$

Из таблиц находим:

$$N = 25.$$

354. Извлечение корня. Если требуется извлечь корень n-ой степени, то рассматриваем его как $\frac{1}{n}$ степень подкоренного количества. Покажем на примере, как выполняются в этом случае действия.

$$\sqrt[5]{1728} = (1728)^{\frac{1}{3}}.$$

$$\lg\left(1728^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3}(3{,}2375) = 1{,}0792.$$

$$N = 12.$$

355. Нахождение обратных величин при помощи логарифмов. Вычитаем мантиссу логарифма из единицы, прибавляем единицу к характеристике и меняем знак характеристики на обратный.

Пример. Найти величину, обратную 426 $\left(\text{т. е. } \frac{1}{426}\right)$.

$$\lg 426 = 2{,}629410.$$

Вычитаем мантиссу из единицы:

$$\begin{array}{r} 1{,}000000 \\ 0{,}629410 \\ \hline 0{,}370590 \end{array}.$$

Прибавляем единицу к характеристике и меняем знак последней на обратный; тогда

$$\bar{3}{,}370590$$

есть логарифм искомого числа, т. е.

$$N = 0{,}002347.$$

356. Нахождение четвертого члена пропорции посредством логарифмов. Складываем логарифмы второго и третьего членов пропорции и вычитаем из этой суммы логарифм первого члена. Разность равна логарифму четвертого члена. По логарифму можно найти и самое число.

357. Натуральные или неперовы логарифмы. Эти логарифмы находятся по таблицам точно так же, как и обыкновенные. Главная разница при пользовании ими по сравнению с десятичными заключается в том, что при перенесении запятой вправо на каждый десятичный знак приходится прибавлять число 2,3026, а при перенесении запятой влево приходится вычитать это число из логарифма.

Из таблицы, приведенной в n⁰ 343, видно, что $\lg 10$ в этой системе равен 2,3026; отсюда и вытекает указанное правило.

Таблицы обычно содержат натуральные логарифмы чисел от 1 до 10.

Таким образом неперов логарифм 245 или $2{,}45 \cdot 10^2$ равен

$$0{,}8961 + 2\,(2{,}3026) = 0{,}8961 + 4{,}6052 = 5{,}5013.$$

Для этой системы остаются в силе все те основные принципы, которые применялись нами для обыкновенных логарифмов; поэтому натуральными логарифмами можно пользоваться при умножении, делении, возвышении в степень и извлечении корня.

Однако из сказанного выше ясно, что в натуральной системе мантисса не является независимой от положения запятой, так что числа, имеющие одинаковые значащие цифры, не будут здесь иметь одинаковые мантиссы, как это происходит в случае применения бригговых логарифмов.

358. Изменение основания логарифмов. Пусть y — логарифм числа N по основанию a, x — логарифм того же числа по основанию c; тогда

$$\lg_a N = y \qquad \text{и } N = a^y$$
$$\lg_c N = x \qquad \text{и } N = c^x.$$

Следовательно

$$a^y = c^x.$$

Возьмем логарифмы обеих частей равенства по основанию a:

$$y = x \cdot \lg_a c \text{ или } \lg_a N = \lg_c N \cdot \lg_a c.$$

Взяв логарифм обеих частей равенства по основанию c, имеем:

$$x = y \cdot \lg_c a \text{ или } \lg_c N = \lg_a N \lg_c a.$$

Таким образом

$$\lg_a N = \lg_a c \cdot \lg_c N = \frac{\lg_c N}{\lg_c a}.$$

Заметим, что при перемене основания следует умножить логарифм числа, взятый по первоначальному основанию, на логарифм этого основания в новой системе.

Перемена основания сводится к умножению логарифма на постоянное число.

Так, для обыкновенных логарифмов имеем:

обыкновенный логарифм равен неперову логарифму, умноженному на $\lg_{10} e = \frac{\text{неперов логарифм}}{\lg_e 10}$,

а для натуральных — имеем:

неперов логарифм равен обыкновенному логарифму, умноженному на $\lg_e 10 = \frac{\text{обыкн. логарифм}}{\lg_{10} e}$.

Так как $\lg_{10} e = 0{,}4343$, а $\lg_e 10 = 2{,}3026$, то

обыкновенный логарифм равен неперову $\cdot\, 0{,}4343 = \frac{\text{неперов логарифм}}{2{,}3026}$.

Неперов логарифм равен обыкновенному логарифму $\times\, 2{,}3026 = \frac{\text{обыкнов. логарифм}}{0{,}4343}$.

Глава XVI.

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ОТНОШЕНИЕ К ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ.

359. Сравнение кривых $y = r^x$ и $y = e^x$. Возьмем функцию $y = r^x$ и преобразуем ее в $y = e^{mx}$. Такое преобразование вполне возможно, ибо перемена основания логарифма может быть выполнена посредством умножения этого логарифма на постоянную.

Так как логарифм есть показатель степени, то указанное преобразование сводится к умножению показателя при новом основании на постоянную m:

$$r = e^m.$$

Кривая $y = e^{mx}$ получается из кривой $y = e^x$ подстановкой mx вместо x, т. е. умножением абсцисс графика $y = e^x$ на $\frac{1}{m}$.

Для $y = OB$ (рис. 119) абсциссы BP_1 и BP_2 суть соответственно $\lg_e y$ и $\lg_r y$, иначе говоря —

$$BP_2 = \frac{1}{m} BP_1$$

или

$$\lg_r y = \frac{1}{m} \lg_e y.$$

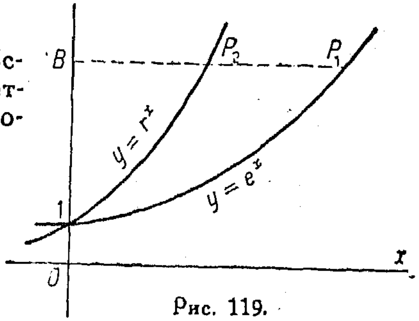


Рис. 119.

Если m определено, то можно перейти от системы с основанием e к системе с основанием r.

Величина $\frac{1}{m}$ называется *модулем* системы логарифмов с основанием r.

Заметим, что $\frac{1}{m}$ есть $\lg_r e$ или $\frac{1}{\lg_e r}$, как это доказано в n^0 358.

360. Если имеется кривая $y = r^x$ и требуется начертить кривую $y = r^{x+h}$, то следует просто перенести точки кривой

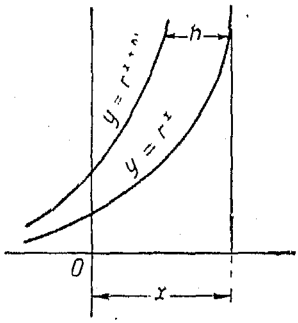


Рис. 120.

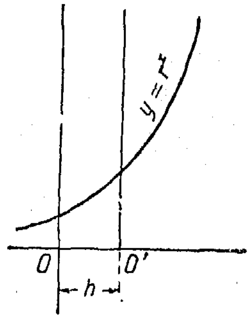


Рис. 121.

влево на расстояние h единиц или, что то же самое, перенести начало координат вправо, т. е. в положительном направлении, на h единиц.

Так как

$$y = r^{x+h} = r^x \cdot r^h,$$

то ординаты новой кривой будут в r^h раз больше ординат кривой $y = r^x$. Оба способа преобразования графика последней функции показаны на рис. 120 и 121.

361. Логарифмические и показательные функции. Рассмотрим уравнения

$$y = r^x \text{ (показательная функция)}$$

$$x = \lg_r y \text{ (логарифмическая функция)}.$$

Оба вида функций эквивалентны, но имеют обратный друг другу смысл. Если вычертить соответствующие кривые, то они окажутся одинаковыми. Этот случай аналогичен следующему:

$$y^2 = x \text{ и } y = \pm\sqrt{x}.$$

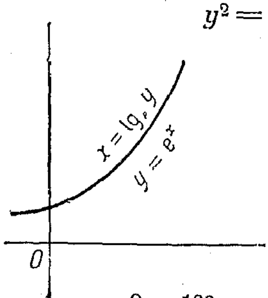


Рис. 122.

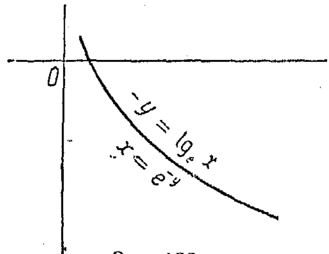


Рис. 123.

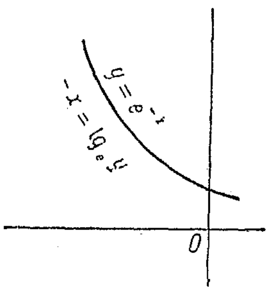


Рис. 124.

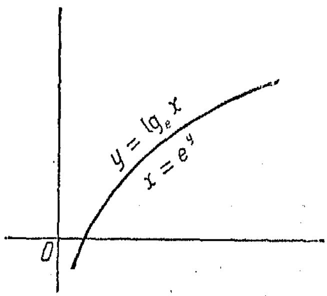


Рис. 125.

Оба уравнения соответствуют одной и той же кривой. График указанных в начале n⁰ функций показан на рис. 122.

Кривая $y=e^{-x}$, показанная на рис. 124, представляет собой зеркальное отражение кривой $y=e^x$ по отношению к оси Y.

Влияние замены x на y и подстановок $-x$ вместо x и $-y$ вместо y в данные уравнения видно из рис. 123, 124 и 125, если их сравнить с рис. 122.

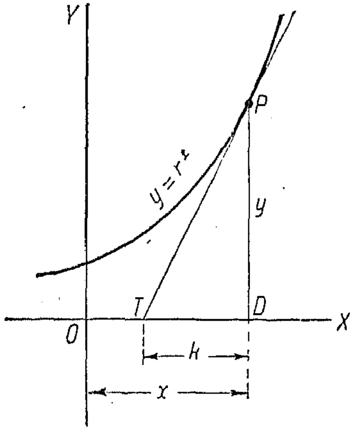


Рис. 126.

362. Подкасательная к показательной кривой. Замечательное свойство показательной кривой заключается в том, что длина k подкасательной графика этой функции (рис. 126) есть величина постоянная. Если в точке P провести касательную к кривой до пересечения в точке T с осью X, то расстояние TD между этой точкой и основанием перпендикуляра, опущенного из P, есть величина постоянная. Это расстояние называется *подкасательной* кривой [1]).

$$k>1, \text{ если } r=2$$

$$k<1, \text{ если } r=3.$$

При $k=1$, $r=e=2{,}71828$.

363. Наклон касательной к графику показательной функции. Наклон касательной к кривой $y=r^x$, как видно из графика, равен $\frac{y}{k}$ или, так как величина k — постоянная для любой точки P;

$$\text{наклон этой касательной равен } cy \tag{1}$$

где $c=\frac{1}{k}$.

Из (1) можно заключить, что наклон касательной пропорционален ординате данной точки.

Таким образом, для P (0, 1) эта величина равна $c=\frac{1}{k}$.

[1]) Свойство подкасательной показательной кривой, упоминаемое в этом параграфе, будет выведено в дальнейшем из уравнения кривой.

Прим. ред.

Как было указано в n⁰ 362, величина k зависит от r, причем если $r=e$, то $k=1$, $c=1$.

Произведение cy (наклон касательной) имеет величину, равную y.

Это свойство касательной обусловливает применение натуральных логарифмов в высшей математике, так как производная функции равна самой функции.

364. Показательные уравнения вида $r^x=b$. Уравнения этого типа, например $20^x=75$, решаются с помощью логарифмов.

Положим $r^x=b$; тогда $\lg(r^x)=\lg b$, так как логарифмы равных величин также равны между собой.

Следовательно

$$x\lg r=\lg b.$$

Отсюда

$$x=\frac{\lg b}{\lg r}.$$

Приведенное выше уравнение $20^x=75$ можно решить, подставляя в выражение для x величины $r=20$ и $b=75$; тогда

$$x=\frac{\lg 75}{\lg 20}=\frac{1{,}875061}{1{,}301030}=1{,}440444.$$

Согласно сказанному в начале предыдущей главы, ординаты графика показательной функции составляют геометрическую прогрессию, в то время как абсциссы образуют арифметическую (см. n⁰ 341).

365. Закон сложных процентов. Пусть P — вложенный капитал; r — размер процентов.

В конце первого года прибыль равна Pr, а самый капитал обратится в

$$P+Pr=P(1+r).$$

Приращение капитала в конце второго года будет равно $P(1+r)r$, а капитал будет

$$(P+rP)+(1+r)Pr$$

или

$$P(1+r)+Pr(1+r)=(P+Pr)(1+r)=$$
$$=P(1+r)(1+r)=P(1+r)^2.$$

Размеры капитала через n лет

$$A=P(1+r)^n.$$

Если капитал отдан по сложным процентам, причем приращение его равно 5% в год, то через n лет этот капитал будет равен

$$A = P(1+r)^n = P(1{,}05)^n.$$

Откладывая по оси абсцисс годы, а по оси ординат — размеры капитала, получим кривую, являющуюся графиком показательной функции.

$$\lg_{10} 1{,}05 = 0{,}021$$

$$\lg_e 1{,}05 = 2{,}302 \cdot 0{,}021 = 0{,}048,$$

откуда

$$e^{0{,}048} = 1{,}05.$$

Таким образом функция будет иметь вид

$$A = Pe^{0{,}048n}.$$

Это будет частный случай уравнения

$$y = ae^{kx}.$$

366. Характер возрастания показательной функции. Закон сложных процентов выражает ряд важнейших явлений природы. Как было замчено ранее, наклон касательной к кривой $y = ae^{bx}$ (или скорость возрастания показательной функции) в любой ее точке пропорционален ординатам или значениям функции.

Таким образом, если какая-нибудь функция возрастает пропорционально себе самой, то имеет место изменение по закону сложных процентов или показательному.

Говорят, что изменение двух количеств происходит по показательному закону, если одно из них изменяется в геометрической прогрессии, в то время как другое — в арифметической. Пример представляет трение каната, закрученного около вала: в то время как число оборотов возрастает в арифметической прогрессии, трение возрастает в прогрессии геометрической.

Выражение $y = ae^{bx}$ есть общая форма показательных уравнений.

367. Вычисления при помощи логарифмов. Вычисления при помощи логарифмов дают в результате число с числом точных значащих цифр, не бо́льшим числа десятичных знаков в мантиссе. Сообразно с этим, если заданное число имеет, скажем, четыре верных знака, то для вычислений достаточно четырехзначных таблиц.

Если одно из чисел имеет три верных знака, то точность вычислений при помощи счетной линейки (которая есть не что иное, как трехзначная таблица логарифмов) оказывается вполне достаточной.

В случае шести точных знаков для сохранения надлежащей точности необходимо употреблять шестизначные таблицы логарифмов.

368. Модуль убывания или логарифмический декремент. В очень большом числе явлений природы убывающая показательная функция встречается чаще, чем возрастающая, так что соответствующее уравнение имеет вид

$$y = ae^{-bx},$$

где b — существенно отрицательная величина. Величина $(-b)$ называется модулем убывания или логарифмическим декрементом функции, соответствующим возрастанию переменной x на единицу. Логарифмический декремент показан для ряда натуральных и обыкновенных логарифмов, как они идут слева от единицы (n⁰ 343).

369. Приближенные логарифмические формулы. Если x — малая величина, то

$$\lg_e(1 \pm x) = \pm x - \frac{1}{2}x^2.$$

Пример.

$$\lg_e(1{,}0025) = 0{,}0025 - \frac{0{,}00000625}{2}.$$

Указанное соотношение является следствием изложенного в n⁰ 464, где приведены ряды для вычисления логарифмов.

370. Некоторые дополнительные логарифмические формулы.

$$\lg(abc) = \lg a + \lg b + \lg c$$

$$\lg\left(\frac{ab}{cd}\right) = \lg a + \lg b - \lg c - \lg d$$

$$\lg(a^m b^n c^p) = m \cdot \lg a + n \cdot \lg b + p \cdot \lg c$$

$$\lg\left(\frac{ab^m}{c^n}\right) = \lg a + m \cdot \lg b - n \cdot \lg c$$

$$\lg(a^2 - b^2) = \lg[(a-b)(a+b)] = \lg(a-b) + \lg(a+b)$$

$$\lg\sqrt{a^2-b^2}=\frac{1}{2}\lg(a+b)+\frac{1}{2}\lg(a-b)$$

$$\lg\left(a^3\sqrt[4]{a^3}\right)=\lg a^3+\lg\sqrt[4]{a^3}=3\lg a+\frac{3}{4}\lg a=\frac{15}{4}\lg a$$

$$\lg\sqrt[n]{(a^3-b^3)^m}=\frac{m}{n}\lg[(a-b)(a^2+ab+b^2)]=\frac{m}{n}\lg(a-b)+$$
$$+\frac{m}{n}\lg(a^2+ab+b^2)$$

$$\lg\sqrt{\left(\frac{a^2-b^2}{[a+b]^2}\right)}=\frac{1}{2}\lg(a+b)+\frac{1}{2}\lg\ (a-b)\ -\lg(a+b)=$$
$$=\frac{1}{2}\lg(a-b)-\frac{1}{2}\lg(a+b).$$

371. Логарифмическая бумага. Бумага, на которой нанесена сетка из двух взаимно-перпендикулярных систем линий, расстояние между которыми взято по логарифмической шкале, называется *логарифмической бумагой.* Эта бумага весьма удобна для изображения на ней степенных функций.

Чтобы начертить на логарифмической бумаге график функции

$$y=ax^n, \quad [65]$$

возьмем логарифмы обеих частей равенства. Имеем:

$$\lg y=\lg a+n\lg x. \qquad (1)$$

Положим

$$Y=\lg y,\ K=\lg a,\ X=\lg x.$$

Тогда вместо ур-ния (1) можно написать

$$[86] \qquad Y=nX+K.$$

Если принять X и Y за переменные, то ур-нию [86] будет соответствовать прямая линия. Линию того же вида мы получили бы, если бы откладывали значения x и y на логарифмической бумаге. Действительно, когда мы откладываем какое-нибудь значение x, то расстояние от начала координат до точки на оси X, абсцисса которой равна x, есть не что иное, как $\lg x$. Кроме того, наклон прямой, соответствующей ур-нию [86], равен n, т. е. показателю степени при x в ур-нии [65]. Пересечение этой линии с осью Y есть точка с ординатой K, равной $\lg a$.

Таким образом, если нанести на логарифмической бумаге значения x и y из [65], то величина n будет характеризоваться наклоном прямой, а значение a можно отсчитать непосредственно на вертикальной шкале.

372. Примеры графиков степенных функций приведены на рис. 127 и 128. На рис. 129 показан график зависимости между путем, проходимым телом, и временем его падения.

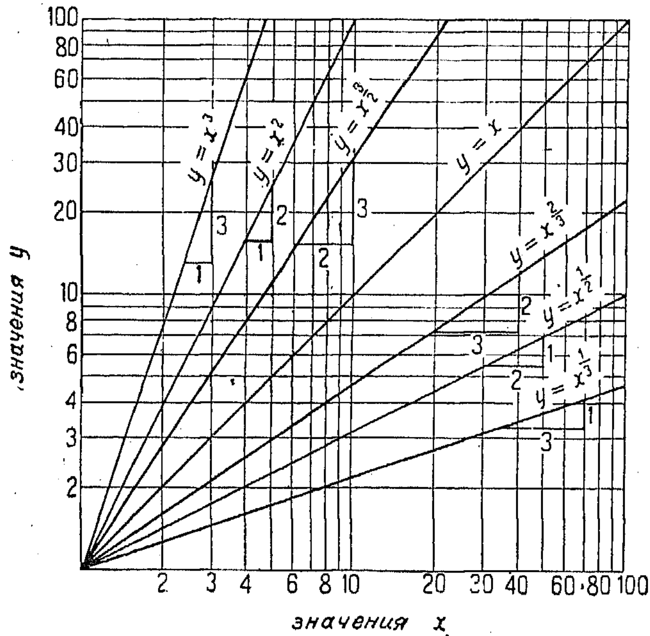


Рис. 127.

При графическом изображении степенной функции сперва определяется точка (1, 1), а затем через эту точку проводится прямая с наклоном n. Значения x и y находятся из графика непосредственно.

Логарифмические сетки часто наносятся в виде небольших квадратов с делениями от 1 до 10 на каждой стороне. Каждый такой квадрат является повторением предыдущего квадрата, как это видно из рис. 127, 128 и 129.

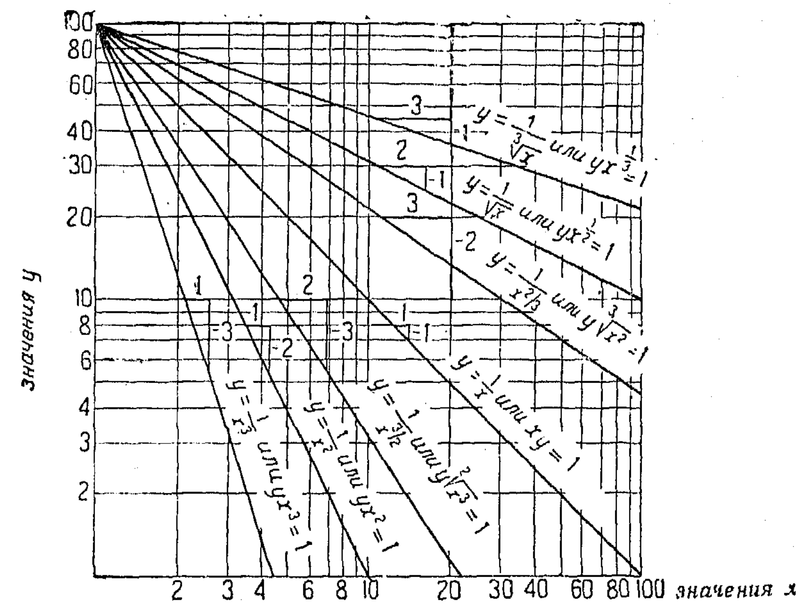


Рис. 128.

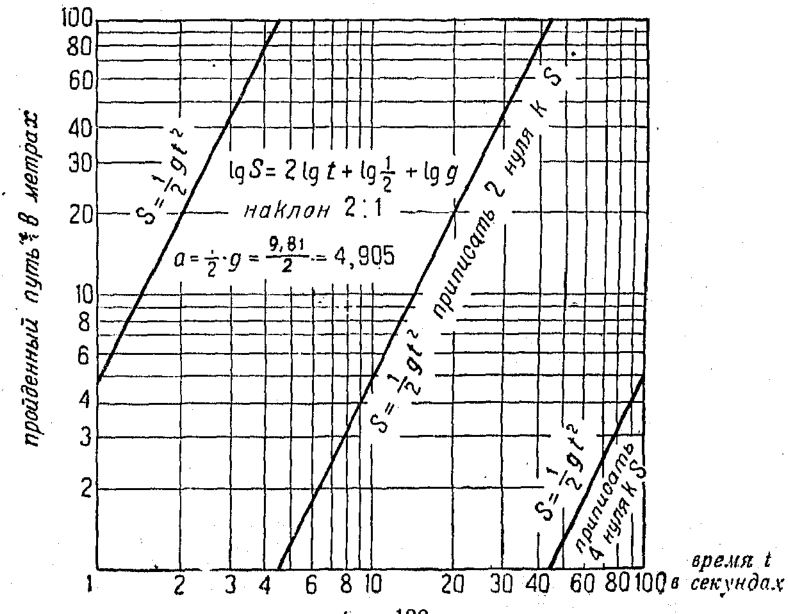


Рис. 129.

Каждый последующий квадрат соответствует таким образом увеличению логарифма переменной на единицу, что равносильно перенесению запятой на один знак вправо.

В случае, если $y = x^{\frac{3}{2}}$ (рис. 130), то, при перенесении запятой в x на два знака, в y следует перенести ее на три знака, ибо наклон прямой равен $\frac{3}{2}$. Начальная точка графика находится в (1).

С целью экономии места весьма удобно сгруппировать отдельные квадраты в один и таким образом объединить

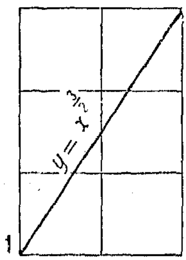


Рис. 130.

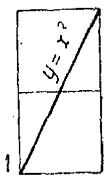


Рис. 131.

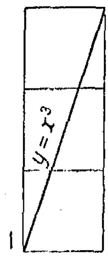


Рис. 132.

изображение функции на одном квадрате, как это и сделано на рис. 129.

Во всех случаях желательно определять положение запятой на-глаз.

После представления функции в логарифмической форме

$$\lg y = \lg a + n \lg x$$

можно продолжать дальнейшие действия как с линейными функциями (см. nn^0 128 и 145).

Как было сказано ранее, $\lg a$ соответствует точке пересечения с осью Y, n — равен наклону прямой.

Если уравнение функции имеет вид

$$y = 3(x + 3)^2,$$

то ось Y будет пересекаться прямой в точке 3. Вместо того, чтобы находить $\lg 3$ и откладывать его на оси Y, можно просто отметить эту точку на указанной оси, ибо масштаб подобран таким образом, что точка, отмеченная на оси цифрой 3, соответствует $\lg 3$.

Если вместо x подставить $(x+3)$, то результат будет отличаться от того, который получился бы в случае прямоугольных координат. Мы просто вычитаем из чисел, указанных на оси X, три единицы и употребляем для отсчитывания значений x новую шкалу. Эта вторая шкала показана на рис. 133.

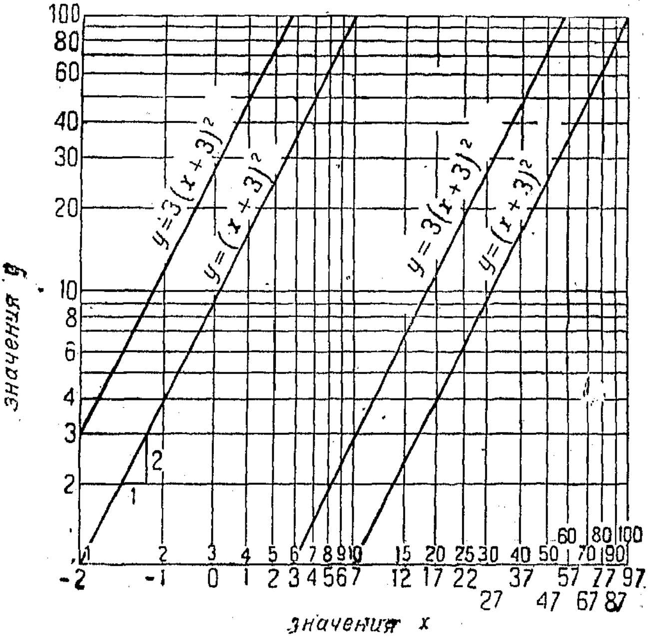


Рис. 133

Если в уравнении имеется постоянная, изменяющая значение y, например

$$y=3(x+3)^2-3$$

или

$$y+3=3(x+3)^2,$$

то для y-ов следует нанести дополнительную шкалу, так же как это было уже сделано для x-ов.

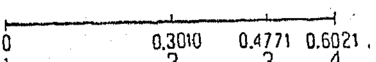


Рис. 134.

373. Логарифмическая шкала может быть легко получена, если, вычислив логарифмы чисел от 1 до 10, отложим их в некотором масштабе на прямой (рис. 134). Вместо значений логарифмов, на полученной шкале следует надписать соответствующие им числа, вследствие чего не будет необходимости разыскивать их в таблицах. Так например, вместо того, чтобы в начале шкалы писать 0, мы пишем 1, так как 0 есть $\lg 1$; вместо 0,3010 в точке, соответствующей $\lg 2$, мы пишем самое число 2.

374. Логарифмическая бумага является удобным средством для выяснения зависимости, связывающей данные, полученные из опыта, если есть основания предполагать, что зависимость между переменными выражается показательной функцией.

Если полученные из опыта данные при нанесении на логарифмическую бумагу, располагаются на прямой линии, то эта линия соответствует степенной функции. Уравнение, связывающее переменные, можно легко установить, определив место пересечения прямой с осью Y и ее наклон. Расстояние точки пересечения от начала координат дает коэффициент a, а наклон указывает значение показателя степени в уравнении

$$y = ax^n. \qquad [65]$$

375. Логарифмы и геометрическая прогрессия. Линия, соединяющая концы ординат в графике арифметической прогрессии, есть прямая. Если отложить на ординатах логарифмы членов геометрической прогрессии, то концы этих ординат расположатся также на прямой.

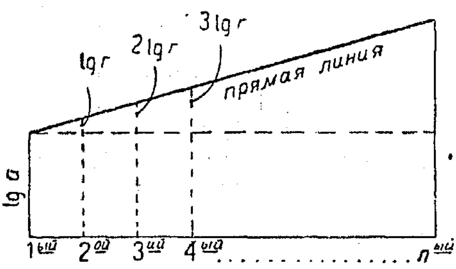


Рис. 135.

Действительно, если имеем ряд

$$a, ar, ar^2, ar^3 \ldots ar^{n-1}, \qquad [76]$$

то, взяв логарифмы его членов, получим:

$$\lg a, \lg a + \lg r, \lg a + 2\lg r, \lg a + 3\lg r,$$
$$\lg a + 4\lg r, \ldots, \lg a + (n-1)\lg r.$$

Составляя график, в котором по оси абсцисс отложены деления, соответствующие порядковым нумерам членов, а по ординатам — их логарифмы, получим чертеж, изображенный на рис. 135.

Так как длина каждой ординаты равна предыдущей плюс длина, соответствующая $\lg r$, то график будет представлять собой прямую.

376. Посредством логарифмической шкалы (например нанесенной на счетной линейке) можно сразу получить величину каждого члена прогрессии. Если пользоваться обыкновенным масштабом, то придется находить их по таблицам.

Применяя описанный способ графического изображения геометрической прогрессии, можно легко находить любое геометрическое среднее.

Пример. Найти четыре геометрических средних между числами 2 и 90. Так как число всех членов равно шести, то отложим на горизонтальной оси 6 точек на одинаковых расстояниях:

$\lg 2 = 0{,}301, \quad \lg 90 = 1{,}954.$

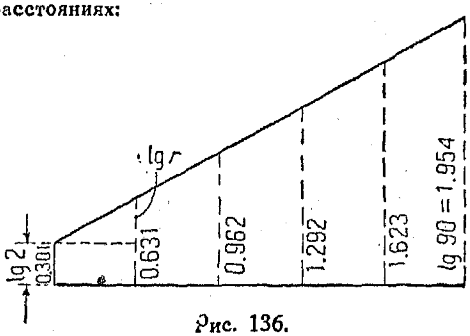


Рис. 136.

Восставим в первой точке перпендикуляр и отложим на нем отрезок, равный $\lg 2$, т. е. 0,301, в соответствующем масштабе. Сделаем то же самое в шестой точке, отложив на ординате отрезок, соответствующий $\lg 90 = 1{,}954$. Соединим концы полученных ординат прямой линией.

Ординаты остальных четырех членов прогрессии получатся равными отрезкам, отсекаемым проведенной прямой на перпендикулярах, восставленных из соответствующих делений на оси абсцисс (рис. 136).

Измерив эти ординаты, получим:

0,631 0,962 1,292 1,623.

Из таблиц логарифмов найдем, что этим логарифмам соответствуют числа, составляющие ряд

2 4,33 9,16 19,6 41,95 90[1]).

---

1) Если принять точку, в которой отложена ордината, равная $\lg 2$, за начало отсчета по оси OX и выбрать масштаб по оси OX с таким расчетом, чтобы точка, где проведена ордината, равная $\lg 90$ соответствовала абсциссе, равной 1, то уравнение прямой, о которой говорится в тексте, имеет вид

$$y = (\lg 90 - \lg 2)\, x + \lg 2. \qquad (*)$$

При $x = 0$ ордината $y = \lg 2$. При $x = 1$ ордината $y = \lg 90$. Уравнение (*) можно написать в виде

$$y = x \lg 90 + (1 - x) \lg 2$$

или

$$y = \lg 90^{x}\, 2^{1-x}.$$

377. Из приведенного графика можно также найти знаменатель прогрессии r, так как $\lg r$ как раз равен приращению ординаты при переходе к каждому последующему члену. Рассматривая первый и второй члены, имеем:

$$0{,}631 - 0{,}301 = 0{,}330;$$

следовательно r есть число, логарифм которого равен 0,330, т. е. $r = 2{,}44$.

378. Для нахождения геометрических средних между двумя числами имеется еще другой способ, кроме описанного выше. При нем приходится воспользоваться логарифмической шкалой, например той, которая нанесена на счетной линейке.

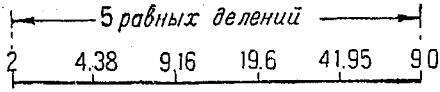


Рис. 136 а.

Пусть требуется вставить между двумя заданными числами четыре геометрических средних.

Находим эти числа на шкале и делим отрезок между ними на $4+1$ равных частей. Цифры, стоящие против полученных делений, укажут непосредственно значения искомых геометрических средних.

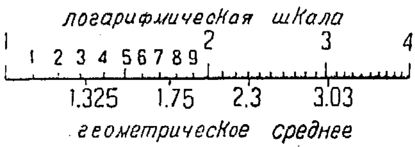


Рис. 137.

Описанный способ иллюстрируется рис. 136а и 137.

379. Сравнение показательной и степенной функций. В естественных науках встречаются три основных зависимости между переменными величинами:

1. Степенная зависимость, которая выражается степенной функцией

$$y = ax^n, \qquad [65]$$

Если положить

$$x_1 = \frac{1}{6},\ x_2 = \frac{1}{3},\ x_3 = \frac{1}{2},\ x_4 = \frac{2}{3},\ x_5 = \frac{5}{6},$$

то

$$y_1 = \lg\sqrt[6]{90\cdot 2^5};\ y_2 = \lg\sqrt[6]{90^2\cdot 2^4};\ y_3 = \lg\sqrt[6]{90^3 2^3};$$
$$y_4 = \lg\sqrt[6]{90^4\cdot 2^2};\ y_5 = \lg\sqrt[6]{90^5\cdot 2}.$$

Ординаты y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 представляют собою последовательные средние геометрические, вставленные между 2 и 90.

Прим. ред.

где n может быть числом положительным или отрицательным.

2. *Гармоническая или периодическая зависимость*

$$y = a \sin nx,$$

свойственная всем периодически повторяющимся явлениям.

3. *Показательная зависимость (закон сложных процентов)*, рассмотренная в nn⁰ 365 и 366. В степенной функции $y = ax^n$, если x изменится на постоянный множитель (например m), то y также изменится на постоянный множитель. Другими словами, если x изменяется в геометрической прогрессии, то y изменяется также в геометрической прогрессии.

Пример. Пусть m близко к 1 или $m = 1 + r$, где r — изменение x в процентах.

Отношение двух значений функции будет:

$$\frac{y'}{y} = \frac{f(x+rx)}{f(x)} = \frac{a[(x+rx)^n]}{ax^n} = (1+r)^n.$$

Но $(1+r)^n \approx 1 + nr$, следовательно

$$\frac{y'-y}{y} = \frac{ax^n(1+r)^n - ax^n}{ax^n} \approx nr.$$

Это показывает, что процентное изменение y равно nr, в то время как процентное изменение x — просто r. Поэтому относительное изменение функции в n раз больше относительного изменения независимой переменной. Если требуется определить, следуют ли полученные из опыта данные степенной зависимости, надлежит выяснить, вызывает ли постоянное относительное изменение независимой переменной постоянное относительное изменение функции, кратное изменению независимой переменной.

380. Изменение показательной функции. Пусть

$$y = ae^{bx}.$$

Предположим, что показательная функция возрастает в постоянное число раз, точно так же, как это имело место в предыдущем n⁰ для степенной функции.

Из n⁰ 379 следует, что при увеличении x на постоянную величину, например h, функция, т. е. y, изменяется на постоянный множитель:

$$\frac{y'}{y} = \frac{F(x+h)}{F(x)} = \frac{ae^{b(x+h)}}{ae^{bx}} = e^{bh}.$$

Множитель e^{bh} не зависит от x, т. е. он остается постоянным, если h — постоянно, и является тем множителем, на который изменяется y при увеличении x до $(x+h)$.

Иначе говоря, в показательной функции, при увеличении переменной x в арифметической прогрессии, функция y возрастает в геометрической.

381. Определение показательной зависимости. Если переменная x получает постоянное приращение, например становится равной $x+2$, и при этом сама функция возрастает в постоянное число раз, например получает значение $16y$, то зависимость между функцией и переменной может быть выражена уравнением показательного типа.

Нанося значения функции и переменного на логарифмическую бумагу, получим прямую, посредством которой определим постоянные, входящие в уравнение $y=ae^{bx}+c$.

Сравнение формул показательных функций.

Рассмотрим различные формы показательных функций.

[87] $y=e^x$.

[88] $y=ae^x$

[89] $y=ae^{kx}$.

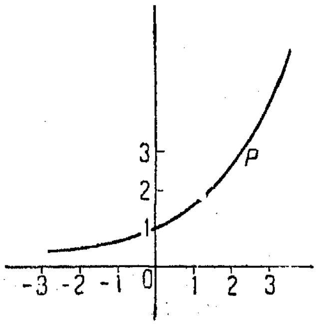


Рис. 138.

Функции [87] соответствует кривая, показанная на рис. 138. Эта кривая приближается, по мере продолжения ее влево, к оси X, но никогда этой оси не пересекает. С увеличением x наклон кривой возрастает.

График ур-ния [88] подобен предыдущему по форме, но здесь каждая ордината кривой $y=e^x$ умножена на постоянную a. Можно считать кривую, показанную на рис. 138, за график функции [88], но тогда масштаб ординат следует уменьшить в a раз.

В ур-нии [89] значения y, соответствующие различным значениям x, например 1, 2, 3, 4..., будут такие же, как и в [88], если положить в последнем $x=k$, $2k$, $3k$ и т. д. Если k — число положительное, то график [89] будет иметь тот же вид, что и график функции [88], но масштаб абсцисс придется изменить.

Таким образом, если вычертить основной график $y = e^x$, то путем изменения масштабов абсцисс и ординат можно преобразовать его так, чтобы он соответствовал ур-нию [89].

Если k — отрицательное, то график изменится точно таким же образом, как это имело место при изменении знака у x в n⁰ 361.

Глава XVII.

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ЛИНЕЙКА.

382. Хотя инженеры пользуются логарифмической линейкой чаще, чем лица каких-либо других профессий, мы все же полагаем, что большинство из них ограничивается выполнением на ней лишь простейших действий.

Когда они сталкиваются с многочисленными правилами пользования линейкой, излагаемыми в соответствующих пособиях, то предпочитают вместо их запоминания применять таблицы логарифмов.

Мы считаем, что большинство указанных правил не нужно запоминать, а достаточно ознакомиться лишь с некоторыми основными приемами пользования линейкой. Автор надеется, что рассмотрение приводимых ниже указаний даст возможность читателю применять линейку с большой пользой.

Предполагается некоторое знакомство читателя со счетной линейкой, а также знание логарифмов в объеме nn⁰ 341—350.

Логарифмическая линейка по существу представляет собой инструмент, заменяющий таблицу логарифмов.

Линейка состоит из нескольких шкал с нанесенными на них делениями, соответствующими логарифмам чисел. Отрезки этих шкал могут быть механически сложены или вычтены друг из друга.

С первого взгляда может показаться странным, что выражения, содержащие квадратные и кубические корни, степени чисел, различные тригонометрические функции и т. д., могут быть вычислены посредством простого сложения или вычитания отрезков шкал или посредством того и другого действия вместе.

Мы ограничимся рассмотрением логарифмической линейки с различными двойными шкалами, потому что она является наиболее удобной и ее следовало бы иметь каждому инженеру.

383. Логарифмическая шкала L. В противоположность обычно принятому порядку, рассмотрим сначала логарифмическую шкалу, обозначенную на американской десятидюймовой счетной линейке буквой L[1]).

Эта шкала называется *шкалой равных делений.* Как известно, логарифмы чисел, образующих геометрическую прогрессию, сами составляют арифметическую. Поэтому отсчет следует производить на шкале, разделенной на равные части.

Мантиссы чисел от 1 до 10 нанесены через одинаковые промежутки на протяжении 10 дюймов[2]). Они конечно являются десятичными дробями, как это показано на рис. 139.

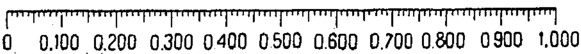


Рис. 139.

Отрезок между каждыми двумя соседними числами разделен на 10 равных частей, которые в свою очередь разделены на пять.

Таким образом эта шкала будет соответствовать трехзначной логарифмической таблице.

При помощи циркуля мы можем измерить на ней два отрезка, например отрезок в 2 дюйма, который соответствует мантиссе 0,2, и отрезок в 3 дюйма, соответствующий мантиссе 0,3, а затем можем сложить эти отрезки.

В результате такого сложения получим отрезок длиной в 5 дюймов, который соответствует мантиссе 0,5, так как шкала разделена на равные части.

Обратимся теперь к рассмотрению шкалы D или таблицы логарифмов. Там мы найдем числа, логарифмы которых суть 0,2, 0,3 и 0,5. Таким образом имеем:

$$\lg 1{,}58 + \lg 2{,}01 = \lg 3{,}18$$

или

$$1{,}58 \times 2{,}01 = 3{,}18.$$

Рассмотренная шкала является основной шкалой линейки, причем за единицу ее принят отрезок длиной в 10 дюймов.

---

[1]) На линейках системы Rietz'а шкала L (логарифмов) находится внизу в виде ординарной шкалы.

Прим. ред.

[2]) Длина десятидюймовой американской линейки равна 25,4 *см*. Она немного разнится от 25-сантиметровой линейки системы Rietz'а. Устройство шкалы логарифмов одинаково.

Прим. ред.

Каждое из делений 0,100, 0,200, 0,300 и т. д. отстоит от соседнего на 1 дюйм, т. е.

$$0{,}100 \times 10 = 1{,}00, \quad 0{,}200 \times 10 = 2{,}00,$$
$$0{,}300 \times 10 = 3{,}00, \text{ и т. д.}$$

384. Шкалы C **и** D. Шкалы C и D[1]) градуированы по логарифмической шкале L, но вместо логарифмов на них нанесены числа, соответствующие этим логарифмам.

Числа, нанесенные на линейке, и их логарифмы приведены в следующей таблице:

Числа . . .	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Логарифмы .	0	0,301	0,477	0,602	0,699	0,778	0,845	0,903	0,954	1

Сравним логарифмы, нанесенные на шкале L, с числами на шкале D (рис. 140).

Преимущество нанесения на шкалу чисел вместо их логарифмов заключается в том, что при этом нет необходимости

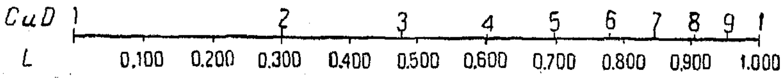


Рис. 140.

отыскивать числа в таблице, а их можно читать непосредственно.

При помощи циркуля можно сложить отрезок, соответствующий числу 2, с отрезком, соответствующим числу 3 (на шкале D). Полученный в результате отрезок отвечает числу 6.

Движок линейки позволяет складывать и вычитать подобные отрезки, что заменяет умножение и деление чисел, соответствующих определенным логарифмам, представленных отрезками.

385. Обыкновенная установка для умножения. Сложение двух отрезков логарифмических шкал, например отрезков, соответствующих числу 2 и числу 3, дает отрезок, соответствующий числу 6, т. е. дает произведение двух чисел: $2 \times 3 = 6$.

В то время как умножение может быть произведено и при помощи так называемых обращенных шкал, которые будут рассмотрены ниже, приведенный способ можно применить

[1]) Шкалы C и D американской линейки тождественны по устройству с нижней двойной шкалой линейки системы Rietz'a.

Прим. ред.

также и для умножения на числа, обратные данным; при этом мы получаем частное.

Для того, чтобы в дальнейшем отличать описанный способ от других, мы будем его называть *обыкновенной установкой для умножения.*

Итак, *если индекс (цифра 1 на подвижной шкале линейки) подведен к какому-либо делению на неподвижной шкале, ползун поставлен на некоторое число движка (подвижной шкалы), а результат читают на неподвижной шкале, то все эти действия, вместе взятые, мы будем называть обыкновенной установкой для умножения.*

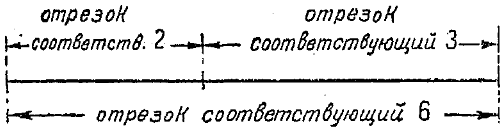


Рис. 141.

386. Обыкновенная установка для деления. Вычитание одного отрезка логарифмической шкалы из другого, например отрезка, соответствующего числу 2, из отрезка, соответствующего 4, дает отрезок, соответствующий числу 2, которое является частным от деления 4 на 2.

Деление может быть произведено также и при помощи так называемых обращенных шкал, пользование которыми будет объяснено далее (в n^0 394). Чтобы различать описанный способ установки, будем в дальнейшем называть его *обыкновенной* установкой для деления.

Таким образом:

Если какое-либо число на подвижной шкале устанавливается против некоторого числа на неподвижной, а ответ прочитывается так же на неподвижной шкале против индекса движка, то все эти действия, вместе взятые, будем называть обыкновенной установкой для деления.

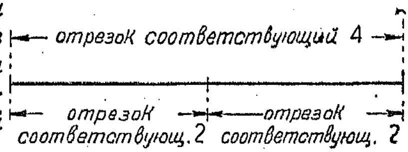


Рис. 142.

Если выражение содержит три числа, то сначала всегда следует применять обыкновенную установку для деления.

Пример. Вычислить выражение:

$$\frac{a \times b}{c} = x,$$

Согласно указаниям n⁰ 386, начинаем с вычитания логарифма c из логарифма a; к полученному результату прибавляем логарифм b на шкале C.

$$\begin{matrix} D & C & D \\ \frac{a}{c} \times & b = & x \\ C & & \end{matrix}$$

Поставим ползун на a на шкале D, установим цифру c шкалы C или CF [1]) против волоска ползуна. Теперь поставим ползун на цифру b шкалы C или CF.

Ответ читаем на шкале D или DF [1]) против волоска.

387. Если окажется необходимым переместить движок таким образом, что индекс на одном конце заменяется индексом другого конца, то данное число умножается или делится на 10, отчего порядок значащих цифр не меняется. Необходимо только следить за правильной постановкой запятой.

388. *Запятая* должна быть поставлена только после предварительного выяснения ее места или при помощи правила, изложенного в n⁰ 30.

389. *Сдвинутые шкалы* [1]). За единицу длины при построении шкал CF и DF принята та же самая величина, что и для шкал C и D, с той лишь разницей, что первые сдвинуты влево на расстояние, соответствующее логарифму π; в результате этого индекс 1 будет вблизи середины линейки.

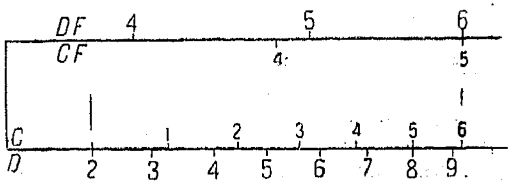


Рис. 143.

Если половина движка находится в жолобе линейки, то все деления шкалы CD могут быть прочитаны либо на передвинутых шкалах CF и DF, либо на шкалах C и D, что делает ненужным выдвигание движка в другую сторону.

---

[1]) На линейках системы Rietz'а и вообще на линейках Faber'а и Nestler'а шкалы CF и DF отсутствуют.

Интересно отметить, что наличие шкал CF и DF позволяет производить отсчет произведения во всех случаях, не передвигая движка вторично.

В том случае, когда отметка по шкале C множителя выходит за пределы шкалы D, вместо шкал C и D можно пользоваться шкалами CF и DF.

Прим. ред.

Если взято некоторое число на сдвинутой шкале движка CF, то другое число, связанное с ним каким-либо действием, должно быть взято на неподвижной шкале DF (при условии, что число π не входит в выражение).

В случае, когда при указанных выше действиях приходится прибавлять какой-нибудь отрезок, например соответствующий $\lg 5$, и его нельзя найти на шкале C, то, не передвигая движка, можем сделать сложение отрезков, пользуясь шкалой CF.

390. Так как шкала DF передвинута по отношению к шкале D влево на расстояние, соответствующее $\lg\pi$, то отсчеты на первой из этих шкал всегда будут больше отсчетов на шкале D на отрезок, равный $\lg\pi$, т. е. на величину ее смещения.

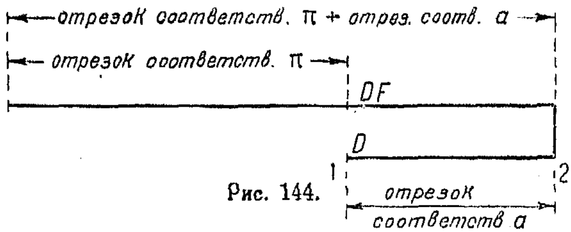


Рис. 144.

Такое же соотношение существует между шкалами CF и C. Числа, явившиеся результатом вычисления на шкалах C и D, могут быть умножены на π. Для этого следует произвести отсчет не на шкале D, а на шкале DF.

Таким же образом число на шкале DF, которое является ответом, может быть разделено на π, если прочитать отсчет не на шкале DF, а на шкале D.

Пользуясь шкалами C и CF, можно получать длины окружностей по заданным диаметрам. Если диаметр найти на C, то длина окружности может быть найдена непосредственно на шкале CF.

391. Для того чтобы умножить какое-либо выражение на π, следует пользоваться шкалами C и D, но ответ придется читать на шкале DF; это и будет соответствовать умножению на π.

Пример. Пусть $x = ab\pi = \pi\times5\times6$.
Установим индекс движка против цифры 5 на шкале D.
Установим ползун против цифры 6 шкалы C.
Читаем ответ 94,3 на шкале DF.

Следует помнить, что переход от меньшей шкалы к большей (сдвинутая шкала имеет деление, соответствующее числу π, там же, где начинаются шкалы C и D) должен означать, что наш ответ умножается на π.

392. Чтобы разделить выражение на π, пользуются шкалами DF, CF и CIF[1]), но вместо того, чтобы читать ответ на шкале DF, его следует читать на шкале D; при этом производится деление нашего выражения на π.

Пусть $x = \frac{ab}{\pi} = \frac{12 \times 21}{\pi}$.

Ставим индекс движка против числа 12 шкалы DF.
Ставим ползун против числа 21 на шкале CF.
Читаем ответ 80,2 на шкале D против черты ползуна.

393. Обращенные шкалы. Шкалы CI и CIF[2]) представляют собой так называемые обращенные шкалы.

Числа, проставленные на обыкновенных шкалах, возрастают слева направо, в то время как в обращенных шкалах они возрастают в обратном направлении (рис. 145).

Обращенные шкалы взяты со шкалы L таким же точно путем, как и шкалы C и D, но только в противоположном

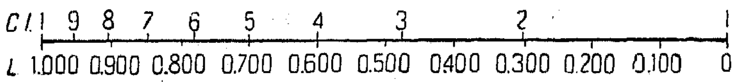


Рис. 145.

направлении. Иначе говоря, деления этих шкал можно получить и из шкал C и D, если откладывать их в противоположном направлении, как это видно из рис. 145.

Отрезки, соответствующие логарифмам, складываются, когда числа на шкалах CI и D совпадают, и произведение получается на шкале D против индекса шкалы CI.

394. Для деления индекс шкалы CI устанавливается против делимого, находящегося на шкале D; частное находится на шкале D против отметки делителя на шкале CI.

Пример. Разделить 4 на 2 = 2.
$\lg 4 - \lg 2 = \lg 2$.

---

1) См. относительно шкалы CIF следующий параграф.

Прим. ред.

2) На линейке системы Rietz'a, обычно употребляемой, нет обратной шкалы. На некоторых линейках Faber'a или Nestler'a имеется обратная шкала.

Сдвинутой обратной шкалы у этих линеек нет.

Прим. ред.

Описанные приемы вычислений будем называть обращенными установками для умножения и деления.

Умножение и деление с помощью обратных шкал хотя и приводится, однако пользоваться этими приемами не рекомендуется, потому что они, отличаясь от обычных способов, могут затруднить и запутать при применении обычных правил.

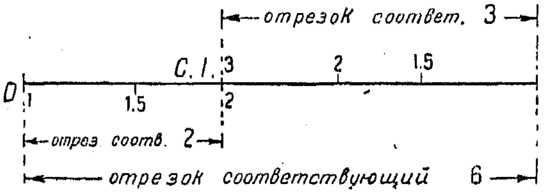


Рис. 146.

Мы предпочитаем сводить все действия к *обыкновенным установкам* (nn^0 385 и 386).

395. Шкала *CIF*, т. е. обращенная — смещенная шкала. Шкала *CIF* аналогична шкале *CI*, но является сдвинутой по отношению к шкале *CI* на отрезок, соответствующий $\lg \pi$, точно так же как шкалы *CF* и *DF* смещены относительно шкал *C* и *D*.

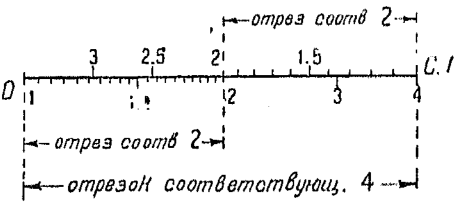


Рис. 147.

Шкала *CIF* должна употребляться совместно с другими смещенными шкалами (при условии, что π не входит в данное выражение). Если бо́льшая половина движка находится в жолобе линейки, вся шкала может быть найдена либо на *CI*, либо на *CIF*, причем отпадает необходимость перемещать движок в другую сторону.

396. Шкала обратных чисел. Сравнивая числа на шкалах *C* и *CI*, видим, что первые обратны по отношению ко вторым. Таким образом, если мы устанавливаем линейку для сложения отрезка b шкалы *C* с отрезком a шкалы *D* посредством *обыкновенной установки* (n^0 385), то имеем:

$$a \times b = x.$$

Если пользоваться шкалой *CI*, которая является шкалой обратных чисел по отношению к числам на шкале *C*, то указанное действие дает (рис. 148):

$$a \times \frac{1}{b} = x \quad \text{или} \quad \frac{a}{b} = x.$$

Затем, если число находится в знаменателе, мы можем умножить обратное ему число посредством *обыкновенной установки* (n^0 385), пользуясь шкалой *CI*.

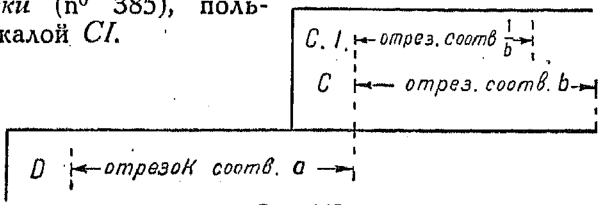


Рис. 148.

Пример: Вычислить $\frac{471}{322} = x$.

Рассмотрим данное выражение как произведение (n^0 385)

$$471\times\frac{1}{322}$$

и воспользуемся для вычисления обыкновенной установкой.

Устанавливаем ползун против числа 471 на шкале *D*.

Ставим индекс движка против черты ползуна.

Устанавливаем ползун на число 322 на шкале *CI* и читаем ответ 146 на шкале *D*.

После небольшего числа упражнений удается устанавливать индекс против указанного первого числа, не пользуясь ползуном.

397. Функциональная зависимость $xy = C$. При вычерчивании графика $xy = C$, ордината $y = \frac{C}{x}$. Устанавливая индекс шкалы *CI* против числа *C* на шкале *D*, можно найти значения *y* для ряда значений *x*, не меняя установки.

398. Выражение $\frac{a}{b}\times$ переменное количество $= x$. Так как частное от деления $\frac{a}{b}$ указывается индексом движка, то без изменения установки можно произвести умножение его на какое-нибудь число. Выражение примет вид

$$\frac{a}{b}\times c = x.$$

Поставим ползун против числа *a* на шкале *D*.

Подведем число *b* на движке под черту ползуна.

Передвигаем ползун к числу *c* на шкале *C*.

Читаем ответ против черты ползуна на шкале *D*.

Пример. Найти $\frac{24\times c}{33}$, где *c* имеет значения 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9

Ставим ползун на 24, на шкале *D*.

Устанавливаем 33 на шкале C против черты ползуна.

Последовательно устанавливаем ползун на числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, находящиеся на шкале C.

Читаем ответы на шкалах DF и D.

Имеем: 0,727, 1,45, 2,18, 2,9, 3,64, 4,36, 5,09, 5,81.

399. Выражение $\frac{a}{b}\times\frac{1}{\text{переменное количество}}=x$. Для этого случая может быть применена обыкновенная установка пп^0 385 и 386). Имеем:

$$\frac{a}{b}\times\frac{1}{c}=x \quad \text{или} \quad \frac{a}{bc}=x.$$

В данном случае можем произвести вычисления, как при делении a на b, с помощью обычной установки (п^0 386).

Передвигаем, как и ранее, ползун к числу c, но ищем его на шкале CI или на CIF, так как $\frac{1}{c}$ есть число, обратное числу c.

Ставим b на шкале C против a на шкале D.

Передвигаем ползун на число c, которое находим на шкале CI или CIF.

Против черты ползуна находим на шкале D искомый ответ.

Пример. Найти значения $\frac{25}{8\cdot c}$, если $c=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

Ставим ползун на 25 на шкале D.

Устанавливаем число 8 на движке C против черты ползуна.

Ставим ползун последовательно на числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, которые находим на шкале CI или CIF.

Читаем ответы на D или DF: 3,12, 1,56, 1,04, 0,78, 0,625, 0,521, 0,440, 0,391.

400. Выражение $a\times b\times$ **переменное количество** $=x$. Здесь могут иметь место случаи

$$a\times b\times c=x \quad \text{и} \quad a\times b\times\frac{1}{c}=x,$$

где c получает различные значения.

Во всех случаях, когда в выражении содержится более двух чисел, их следует расположить таким образом, чтобы сперва произвести обыкновенную установку для деления (см. п^0 386).

Произведение $a\times b$, составляющее первую часть выражения, можно рассматривать как $\frac{a}{\frac{1}{b}}$, причем b можно находить на обращенных шкалах CI и CIF. Таким образом мы производим обыкновенную установку для деления с той лишь разницей, что величнны b отсчитываем на обратных шкалах.

Наше выражение $a \times b \times c = x$ принимает теперь вид

$$\frac{a}{\frac{1}{b}} \times c = x,$$

т. е. приводится к случаю, уже разобранному в n⁰ 398, но b берется на обращенной шкале.

Пример 1. Найти $41 \times 81 \times c = x$, где $c = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
Ставим ползун на число 41 на D.
Устанавливаем число 81 шкалы CI движка против черты ползуна.
Ставим ползун последовательно на числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 шкалы C.
Читаем ответы на D или DF: 3320, 6640, 9960, 13 300, 16 600, 19 900.

Пример 2. Найти величину выражения $36 \times 51 \times 72 = x$.
Ставим ползун на 36 на шкале D.
Устанавливаем 51 на шкале CI против черты ползуна.
Ставим ползун на 72 на шкале CF.
Читаем ответ 132 200 против ползуна на DF.

В случае $a \times b \times \frac{1}{c} = x$ или $\frac{ab}{c} = x$ поступаем как и ранее, т. е. пользуемся обыкновенной установкой (nn⁰ 385, 386), но для C употребляем обращенную шкалу.

Выражение представляем в виде

$$\frac{a}{\frac{1}{b}} \times \frac{1}{c} = x.$$

Пример 3. Вычислить $\frac{26 \times 14}{9} = x$.
Устанавливаем ползун на 26, пользуясь шкалой D.
Подводим 14 шкалы CI под черту ползуна.
Ставим ползун на 9 по шкале CIF.
Результат 40 находим против черты ползуна на шкале DF.
Действие с 9 приходится производить по смещенной обратной шкале, так как указанное число нельзя найти на шкале CI, ибо в жолобе линейки остается половина движка.

Рекомендуется сравнить описанный прием с n⁰ 398 и обратить внимание на различия между ними.

Пример 4. Вычислить $\frac{42 \times 63}{c} = x$, где $c = 1, 2, 3, 4, 5$ и т. д.
Ставим ползун на 42 на шкале D.
Подводим 63 шкалы CI под черту ползуна.

Ставим ползун последовательно на 1, 2, 3, 4, .. на шкале CIF и CI. Читаем ответы: 2650, 1320, 832, 661, 529 и т. д. на D или DF.

Примечание. При установке какого-либо числа, например 63, на обратной шкале, следует наблюдать, чтобы отсчеты производились с соответствующей стороны цифры 6.

401. Выражение $a \times b \times c = x$, смещенная шкала. Другой метод нахождения произведения трех чисел заключается в том, что пользуются шкалами DF и CF одновременно со шкалой CIF. Этот прием совершенно одинаков с предыдущим, с той лишь разницей, что действия производятся на смещенных шкалах:

$$a \times b \times c = x.$$

Ставим ползун на a, пользуясь шкалой DF.

Подводим число b на движке под черту ползуна (n⁰ 386).

Передвигая последний на деление c шкалы CF, читаем на DF результат (n⁰ 385).

Если число c нельзя найти на CF без передвигания движка, то следует разыскивать его на шкале C, а x — на D.

К этому приему следует прибегать, когда приходится делить выражение на π (n⁰ 392).

402. Выражение $\frac{1}{a \times b \times c} = x$. Выражения этого вида вычисляются так же, как указано в n⁰ 400 для случая $a \times b \times c$, причем в результате получают на шкале D числа, обратные искомому. Пользуясь обратной шкалой CI, находим самое искомое число.

Прежде чем переносить отсчет со шкалы D на CI, необходимо совместить их индексы.

Пример. Вычислить $\frac{1}{2 \times 3 \times 6} = x$.

Поступаем как в случае $a \times b \times c$ (n⁰ 400), применяя обычную установку (nn⁰ 385, 386).

Ставим ползун 2 на D.

Подводим деление 3 на CI под черту ползуна.

Устанавливаем ползун на число 6 шкалы C.

Совмещаем индексы движка и шкалы D.

Читаем ответ (0,0278) против черты ползуна на шкале CI.

403. Выражения, в которых имеется множитель π. Пусть имеем выражение

$$x = \frac{\pi \times a \times b}{c} = \frac{\pi \times 42 \times 6}{11}.$$

Приведем это выражение к виду, удобному для *обыкновенной установки для деления* (n^0 386):

$$x = \frac{a}{\frac{1}{b}} \times \frac{1}{c} \times \pi = \frac{42}{\frac{1}{6}} \times \frac{1}{11} \times \pi.$$

Так как здесь π входит в качестве множителя, то действия производим на шкалах C и D, а затем результат отсчитываем на смещенных шкалах, что соответствует умножению на π (n^0 391).

Ставим ползун на деление 42 шкалы D.

Подводим 6 шкалы CI под черту ползуна.

Ставим ползун на деление 11 шкалы CI.

Читаем ответ (72) против черты ползуна на смещенной шкале DF.

Перенесение ответа со шкалы C и D на смещенную соответствует умножению на π.

404. Выражения, в которые π входит делителем. Пусть имеем:

$$x = \frac{ab}{\pi c} = \frac{37 \times 5}{2\pi}.$$

Приведем это выражение к такому виду, чтобы можно было воспользоваться *обыкновенной установкой для деления* (n^0 386):

$$\frac{a}{\frac{1}{b}} \times \frac{1}{c} \times \frac{1}{\pi}.$$

Так как π входит в выражение в качестве делителя, то действия следует производить на смещенных шкалах, а полученное в результате число перенести на шкалу D, что равносильно делению на π (n^0 392). Очевидно, что $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ обратны числам b и c, поэтому пользуемся обратными шкалами, самые же действия производим посредством обыкновенных (nn^0 385, 386).

Ставим ползун на деление 37 шкалы DF.

Подводим 5 шкалы CIF под черту ползуна.

Ставим ползун на деление 2 шкалы CIF.

Читаем ответ (29,5) против черты ползуна на шкале D.

20*

405. Пропорция. Согласно сказанному в n° 386, можно написать

$$\begin{array}{cccc} C & D & C_1 & D_1 \end{array}$$
$$90:82=25:x$$

или

$$C:D=C_1:D_1,$$

откуда

$$\frac{C}{C_1}=\frac{D}{D_1} \quad \text{или} \quad x=22{,}8.$$

Если на линейке найдена величина отношения $\frac{C}{D}$, то C_1 может быть каким угодно числом и D_1 находится без дальнейших передвижений движка.

Необходимо помнить, что все числители находятся на движке, а знаменатели—на неподвижной шкале, т. е. они располагаются на линейке один над другим.

406. Обратная пропорция. Вычисление членов обратной пропорции может быть лучше всего пояснено на примере:

Если 12 человек выполняют работу в 8 дней, то сколько времени она займет у 16 рабочих?

Очевидно, если число людей увеличится, то выполнение указанной работы потребует меньшее количество времени.

Это соотношение „чем больше, тем меньше" называется обратной пропорцией. Таким образом

$$12:16=x:8, \quad \text{откуда} \quad x=\frac{12\times 8}{16}=6.$$

Соответствующие действия будут такие же, как и для случая прямой пропорции, но вместо шкалы C придется пользоваться обратной шкалой CI.

Итак, для обратной пропорции

$$CI:D=(CI)_1:D_1$$

или

$$\frac{CI}{D}=\frac{(CI)_1}{D_1}.$$

407. Шкалы A **и** B [1]). Построим новую шкалу посредством умножения всех логарифмов, нанесенных на шкале L, на 2. Как мы уже знаем, полученные величины будут соответствовать логарифмам квадратов соответствующих чисел.

---

[1]) Шкалы A и C американской линейки соответствуют верхней двойной шкале линейки системы Rietz'a.

Прим. ред.

Таким образом получаем две шкалы, длиной 5 дюймов каждая. После умножения логарифмов, больших 0,5, на 2, получим: 1,2, 1,4 и т. д., т. е. будем иметь не только мантиссу, но и характеристику. Однако вследствие того, что на линейке мы рассматриваем только мантиссу, характеристику отбрасываем.

Надписывая вместо логарифмов соответствующие им числа, получим шкалы A и B. Отрезок, измеренный на шкале D или C и отложенный на A или B, дает квадрат числа.

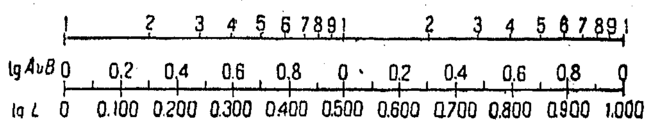


Рис. 149.

Если один из множителей данного выражения должен быть возвышен в квадрат, то его следует найти на шкале C или D, а затем отложить соответствующий отрезок или произвести отсчет на шкале A или B, что соответствует возвышению в квадрат.

Все остальные числа должны отсчитываться на шкалах A и B, иначе они будут также возвышены в квадрат.

408. Числа на шкале C и D являются корнями квадратными из тех, которые указаны на шкалах A и B, так как шкалы эти вдвое длиннее, а отрезки, соответствующие логарифмам, вдвое больше.

Всякие вычисления, в которых данное выражение умножается на корень квадратный, должны производиться так: данный множитель находим на шкале A или B, а затем для автоматического извлечения квадратного корня разыскиваем деление шкалы C или D, лежащие против указанного выше.

Все остальные отсчеты следует производить на шкалах C и D.

Числа можно возвысить в квадрат, устанавливая волосок черты ползуна на данное деление шкалы D и производя отсчет против черты на шкале A непосредственно.

Точно так же корень квадратный из данного числа находим, устанавливая черту на соответствующее деление шкалы A и производя отсчет на шкале D. Следует следить, чтобы для указанного действия применялась надлежащая шкала, ибо $\sqrt{6}$ не равен $\sqrt{60}$.

Левой шкалой можно пользоваться в тех случаях, когда в числе имеется нечетное число цифр, а правой—когда оно четное. В данном случае, выбирая ту или иную шкалу, мы действуем точно таким же образом, как и при извлечении корня по обычному способу, где число предварительно разбивается на грани по две цифры в каждой.

Пример 1. Найти квадрат 23,2.
Ставим ползун на деление 232 шкалы *D*.
Против черты находим на шкале *A* число 538 (*ответ*).

Пример 2. Найти $\sqrt{3129}$.
Ставим ползун на 313 на правой части шкалы *A*.
Против черты находим на шкале *D* 56 (*ответ*).

409. Шкала *K* [1]). Если логарифмы, нанесенные на шкале *L* умножим на 3 и надпишем вместо логарифмов соответствующие им числа, то последние будут кубами тех чисел, которые расположены на шкале *D*.

Шкала *K* состоит из трех частей, длиной по $3^{1}/_{3}$ дюйма каждая.

Если поставить ползун на какое-нибудь деление шкалы *D* и произвести отсчет на шкале *K*, то получим куб данного

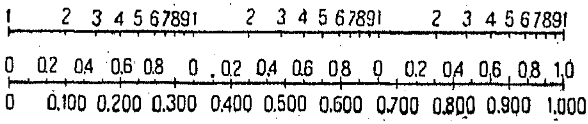


Рис. 150.

числа. Точно так же, если поставить ползун на какое-нибудь число шкалы *K* и произвести отсчет на шкале *D*, то получим кубичный корень из этого числа (рис. 150).

Необходимо следить за тем, чтобы употреблять соответствующую из трех частей шкалы *K*.

Если число разбить на грани по три цифры в каждой, начиная с первого слева от запятой, как это делается в арифметике при извлечении кубичного корня, например

3'428,21,

[1]) Шкала *K* американской линейки соответствует ординарной верхней шкале линейки системы Rietz'a.

Прим. ред.

то, если слева останется одна цифра, следует употреблять шкалу первую слева, при двух цифрах — среднюю шкалу, при трех — правую шкалу.

Пример 1. Найти $(34{,}1)^3 = x$.
Ставим ползун на число 341 шкалы D.
Читаем на шкале K против черты ответ: 39 600.

Пример 2. Найти $\sqrt[3]{433}$.

Устанавливаем ползун на число 433 правой части K. Под волоском читаем на шкале D ответ: 7,56.

410. Шкала тангенсов [1]. Шкала тангенсов получается из шкалы L точно таким же образом, как и шкалы C и D.

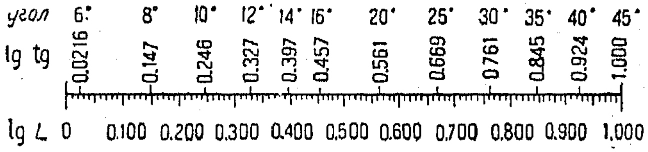


Рис. 151.

Вместо логарифма тангенса на шкале надписаны значения соответствующих углов (рис. 151).

Если например взять отрезок от левого индекса до деления 12° и прибавить или отнять его от отрезка, находящегося на другой шкале, то это соответствует умножению или делению на tg 12.

Для того чтобы определить положение запятой, следует помнить, что tg 45° равен 1 и что тангенсы углов меньших 5°43′, для которых lg tg равен 0,10000, не даны.

Пример 1. Найти $4 \times \operatorname{tg} 10^\circ = x$.
Ставим ползун на число 4 шкалы D.
Подводим индекс движка под черту ползуна.
Ставим ползун на 10 шкалы T.
Читаем ответ 0,704 на шкале D.

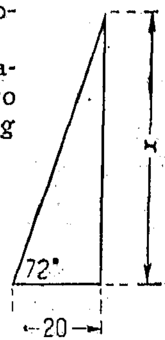


Рис. 152.

Пример 2. Найти x в данном треугольнике (рис. 152):

$$\operatorname{tg} 72^\circ = \frac{x}{20}.$$

На шкале l tg 72° отсутствует, поэтому пользуемся формулой

$$\operatorname{tg} A = \frac{1}{\operatorname{tg}(90^\circ - A)}.$$

[1] Шкала тангенсов находится на обратной стороне движка линейки системы Rietz'a.

Прим. ред.

Тогда

$$\frac{1}{\operatorname{tg} 18^\circ} = \frac{x}{20}.$$

Ставим ползун на число 20 шкалы D.
Возводим 18 шкалы T под черту ползуна.
Читаем на шкале D ответ: 61,6.

411. На шкале T линейки не указаны тангенсы углов, меньших $5^\circ 43'$; однако, имея в виду, что первые три знака у синусов и тангенсов таких углов одинаковы, можно в соответствующих случаях пользоваться шкалой синусов, например

$$\operatorname{tg} 2^\circ 20' = \sin 2^\circ 20' = 0{,}0407.$$

412. Шкала синусов[1]. Шкала синусов получается из логарифмической шкалы L, но относится к шкалам A и B, а не к C и D. По этой причине логарифмическая шкала L должна соответствовать той же единице, что и шкалы A и B, т. е. для 10-дюймовой линейки — 5 дюймам. Благодаря указанному обстоятельству пределы, между которыми можно поместить значения функции синуса, возрастают.

Так как метод нанесения шкалы синусов ничем не отличается от метода получения шкалы тангенсов, то повторять описание его не будем.

Если в данное выражение входит в качестве множителя синус какого-либо угла, то все остальные множители следует брать на шкалах A и B, если они не являются степенями или корнями.

Следует заметить, что, при переходе от шкалы синусов к правой части шкалы A, первая значащая цифра соответствует первой цифре после запятой.

При переходе к левой части шкалы A, первая значащая цифра соответствует второму знаку после запятой.

Пример. Найти $\dfrac{81}{\sin 10^\circ}$.

Ставим ползун на число 81 шкалы A.
Подводим 10 шкалы синусов под черту ползуна.
Индекс движка укажет на шкале A результат: 466.

---

[1] Устройство шкалы синусов линейки Rietz'а значительно отличается от устройства шкалы американской линейки. Шкала синусов линейки Rietz'а отвечает шкалам C и D. По этой причине на шкале синусов нанесены лишь углы от 90° до $5^\circ 4'$.

Шкала синусов находится на обратной стороне движка. Для очень малых углов синус и тангенс по величине совпадают. На обратной стороне линейки Rietz'а находится общая шкала синусов и тангенсов малых углов.

Прим. ред.

Рассматривая линейку, замечаем, что за делением, соответствующим 2°, отмечены также и минуты ('), а за 1°10' указаны знаком ('') и секунды.

Если употреблять эти деления для малых углов, то против индекса движка на шкале A можно найти значения соответствующих синусов и тангенсов. Практически тангенсы очень малых углов равны их синусам.

При определении положения запятой следует помнить, что

$$\text{одна минута} = 1' = 0{,}0003$$

$$\text{одна секунда} = 1'' = 0{,}000005.$$

413. Косинусы. Косинус угла равен синусу дополнительного:

$$\cos A = \sin\,(90° - A).$$

Пример. Найти длину основания прямоугольного треугольника, показанного на рис. 153.

$$x = 26 \times \cos\,63° =$$
$$= 26 \times \sin\,(90 - 63°) =$$
$$= 26 \times \sin\,27°.$$

Ставим ползун на число 26 шкалы A. Подводим индекс движка под черту ползуна.

Ставим ползун на число 27 шкалы S.

Против черты ползуна читаем на шкале A ответ: 11,8.

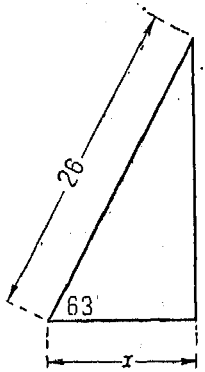


Рис. 153.

414. Логарифмы. Сравнивая шкалы D и L (n⁰ 384), видим, что у нас имеется средство для нахождения логарифмов, соответствующих числам, или чисел, соответствующих данным логарифмам.

Чтобы найти логарифм числа, следует поставить ползун на нужное деление шкалы D, а затем прочесть мантиссу на шкале L, после чего необходимо прибавить характеристику.

Таким же образом для нахождения числа, соответствующего данному логарифму, следует поставить черту ползуна на нужное деление шкалы L и произвести отсчет на шкале D.

415. Выражения общего вида. Предыдущим n⁰ заканчивается рассмотрение различных шкал и их устройств. Вместе с тем мы выяснили, каким образом путем механического сложения и вычитания отрезков различных шкал линейка позволяет умножать, делить, возвышать в степень и извлекать корни из чисел.

Дадим теперь несколько простых правил, которые можно применять ко всем действиям, производимым на линейке, причем рассмотрим для этого общее выражение

$$\frac{a \times b \times c \times d}{e \times f \times g}.$$

Если заданное выражение имеет другой вид по сравнению с написанным выше, то вместо недостающих множителей можем написать 1. Так как в числителе должно быть на один множитель больше, чем в знаменателе, то поступаем следующим образом:

$$\frac{a \times b \times c}{d \times e \times f} = \frac{a \times b \times c \times 1}{d \times e \times f}.$$

Точно так же

$$\frac{a \times b \times c}{d} = \frac{a \times b \times c}{d \times 1}.$$

Правило состоит в следующем:

1. Необходимо преобразовать числитель так, чтобы в нем было на один множитель больше, чем в знаменателе.

2. Первый множитель числителя и ответ будут находиться на неподвижной шкале.

3. Все остальные числа берутся на движке независимо от того, входят ли они в числитель или в знаменатель.

4. Для каждого последовательного множителя знаменателя нужно передвигать *движок*.

5. Для каждого множителя числителя следует передвигать *ползун*.

Пример.

$$\frac{\overset{D}{24{,}3} \times \overset{C}{612} \times \overset{C}{25{,}5} \times \overset{C}{9{,}63} \times \overset{C}{13}}{\underset{C}{1{,}65} \times \underset{C}{7280} \times \underset{C}{4{,}25} \times \underset{C.}{2{,}34}} = \overset{D}{x}$$

Ставим ползун на первый множитель числителя 24,3 . . . . (2) и (5)
Подводим 165 движка под ползун . . . . (3) „ (4)
Передвигаем ползун на число 612, т. е. на следующий множитель числителя . . . . (3) „ (5)
Подводим 728 движка под ползун . . . . (3) „ (4)
Передвигаем ползун на следующий множитель числителя, т. е. на 255 . . . . (3) „ (5)
Подводим множитель 425 делителя под ползун . . . . (3) „ (4)
Передвигаем ползун на четвертый множитель числителя, т. е. на 963 . . . . (3) „ (5)
Подводим множитель 234 знаменателя (на движке) под ползун. (3) „ (4)
Ставим ползун на пятый множитель числителя 13
Читаем ответ против черты ползуна на шкале *D* . . . . (2)

Указанный способ выполнения действий весьма прост, так как ползун передвигается соответственно каждому множителю числителя, а движок— соответственно множителям знаменателя.

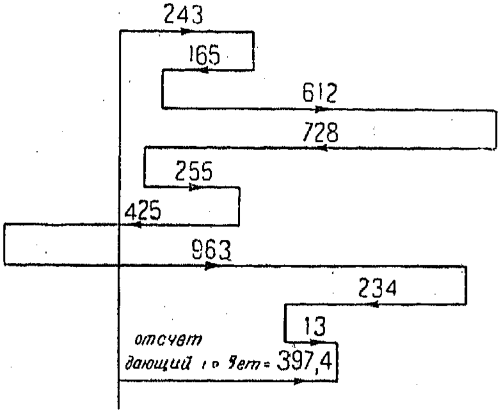


Рис. 154.

На рис. 154 графически представлено решение данной задачи. Из рисунка видно последовательное прибавление отрезков, соответствующих множителям числителя, и вычитание отрезков, соответствующих множителям знаменателя. Ответ представляет собой остаток, получившийся в результате сложения и вычитания.

416. Обратные величины.

Пример.

$$\frac{1}{2{,}24 \times 0{,}53 \times 7{,}81} = x.$$

Чтобы привести выражение к общему виду, вводим в числитель в качестве множителей единицы так, чтобы число этих множителей было на один больше, чем в знаменателе. Имеем:

$$\frac{\overset{D}{1} \times \overset{C}{1} \times \overset{C}{1} \times \overset{C}{1}}{\underset{C}{2{,}24} \times \underset{C}{0{,}53} \times \underset{C}{7{,}81}} = \overset{D}{x}$$

Ставим ползун на единицу шкалы D, что соответствует первому множителю числителя.

Подводим число 224 (первый множитель знаменателя) шкалы на движке под черту ползуна.

Ставим ползун на 1 шкалы C.

Подводим число 53 шкалы C под ползун.

Ставим ползун на 1 шкалы C.

Подводим 781 шкалы C под черту ползуна.

Ставим ползун на 1 шкалы C.

Читаем ответ 0,1075 против черты ползуна на шкале D.

417. Выражения, содержащие квадраты чисел.

Пример.

$$\frac{2{,}53 \times (54{,}3)^2 \times 341}{6{,}7 \times (266)^2}$$

Для того, чтобы возвысить в квадрат те члены, при которых стоит показатель степени 2, их следует перенести со шкал C и D на шкалы A и B, а остальные члены должны сразу отсчитываться на шкалах A и B, иначе они также будут возвышены в квадрат. Итак, имеем:

$$\frac{\overset{A}{2{,}53} \times \overset{C}{(54{,}3)^2} \times \overset{B}{341}}{\underset{B}{6{,}7} \times \underset{C}{(266)^2}} \overset{A}{=} x.$$

Как и в предыдущем случае, поступаем так:

Ставим ползун на число 253 (множитель числителя) на шкале A (передвигаем ползун).

Подводим число 6,7 шкалы B (множитель знаменателя) под черту ползуна (передвигаем движок).

Ставим ползун на число 543 (множитель числителя) шкалы C (передвигаем ползун).

Подводим число 266 (множитель знаменателя) на шкале C под черту ползуна (передвигаем движок).

Ставим ползун на число 341 шкалы B (передвигаем ползун).

Читаем ответ 5,43 на неподвижной шкале A под чертой ползуна.

Отметим, что ползун передвигается в тех случаях, когда ставят множитель числителя, а движок — когда делят на множители знаменателя. Все числа, за исключением первого множителя числителя и ответа, разыскиваются на движке.

418. Извлечение квадратного корня из выражений.

Пример. Вычислить

$$\sqrt{\frac{33{,}1 \times 0{,}42 \times 198}{0{,}76 \times 62 \times 0{,}09}} = x.$$

Выполняя действия на шкалах A и B и перенося результат их на шкалу D, находим значение искомого корня

$$\frac{\overset{A}{331} \times \overset{B}{42} \times \overset{B}{198} \times \overset{B}{1}}{\underset{B}{76} \times \underset{B}{62} \times \underset{B}{9}} \overset{D}{=} x.$$

Ставим ползун на 331 шкалы A.
Подводим 76 на B под ползун.
Ставим ползун на число 42 шкалы B.
Подводим 62 шкалы B под ползун.
Ставим ползун на число 198 шкалы B.
Подводим 9 шкалы B под ползун.
Ставим ползун на 1 шкалы B.
Читаем ответ 25,5 на шкале D.

419. Выражения, содержащие квадратные корни.

Пример. Вычислить

$$\frac{135 \times \sqrt{334} \times 563}{21 \times 332 \times \sqrt{638}} = x.$$

Для того, чтобы извлечь квадратный корень из множителя, мы должны измерить их на шкалах A и B, а затем перенести результат на шкалы C и D.

Остальные члены выражения отсчитываются на шкалах C и D. Итак имеем:

$$\frac{\overset{D}{135} \times \overset{B}{\sqrt{384}} \times \overset{C}{563} \times \overset{C}{1}}{\underset{C}{21} \times \underset{C}{332} \times \underset{B}{\sqrt{638}}} \overset{D}{=} x.$$

Ставим ползун на число 135 шкалы D (передвигаем ползун).
Подводим число 21 шкалы C под ползун (передвигаем движок).
Ставим ползун на 384 по шкале B (передвигаем ползун).
Подводим число 332 шкалы C под ползун (передвигаем движок).
Ставим ползун на 563 шкалы C (передвигаем ползун).
Подводим 638 шкалы B под ползун (передвигаем движок).
Ставим ползун на 1 шкалы C (передвигаем ползун).
Читаем ответ 8,46 на шкале D под чертой ползуна.

420. Выражения, содержащие тангенсы.

Пример. Вычислить

$$\frac{25 \times \operatorname{tg} 15^\circ \times 42}{1{,}65 \times \operatorname{tg} 20^\circ \times \sqrt{13}} = x.$$

Шкала тангенсов построена, исходя из той же единицы измерения, что и шкалы C и D.

Поэтому при вычислениях с тангенсами следует пользоваться шкалами C и D.

$$\frac{\overset{D}{25} \times \overset{T}{\operatorname{tg} 15^\circ} \times \overset{C}{42} \times \overset{C}{1}}{\underset{C}{1{,}65} \times \underset{T}{\operatorname{tg} 20^\circ} \times \underset{B}{\sqrt{13}}} \overset{D}{=} x.$$

Ставим ползун на 25 шкалы D, подводим под него число 165 шкалы C.
Ставим ползун на tg 5° шкалы T.
Подвовим tg 20° шкалы T под ползун.
Ставим ползун на число 42 шкалы C.
Подводим число 13 шкалы B под ползун.
Ставим ползун на 1 шкалы C.
Читаем ответ 130 на шкале D.

Квадратные корни могут в случаях, подобных указанному выше, вычисляться весьма легко, так как подкоренные количества разыскиваются на шкалах A и B, а затем переносятся на шкалы C и D, имеющие одинаковую единицу измерения со шкалой тангенсов.

Квадраты чисел, входящие в выражения, могут быть вычислены только, если рассматривать их как произведения двух равных множителей.

421. Выражения, содержащие синусы.

Пример. Вычислить

$$\frac{(2{,}66)^2 \times \sin 10^\circ}{14{,}2 \times 0{,}0232} = x.$$

Для решения задачи с помощью шкал A и B имеются два основания: *во-первых*, числа, возводимые в квадрат, берутся на шкалах C и D, а затем переносятся на шкалы A и B, а *во-вторых*, шкала синусов имеет ту же единицу измерения, что и шкалы A и B, т. е. шкалу синусов можно рассматривать как аналогичную шкале B.

$$\frac{\overset{D}{(2{,}66)^2} \times \overset{S}{\sin 10^\circ} \times \overset{B\ \ A}{1}}{\underset{B}{14{,}2} \times \underset{B}{0{,}0232}} = x.$$

Ставим ползун на число 266 шкалы D.
Подводим 142 шкалы B под ползун.
Ставим ползун на $\sin 10^\circ$ шкалы S.
Подводим 232 шкалы B под ползун.
Ставим ползун на 1 шкалы B.
Читаем ответ 3,73 под ползуном на A.

Если в числе множителей имеется квадратный корень, то при вычислениях возникают трудности, ибо указанные корни приходится разыскивать на шкалах C и D, а шкала синусов построена в масштабе шкал A и B. В таких случаях, прежде чем перейти к дальнейшем вычислениям, рекомендуется либо найти отдельно значение синуса, либо вычислить квадратный корень. Конечно и то и другое следует выполнять при помощи линейки.

422. Степенные множители. Если числа требуется возвысить в степень выше третьей, то приходится пользоваться логарифмической шкалой L, как это показано на нижеследующем примере.

Пример. Вычислить

$$x = (3{,}65)^{1{,}61}.$$

$$\lg x = 1{,}61 \times \lg 3{,}65 = 1{,}61 \times 0{,}5623 = 0{,}9053.$$

Против 0,905 шкалы L читаем на шкале D 8,04.

Пример. Найти $\sqrt[5]{261}$.

$$\lg x = \frac{1}{5} \lg 261 = \frac{2{,}4166}{5} = 0{,}4833.$$

Против 0,4833 шкалы L находим на шкале D число 3,04.

423. Правило для вычисления степеней. Будем рассматривать шкалы A и B как шкалы квадратов, т. е. чисел с показателем 2, шкалу K — как шкалу чисел с показателем 3, C и D — как шкалы чисел с показателем 1, CI — как шкалу чисел с показателем (—1).

Если дано

$$x = a^{\frac{n}{m}},$$

сперва представляем показатель в виде дроби. Разыскиваем число a на шкале, соответствующей показателю, который равен знаменателю. Ответ читаем против черты ползуна на той шкале, которая соответствует показателю, стоящему в числителе.

Короче говоря, следует разыскивать данное число на шкале знаменателя, а результат читать на шкале числителя.

Пусть дано

$$x = a^2 = a^{\frac{2}{1}}.$$

Число a разыскивается на шкале D, соответствующей показателю 1, которой стоит в знаменателе показателя.

Ответ читается на шкале A, соответствующей показателю 2, стоящему в числителе.

Пусть дано

$$x = \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}.$$

Необходимо подвести ползун к числу a на шкале A (соответствующей показателю 2).

Ответ читается на шкале D, соответствующей показателю 1.

Дано

$$x = \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}.$$

Ставим ползун на число a шкалы K (показатель 3).

Читаем ответ $\sqrt[3]{a}$ на шкале D (показатель 1).

Дано

$$x = \sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Ставим ползун на число a шкалы K (показатель 3) и читаем ответ на шкале A (показатель 2).

Дано

$$x=\sqrt{a^3}=a^{\frac{3}{2}}.$$

Ставим ползун на число a шкалы A.

Читаем ответ $\sqrt{a^3}$ на шкале K под ползуном.

Дано

$$x=\frac{1}{\sqrt{a}}=a^{-\frac{1}{2}}=a^{\frac{-1}{2}}.$$

Ставим ползун на число a шкалы A.

Читаем ответ $\frac{1}{\sqrt{a}}$ под ползуном на шкале CI, т. е. на шкале, соответствующей показателю (—1).

Индекс движка должен совпадать с индексом шкалы A.

Дано

$$x=\pi\sqrt{a}=\pi\times a^{\frac{1}{2}}.$$

Чтобы найти $x=\sqrt{a}$, ставим ползун на число a шкалы A и читаем ответ на шкале D.

Чтобы умножить полученный результат на π, переносим отсчет со шкалы D на DF.

Дано

$$x=\frac{1}{a^3}=a^{-3}=a^{\frac{3}{-1}}.$$

Ставим ползун на число a шкалы CI и читаем ответ на шкале K.

Дано

$$x=\frac{1}{\pi\sqrt{a}}=a^{\frac{-1}{2}}\times\frac{1}{\pi}.$$

Ставим ползун на число a шкалы A.

Читаем ответ под ползуном на CIF.

(—1) указывает на необходимость применения обратной шкалы, а отсчет результата на кратной шкале соответствует делению на π.

424. Решение прямоугольных треугольников. Согласно закону синусов, имеем:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}. \qquad [90]$$

Эта формула удобна как для решения прямоугольных, так и некоторых косоугольных треугольников.

Отношения $\frac{a}{\sin A}$, $\frac{b}{\sin B}$, $\frac{c}{\sin C}$ равны между собой; поэтому, если линейка установлена на число, соответствующее

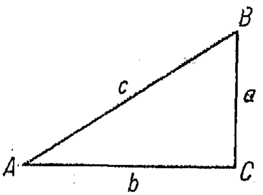


Рис. 155.

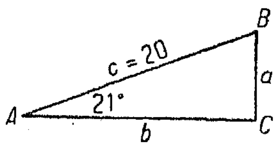


Рис. 156.

значению отношения (n^0 405), то этим самым она установлена и для остальных отношений.

Пример. Пусть

$$A = 35°30'; \ b = 15.$$

Найти a, c и B.

$$B = 90 - 35°30' = 54°30'.$$

Далее:

$$\frac{\text{шкала } A}{\text{шкала } S} = \frac{15}{\sin 51°30'} = \frac{a}{\sin 35°30'} = \frac{c}{\sin 90°}$$

$$a = 10{,}7, \quad c = 18{,}4, \quad B = 54°30'.$$

Пример. Дано:

$$A = 21°, \ c = 20.$$

$$B = 90° - 21° = 69°.$$

Шкалы

$$\frac{A}{S} = \frac{20}{\sin 90°} = \frac{a}{\sin 21°} = \frac{b}{\sin 69°}.$$

$$a = 7{,}17; \ b = 18{,}7.$$

425. Косоугольные треугольники. Для решения косоугольных треугольников удобно применять две тригонометрические формулы.

Если даны два угла и сторона или же две стороны и угол против одной из них, то следует пользоваться законом синусов **[40]**:

$$\frac{A}{S} = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{c}{\sin(A+B)}.$$

Пример. Пусть

$$a = 25,\ A = 42^\circ,\ B = 27^\circ.$$

Найти b, c и C.

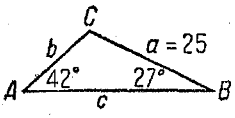


Рис. 157.

$$C = 1.0^\circ - (42^\circ + 27^\circ) = 111^\circ.$$

$$\frac{A}{S} = \frac{25}{\sin 42^\circ} = \frac{b}{\sin 27^\circ} = \frac{c}{\sin 111^\circ}$$

$$\frac{A}{S} = \frac{25}{\sin 42^\circ} = \frac{b}{\sin 27^\circ} = \frac{c}{\sin 69^\circ}.$$

$$b = 17{,}0;\ c = 35{,}0.$$

426. Если даны две стороны и угол, заключенный между ними, который больше 90°, то следует применять формулу

$$[91] \qquad \frac{T}{D} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)}{(a+b)} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)}{(a-b)}$$

и закон синусов.

Пример. Дано:

$$C = 116^\circ,\ b = 21,\ a = 51.$$

Найти A, B и c.

Применим указанную формулу [91]:

$$\frac{1}{2}(A+B) = \frac{180^\circ - 116^\circ}{2} = 32^\circ.$$

$$a + b = 72$$

$$a - b = 30.$$

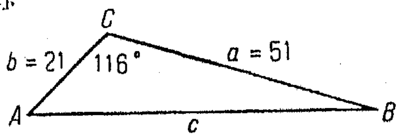


Рис. 153.

Подставляя, имеем:

$$\frac{\operatorname{tg} 32^\circ}{72} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)}{30}.$$

$$\frac{1}{2}(A+B) = 32^\circ$$

$$\frac{1}{2}(A-B) = 14^\circ 3'$$

$$A = 46^\circ 3'$$

$$B = 32^\circ - 14^\circ 3' = 17^\circ 57'.$$

Из формулы

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \qquad [90]$$

имеем:

$$\frac{A}{S} = \frac{51}{\sin 46^\circ 3'} = \frac{c}{\sin 116^\circ}.$$

$$c = 63{,}8.$$

427. Если даны две стороны и угол, заключенный между ними, который меньше 90°, то $\frac{1}{2}(A+B)$ больше 45°, так что соответствующий тангенс на линейке отсутствует.

Пользуясь формулой

$$\operatorname{tg} A = \frac{1}{\operatorname{tg}(90^\circ - A)},$$

придаем формуле [91] такой вид:

$$[92] \qquad \frac{1}{(a+b)\left[\operatorname{tg} 90^\circ - \frac{1}{2}(A+B)\right]} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)}{(a-b)},$$

которой следует пользоваться вместе с

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}. \qquad [90]$$

Пример. Дано

$C = 80^\circ$, $a = 130$, $b = 100$.

Найти A, B и c.

$$a + b = 230$$
$$a - b = 30$$

$$\frac{1}{2}(A+B) = \frac{180^\circ - 80^\circ}{2} = 50^\circ.$$

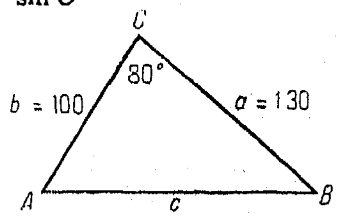


Рис. 15[illegible].

Из [92]

$$\frac{1}{230 \times \operatorname{tg} 40^\circ} = \frac{1}{193} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)}{30}$$

$$\frac{1}{2}(A-B) = 8^\circ 50'$$

$$\frac{1}{2}(A+B) = 50^\circ$$
$$\frac{1}{2}(A-B) = 8^\circ 50'$$

$$A = 58^\circ 50'$$
$$B = 50^\circ - 8^\circ 50' = 41^\circ 10'.$$

Из [90]

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{130}{\sin 58^\circ 50'}=\frac{c}{\sin 80^\circ}$$

$$c=151.$$

428. Способы введения поправок при вычислении на счетной линейке. Если одно из двух чисел слишком велико для того, чтобы разыскать его на линейке, то его можно разбить на две части и каждую из них умножить на второе число посредством одной установки линейки. Сложение двух произведений увеличивает точность результата, которая оказывается выше точности обычных вычислений на линейке, при этом тратится столько же времени. Выражая сказанное в алгебраической форме, имеем:

$$(a+b)\,c=ac+bc.$$

Пример. Умножить 527,85 на 3,14. Число 527,85 нельзя найти на линейке поэтому представим его так:

$$(527+0{,}85)\,3{,}14=527\times 3{,}14+0{,}85\times 3{,}14.$$

Ставим меньшее число 3,14 на неподвижной шкале D и подводим к нему индекс движка. Произведения $527\times 3{,}14$ и $0{,}85\times 3{,}14$ можно найти простым передвижением ползуна, причем в главную часть ответа вносится поправка при добавлении второго произведения, или

$$1655+2=1657{,}00.$$

Правило. *В каждом числе следует брать три значащих цифры. Четвертая значащая цифра является сомнительной. Все цифры за четвертой — отбрасываются.*

429. Если оба числа таковы, что не могут быть найдены на линейке, то ход действий может быть алгебраически пояснен так

$$(a+b)\;(c+d)=(a+b)\,c+(a+b)\,d.$$

Таким образом потребуется два таких действия, какие были описаны в предыдущем n^0.

Пример. Умножить 45 681 на 38 266, пользуясь 20″ линейкой. Имеем:

$$(45\,600+81)\;38\,200+(45\,600+81)\;66.$$

Индекс поставлен на 382	1 742 000 000
„ на шкале D	3 000 000
Индекс на 66 шкалы D	3 000 000
	1 748 000 000

В действительности произведение равно 1 748 029 146.

Если бы мы производили умножение на обычной линейке, то получили бы:

1 750 000 000.

Глава XVIII.

БЕСКОНЕЧНЫЕ РЯДЫ.

430. Бесконечные ряды. В n^0 298 и в следующих за ним мы видели, что ряд есть совокупность членов, образованных по определенному закону. Ряды, о которых шла там речь, имели конечное число членов, для суммы которых мы и вывели формулы.

Теперь мы рассмотрим ряды, где число членов неограниченно. Такие ряды называются *бесконечными.*

431. В n^0 313 было доказано, что сумма n членов геометрической прогрессии S_n приближается к предельному значению, если r — знаменатель прогрессии — по численной величине меньше единицы и число членов неограниченно возрастает. Таким образом, взяв достаточно большое число членов геометрической прогрессии, можно сделать разность между их суммой S_n и ее предельным значением как угодно малой.

В случае арифметической прогрессии, как это также было показано, такого предельного значения для суммы ее членов S_n не существует, и по мере возрастания числа членов последняя может возрастать или убывать беспредельно.

432. Если $u_1, u_2, u_3 \ldots$ представляют собой совокупность положительных, отрицательных или вместе тех и других количеств, образующих ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots,$$

то мы обозначаем сумму первых n членов символом S_n:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n.$$

Если n возрастает беспредельно, то могут быть два случая.

Случай 1. S_n приближается к конечной величине как к пределу.

Случай 2. S_n к пределу не приближается.

В первом случае мы будем обозначать предел, к которому стремится S_n, буквой S, или символически

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S,$$

и будем называть такой ряд сходящимся. Этот вид рядов наиболее часто встречается в практических приложениях.

433. Расходящиеся ряды. Во втором случае ряд называется *расходящимся.* Здесь можно различать два класса рядов:

1. Расходящимися рядами являются такие ряды, в которых абсолютная величина S_n по мере увеличения числа членов безгранично возрастает.

2. Колеблющимися рядами называются такие ряды, в которых S_n не обращается в бесконечность при увеличении n, но и не стремится к определенному пределу.

Величина S_n колеблется, например, в случае ряда

$$S_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n-1}.$$

Здесь S_n равно либо нулю, либо единице в зависимости от того, является ли n четным или нечетным числом.

Пример сходящихся рядов. Рассмотрим геометрическую прогрессию

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

Положим $a = 1$, $r = \frac{1}{2}$; тогда ряд примет вид

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots$$

$$S_n = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

При увеличении n до бесконечности $\frac{1}{2^{n-1}}$ стремится к 0:

$$\lim_{n \to 0} S_n = 2.$$

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}.$$

Очевидно, что по мере возрастания n S_n может быть сделано как угодно близким к 2, т. е. оно может отличаться от 2 на сколь угодно малую величину.

Пример расходящихся рядов. Рассмотрим арифметический ряд:

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n}{2}(1 + n).$$

$$S_1 = 1$$
$$S_2 = 1 + 2 = 3$$
$$S_3 = 1 + 2 + 3 = 6$$
$$S_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10.$$

Очевидно, что, при безграничном увеличении n, сумма членов также возрастает безгранично и ряд является расходящимся.

434. Иногда бесконечный ряд характеризуют n-ым или, как его называют, общим членом. В ряде

$$\frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \ldots + \frac{n+1}{n} + \ldots$$

общий или n-й член

$$u_n = \frac{n+1}{n}.$$

Предел суммы первых n членов сходящегося ряда обозначают так:

$$\lim_{n \to 0} S_n = S$$

и называют суммой ряда.

435. Характер бесконечного ряда не изменится от добавления или удаления конечного числа членов, т. е. ряд останется сходящимся или расходящимся независимо от того, увеличим ли мы или уменьшим число его членов на конечное количество их. Однако предел, к которому стремится сходящийся ряд, вообще говоря, от этого изменится.

Встречаются ряды, для которых нельзя найти сумму их членов так, как мы это делали в случае геометрической прогрессии, и мы не сможем определить численного значения предела; однако при действиях над рядами всегда необходимо знать, существует ли вообще у данного ряда сумма.

Для выяснения вопроса, является ли ряд сходящимся, его нужно исследовать, пользуясь следующими теоремами.

436. Если, при беспредельном возрастании n, S_n постоянно возрастает, оставаясь все время меньше некоторого определенного числа K, то S_n приближается к пределу, величина которого не более K.

437. Если, при беспредельном возрастании n, S_n постоянно убывает, оставаясь все время больше некоторого определенного числа K, то S_n приближается к пределу, величина которого не меньше K.

438. Ряды, состоящие только из положительных членов. Ряд, все члены которого—положительные, не может быть колеблющимся. S_n в таких рядах всегда возрастает, и если можно доказать, что эта сумма всегда меньше некоторого конечного числа, то ряд должен быть сходящимся (n^0 436). На этом принципе основан следующий способ испытания рядов на сходимость.

439. Определение сходимости путем сравнения. Пусть ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \tag{1}$$

состоит только из положительных членов, и мы хотим определить, является ли он сходящимся. Пусть, кроме того, известно, что ряд

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots \tag{2}$$

является сходящимся. Тогда, если каждый член (1) меньше соответствующего члена (2), то ряд (1) — сходящийся, причем его сумма не может быть больше суммы ряда (2).

Пример. Доказать, что ряд

$$2 + 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^{n-1}} + \ldots \tag{1}$$

сходящийся.

Сравним его с геометрической прогрессией

$$2 + 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots \tag{2}$$

Производя сравнение (1) со (2), мы видим, что, начиная с третьего члена, каждый последующий член ряда (1) меньше соответствующего ряда (2). После сравнения нескольких членов, мы должны сравнить между собой и n-ые члены (1) и (2).

Если $n > 3$,

$$\frac{1}{(n-1)^{n-1}} < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

В ряде (2) сумма членов, следующих за третьим, не может превысить $\frac{1}{4}$, так как ряд стремится к $3\frac{1}{2}$. Сумма тех же членов в ряде (1) меньше, чем во (2). Поэтому ряд (1) является сходящимся и его сумма меньше $3\frac{1}{2}$.

440. Некоторые ряды, полезные для исследования сходимости. Можно доказать, что следующие ряды являются сходящимися:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots\ ^{1)},$$

где $-1 < r < 1$;

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots\ ^{2)},$$

---

1) Убедиться в сходимости ряда при $-1 < r < 1$

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$$

можно, рассматривая сумму первых n членов ряда

$$S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} = \frac{a - ar^n}{1 - r}.$$

Эта сумма состоит из двух членов:

$$S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}.$$

В то время, как первый член остается постоянным, второй стремится к нулю, ибо $r^n \to 0$ при беспредельном возрастании n, если $-1 < r < 1$.

Сумма первых n членов ряда S_n стремится к $\frac{a}{1-r}$, и эта последняя величина есть сумма данного ряда.

Прим. ред.

2) Сходимость ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

можно установить так:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$

или

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$

откуда получаем

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

При беспредельном возрастании n сумма S_n стремится к единице. Ряд сходится и сумма его равна 1.

Прим. ред.

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots$$ [3]),

где $p>1$.

441. Определение расходимости путем сравнения. Пусть ряд

$$u_1+u_2+u_3+u_4+\ldots+u_n+\ldots \qquad (1)$$

должен быть испытан, не является ли он расходящимся; пусть, кроме того, мы имеем еще и другой ряд (2), состоящий только из положительных членов, причем заведомо известно, что он — расходящийся:

$$v_1+v_2+v_3+v_4+\ldots+v_n+\ldots \qquad (2)$$

Если члены ряда (2) не больше соответствующих членов ряда (1), то ряд (1) — расходящийся.

Наиболее важным для испытания на расходимость является гармонический ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

---

[3]) В сходимости ряда

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots$$

при $p>1$ можно убедиться из следующих простых соображений. Члены рассматриваемого ряда остаются меньше соответствующих членов ряда

$$1+\overbrace{\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}}^{\text{2 члена}}+\overbrace{\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}}^{\text{4 члена}}+\overbrace{\frac{1}{8^p}+\ldots+\frac{1}{8^p}}^{\text{8 членов}}\ldots.$$

Этот последний ряд можно представить в виде

$$1+\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{4^{p-1}}+\frac{1}{8^{p-1}}+\ldots$$

сложив равные члены.

Последний ряд есть геометрическая прогрессия

$$1+\frac{1}{2^{p-1}}+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3+\ldots$$

со знаменателем $\frac{1}{2^{p-1}}$, который <1, если $p>1$.

Так как последний ряд сходится, то сходится и данный ряд.

Прим. ред.

Можно доказать расходимость этого ряда следующим образом:

Сгруппируем его члены так, чтобы сумма их в каждой группе была больше $\frac{1}{2}$, т. е.

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots$$

В первой группе будет два члена, во второй — четыре, в третьей — восемь и т. д.

В первой группе $\frac{1}{3}>\frac{1}{4}$ и сумма этих членов больше, чем $\frac{1}{4}$, взятая два раза, т. е. $\frac{1}{4}\times 2=\frac{1}{2}$. Во второй группе сумма ее членов больше, чем $\frac{1}{8}$, взятая четыре раза, т. е. $\frac{1}{8}\times 4=\frac{1}{2}$. Таким образом мы можем составить бесконечное множество групп, причем сумма членов в каждой из них будет больше $\frac{1}{2}$.

Если же взять n достаточно большим, то сумма членов всего ряда может быть сделана как угодно велика, т. е. она может сделаться больше как угодно большого заранее заданного числа. Следовательно наш ряд — расходящийся.

Пример. Выяснить расходимость ряда

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots \qquad (1)$$

Сравним ряд (1) с гармоническим рядом

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots \qquad (2)$$

Так как знаменатель каждого члена ряда (1) меньше знаменателя соответствующего члена ряда (2), то ряд (1) — расходящийся.

442. Для испытания рядов на расходимость весьма важными являются следующие ряды:

Геометрический ряд

$$a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+\ldots+ar^{n-1}+\ldots,$$

где $r\geqslant 1$.

Гармонический ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

Весьма полезно иметь для справок список всех рядов, о которых удалось выяснить, являются ли они сходящимися или расходящимися.

443. Исследование ряда при помощи отношения $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Отношение $(n+1)$-го члена ряда к n-ому члену называется критическим отношением или *отношением сходимости*. Путем исследования отношения $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ обыкновенно можно определить характер ряда и его изменение при беспредельном увеличении числа членов n. Для геометрического ряда это отношение имеет постоянную величину независимо от числа членов n, как это было показано в n^0 313 (где предел суммы был получен из прямолинейного графика).

Рассмотрим ряд

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+u_{n+1}+\ldots,$$

члены которого могут быть все положительными или отрицательными, а также могут иметь и разные знаки. Возьмем отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ и будем увеличивать n беспредельно.

Абсолютная величина отношения $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ при беспредельном возрастании n в большинстве случаев стремится к определенному пределу или беспредельно возрастает. Назовем такой предел, если он вообще существует, буквой p. Если

$p<1$, ряд сходящийся.

$p>1$, ряд расходящийся,

$p=1$ не дает никаких указаний относительно того, является ли ряд сходящимся или расходящимся.

Пример 1. Определить при помощи отношения $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ характер ряда

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\ldots$$

$$u_{n+1}=\frac{n+1}{2^{n+1}},\quad u_n=\frac{n}{2^n}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n}=\frac{n+1}{2n}=\frac{n}{2n}+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2}<1$, следовательно данный ряд сходящийся.

Пример 2. Определить, является ли сходящимся ряд

$$\frac{2}{2^2}+\frac{2^2}{3^2}+\frac{2^3}{4^2}+\frac{2^4}{5^2}+\ldots+\frac{2^n}{(n+1)^2}+\ldots$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2^{n+1}}{(n+2)^2}\cdot\frac{(n+1)^2}{2^n}=2\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=2;$$

$2>1$, следовательно данный ряд расходящийся.

444. Вывод признака сходимости Коши [1]. Рассмотрим ряд, состоящий из положительных членов

$$u_1+u_2+u_3+u_4+\ldots$$

Испытаем данный ряд на сходимость.

Разделив общий член ряда на предшествующий ему член, получим известное отношение

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Величина этого отношения, вообще говоря, будет стремиться к некоторому пределу при безграничном увеличении n. Если указанное отношение не стремится к некоторому определенному пределу, то при помощи рассматриваемого способа нельзя решить вопрос о сходимости ряда.

---

[1] Признак сходимости, приписываемый автором Коши, был установлен Даламбером и по этой причине обычно называется *признаком Даламбера*.
Прим. ред.

Пусть при безграничном возрастании n отношение стремится к некоторому определенному пределу, который мы обозначим буквой p:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = p.$$

Величина p может быть меньше единицы, более ее или равна ей, т. е. $p < 1$, $p > 1$ или $p = 1$.

445. Случай 1. Если при возрастании n предел отношения $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, равный p, меньше 1, то величина самого отношения может отличаться от p на сколь угодно малое число. Можно выбрать такое число r, лежащее между p и 1, которое будет больше любого из значений нашего отношения $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, получающихся для последовательных n, начиная с некоторого значения этого n, например для $n = m$, а также и для любой величины $n > m$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < r.$$

Таким образом

$n = m$	$\frac{u_{m+1}}{u_m} < r,$	$u_{m+1} < u_m \cdot r,$
$n = m+1,$	$\frac{u_{m+2}}{u_{m+1}} < r,$	$u_{m+2} < u_{m+1} \cdot r < u_m \cdot r^2,$
$n = m+2,$	$\frac{u_{m+3}}{u_{m+2}} < r,$	$u_{m+3} < u_{m+2} \cdot r < u_m \cdot r^3,$
$n = m+3,$	$\frac{u_{m+4}}{u_{m+3}} < r,$	$u_{m+4} < u_{m+3} \cdot r < u_m \cdot r^4.$

Складывая p таких неравенств, получаем:

$$u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + u_{m+4} + \ldots + u_{m+p} <$$
$$< u_m (r + r^2 + r^3 + r^4 + \ldots + r^p).$$

Очевидно, что члены, заключенные в скобки, составляют геометрическую прогрессию, в которой $r < 1$; такая прогрессия, как было доказано, представляет собою сходящийся ряд, причем сумма членов его постоянно будет меньше, чем

$$u_m \frac{r}{1-r}.$$

Следовательно, сумма членов ряда

$$u_{m+1}+u_{m+2}+u_{m+3}+u_{m+4}+\ldots+u_{m+p}$$

никогда не будет больше величины

$$u_m \frac{r}{1-r},$$

которая является конечным определенным числом.

Поэтому этот ряд (u) — сходящийся.

446. Случай 2. $p>1$. Такой ряд можно исследовать таким же образом, как и предыдущий, где $p<1$. В этом случае однако r больше 1, в результате чего данный геометрический ряд будет расходящимся.

447. Случай 3. Для того чтобы доказать непригодность разобранного способа для случая, когда $p=1$, необходимо рассмотреть следующий ряд:

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots \qquad (1)$$

Положим $p>1$.

Группируя члены, имеем

$$\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}<\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}=\frac{2}{2^p}=\frac{1}{2^{p-1}}$$

$$\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}<\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}=\frac{4}{4^p}=\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2$$

$$\frac{1}{8^p}+\ldots+\frac{1}{15^p}<\frac{1}{8^p}+\frac{1}{8^p}+\frac{1}{8^p}+\frac{1}{8^p}+\frac{1}{8^p}+\frac{1}{8^p}+\frac{1}{8^p}+$$

$$+\frac{1}{8^p}=\frac{8}{8^p}=\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3.$$

Продолжая далее группировку указанным образом и составляя ряд из правых членов неравенств, получим

$$1+\frac{1}{2^{p-1}}+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2+$$
$$+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{n+1}+\ldots \qquad (2)$$

При $p>1$ ряд (2) является геометрической прогрессией со знаменателем, меньшим единицы, а мы уже видели, что такой ряд — сходящийся. Сумма членов ряда (1) меньше суммы ряда (2), как это видно из приведенных выше неравенств, следовательно ряд (1) — сходящийся.

При $p=1$ ряд (1) превращается в гармонический ряд, который, как мы уже доказали, является расходящимся рядом.

При $p<1$ каждый член ряда (1) будет больше соответствующего члена гармонического ряда, а следовательно ряд (1) — расходящийся.

448. Возвратимся теперь к рассмотрению признака сходимости и к доказательству его непригодности для определения характера ряда в случае, если предел этого отношения p равен единице. Рассмотрим ряд (1):

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\ \ldots\ +\frac{1}{n^p}+\frac{1}{(n+1)^p}+\ldots$$

Составим отношение

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^p=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-p}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-p}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=p=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-p}=(1)^{-p}$$

Отсюда видно, что для взятого ряда, независимо от значения p, $p=1$. Однако мы доказали выше, что при $p>1$ ряд сходящийся, а при $p<1$ ряд расходящийся. А так как p $\left(\text{предел отношения } \frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ может быть равным единице как для сходящегося, так и для расходящегося ряда, то отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ при $p=1$ непригодно для определения сходимости ряда.

449. Для того чтобы ряд, состоящий только из положительных членов, был бы сходящимся, условие, заключающееся в том, что отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ делалось и оставалось бы меньше единицы для всех значений n, вовсе не является достаточным. Так например, для гармонического ряда это условие выполнено, а все-таки этот ряд расходящийся.

Предел указанного отношения должен быть *меньше* единицы, в то время как для гармонического ряда он *равен* единице; признак оказывается, как мы видели только что, неприложимым.

450. Ряды, все члены которых отрицательны. Теоремы, доказанные нами для случая рядов с положительными членами, можно с некоторыми видоизменениями приложить и к рядам с отрицательными членами. При этом при доказательстве следует исходить из теоремы n^0 437, а не n^0 436, как мы делали ранее.

451. Ряды, состоящие из положительных и отрицательных членов. Если число отрицательных членов конечно, то их можно отбросить и испытывать сходимость рядов, как это сделано в предыдущих n^0. Если число положительных членов конечно, то следует отбросить их и рассматривать ряд только с отрицательными членами. Очевидно, что такое отбрасывание членов влияет на величину суммы, но факта существования предела суммы изменить не может, поэтому если предел существует, то ряд является сходящимся, хотя величина его суммы будет уже другая.

Если в ряде имеется бесконечно большое число членов как положительных, так и отрицательных, то можно исследовать его, применяя при этом следующую теорему:

Ряд, состоящий из бесконечно большого числа как положительных, так и отрицательных членов, является сходящимся, если другой ряд, составленный из абсолютных значений всех членов первого ряда, сходится.

Предположим, что данный ряд имеет вид

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \tag{1}$$

и что ряд, полученный из данного путем сложения абсолютных значений его членов, есть

$$[u_1] + [u_2] + [u_3] + \ldots \tag{2}$$

Ряд (2) — сходящийся. Сумма его членов S_n приближается к некоторому пределу. Пусть это число будет S. Тогда

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S.$$

Однако, сумма членов первоначального ряда (1) по абсолютной величине всегда меньше чем S, так как сумма, полученная в результате сложения одних положительных членов, меньше чем S.

Предположмм, что из n первых членов ряда (1) p — положительны и q — отрицательны. Тогда

$$S_n\,[\text{во }(2)] = P_p + N_q,$$

где P_p — сумма p положительных членов, а N_q — сумма q — отрицательных. С другой стороны

$$S_n\,[\text{в }(1)] = P_p - N_q.$$

Так как (2) — сходящийся, то его сумма никогда не может превосходить S, а так как и P_p и N_q — положительны, и их сумма не превосходит S, то P_p приближается к пределу P, а N_q — к пределу N, и ясно, что

$$\lim_{n \to \infty} S_n\,[\text{из }(1)] = P - N = \text{определенному конечному числу.}$$

Поэтому ряд (1), согласно определению, является сходящимся. Ряды этого вида, которые оказываются сходящимися не только сами по себе, но абсолютные величины членов которых образуют сходящиеся ряды, называются *абсолютно сходящимися.*

Ряды, содержащие положительные и отрицательные члены, могут быть иногда сходящимися и в том случае, когда абсолютные величины их членов образуют ряд несходящийся. Ряды такого вида называются *условно сходящимися.*

452. Способ определения характера ряда по величине отношения членов (см. 443 и след.) может быть применен к рядам с положительными и отрицательными членами следующим образом:

Ряд:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

(u_n или положительный или отрицательный) будет сходящимся, если

$$\lim_{n \to \infty}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) < 1,$$

что следует непосредственно из n°451.

Ряд будет расходящимся, если

$$\lim_{n \to \infty}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) > 1.$$

В случае, если предел отношения больше единицы, u_n не может приближаться к пределу, равному нулю, и следовательно ряд не может быть сходящимся, так как основным условием для сходимости является стремление u_n к нулю.

Способ неприменим, если

$$\lim_{n \to \infty}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = 1.$$

Доказательство этого положения аналогично приведенному в n°448.

453. Ряды знакопеременные. Так называются ряды, члены которых попеременно положительны и отрицательны. Теоремы, выведенные для случаев рядов с положительными и отрицательными членами, конечно применимы и в данном случае.

Кроме того, для знакопеременных рядов имеем следующую теорему:

Если $u_1, u_2, u_3 \ldots$ положительные члены знакопеременного ряда

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - u_6 + \ldots + (-1)^{n-1} u_n + \ldots,$$

причем каждый из них по абсолютной величине меньше предшествующего, и если

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0,$$

то ряд — сходящийся.

Сумма $2n$ (четное число) членов ряда равна

$$S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + (u_5 - u_6) + \ldots + (u_{2n-1} - u_{2n}) \quad (1)$$

или

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots - u_{2n}. \quad (2)$$

Величины, стоящие в скобках, все положительны, каждый член по абсолютной величине меньше предыдущего, поэтому величина S_{2n} является положительной и увеличивается с возрастанием n.

Кроме того, из (2) мы видим, что S_{2n} всегда меньше u_1 [1]).

Сумма нечетных членов ряда

$$S_{2n+1}=S_{2n}+u_{2n+1}\ldots$$

Отсюда $\lim S_{2n+1}=\lim S_{2n}+\lim u_{2n+1}$. Но предел u_{2n+1} есть нуль по условию. Следовательно S_{2n+1} имеет тот же предел, что и S_{2n}. Поэтому сумма любого числа членов, четного или нечетного, имеет один и тот же предел.

Пример. Ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+.$$

является сходящимся, так как каждый его член по абсолютной величине меньше предыдущего и

$$\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=0.$$

Если рассматривать только положительные значения членов, то ряд — расходящийся, так как в таком случае он — гармонический. Таким образом этот ряд — условно сходящийся. Ряд

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^5}\ldots+(-1)\frac{1}{n^n}+\ldots$$

является абсолютно сходящимся, так как ряд

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+\ldots+\frac{1}{n^n}\text{ — сходящийся.}$$

454. Указания для исследования рядов. Положим, что мы имеем ряд:

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots,$$

который желаем исследовать на сходимость. Если ряд знако переменный, в котором каждый член по абсолютной величине меньше предыдущего и

$$\lim_{n\to\infty} u_n=0$$

то ряд сходящийся.

---

[1]) Из сопоставления того обстоятельства, что S_{2n} все время возрастает при возрастании n, с тем, что S_{2n} остается меньше u_1, следует, что S_{2n} имеет предел.

Прим. ред.

Если ряд не знакопеременный и удовлетворяет этим условиям, то выясним законы образования его членов, составим отношение $u_{n+1} : u_n$ и найдем

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \rho.$$

Если $\rho < 1$ (по абсолютной величине), то ряд — сходящийся.

Если $\rho > 1$ (по абсолютной величине), то ряд расходящийся.

Если $\rho = 1$, то способ не годится и ряд следует сравнить с каким-либо заведомо сходящимся, например:

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots, \text{ где } r < 1$$

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots, \text{ где } p > 1.$$

Если есть основания предполагать, что ряд — расходящийся, то следует сравнить его с заведомо расходящимся рядом, например

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots, \text{где } r > 1$$

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots, \text{где } p < 1,$$

455. Ряды, члены которых являются функциями x. Часто встречаются ряды, члены которых являются функциями какой-нибудь переменной x. Такие ряды, как мы покажем далее, имеют большое практическое значение.

456. Степенной ряд. Простейший и наиболее важный из рядов этого типа есть степенной ряд имеющий вид:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

Здесь коэффициенты a_0, a_1, a_2, и т. д. не зависят от x. Из дальнейшего будет видно, что такие ряды имеют в анализе большое значение. Степенной ряд является сходящимся при одних значениях x и расходящимся — при других. Определение значений x, при которых ряд сходится, может быть сделано лишь путем его исследования.

Если по данному ряду составим отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ и заметим, как изменяется это отношение при вырастании n до бесконечности, то сможем определить интервал сходимости, т. е. те предельные значения x, между которыми ряд сходится.

Если отношение приближается к какому-нибудь определенному конечному числу как к пределу, или другими словами, если соотношение между коэффициентами таково, что

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = r,$$

то при

$$|x| < \left| \frac{1}{r} \right| \text{ ряд — сходящийся,}$$

при

$$|x| > \left| \frac{1}{r} \right| \text{ ряд — расходящийся.}$$

Если $|x| = \left| \frac{1}{r} \right|$, то о сходимости ряда ничего сказать нельзя.

Если $r = 0$, то ряд сходится при любых значениях x.

В случае степенного ряда, сходящегося при $x = b$, он является сходящимся для любого значения x, численно меньшего, чем b, т. е. для $-b < x < b$.

Пример:

$$\frac{x}{2} + \frac{2^2x^3}{2^2} + \frac{3^2x^3}{2^3} + \frac{4^2x^4}{2^4} + \ldots$$

$$a_n = \frac{n^2}{2^n}; \qquad a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{2n^2}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{(n+1)^2}{2n^2} \right) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^2}{2n^2} + \frac{2n}{2n^2} + \frac{1}{2n^2} \right) = \frac{1}{2}.$$

Данный ряд является сходящимся при всех значениях x, численно меньших 2:

$$|x| < \left| \frac{1}{r} \right| \text{ или } |x| < 2.$$

457. Биномиальный ряд. В n⁰ 84 и следующих за ним мы показали разложение бинома. Разлагая согласно этому методу выражение $(1+x)^n$, получим:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \ldots,$$

где n может быть целым, дробным, положительным или отрицательным.

Если мы имеем $(a+x)^n$, то выражение примет вид:

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}x^2 + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{n-3}x^3 + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}a^{n-4}x^4 + \ldots$$

Всякий такой ряд, состоящий из бесконечно большого числа членов и полученный для дробных или для отрицательных значений n, будет сходящимся, если x по численной величине меньше чем a. Поэтому сумма членов ряда может быть найдена с любой степенью точности.

Если x численно больше чем a, то ряд — расходящийся, но в этом случае величина $(a+x)^n$ может быть найдена с любой степенью точности посредством разложения бинома $(x+a)^n$, так как разложение последнего даст сходящийся ряд.

Рассмотрим выражение:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \ldots$$

$$a_{n+1} = \frac{m(m-1)(m-2)\ \ldots\ (m-n)}{1 \cdot 2 \cdot 3\ \ldots\ n+1}$$

$$a_n = \frac{m(m-1)(m-2)\ \ldots\ (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3\ \ldots\ n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{m-n}{n+1}$$

$$\lim_{n \to \infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n \to \infty}\left(\frac{m-n}{n+1}\right) = \lim_{n \to \infty}\frac{\frac{m}{n}-1}{1+\frac{1}{n}} = -1.$$

Ряд сходится, так как $-1 < x < 1$.

458. При разложении бинома $(a+x)^n$ его можно написать в виде (n⁰ 123):

$$a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n.$$

Разлагая, имеем

$$a^m\left(1+\frac{x}{a}\right)^m = a^m\left(1+m\frac{x}{a}+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\ \dots\ \right).$$

Ряд сходится, если

$$\left|\frac{x}{a}\right| < 1$$

Интервал сходимости есть промежуток от $-a$ до $+a$.

Пример 1. Разложить $(1-x)^{0,1}$ (см. n⁰ 87).
Имеем:

$$c_1 = \frac{\frac{1}{10}}{1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

$$c_2 = c_1 \times \frac{\frac{-9}{10}}{2} = 0{,}1\left(-\frac{9}{20}\right) = -0{,}045$$

$$c_3 = c_2\frac{\frac{-19}{10}}{3} = -0{,}045 \times \frac{-19}{30} = 0{,}0285.$$

Разлагая, получим:

$$(1-x)^{0,1} = 1 - 0{,}1x + 0{,}045x^2 - 0{,}0285x^3 + \ \dots \text{ и т. д.}$$

Пример 2. Разложить $(1-3x)^{-3}$. Находим коэффициенты:

$$c_1 = \frac{-3}{1} = -3$$

$$c_2 = c_1\cdot\frac{-4}{2} = -3\times -2 = +6$$

$$c_3 = c_2\cdot\frac{-5}{3} = 6\times\frac{-5}{3} = -10$$

$$c_4 = c_3\cdot\frac{-6}{4} = -10\times\frac{-3}{2} = 15.$$

Разлагая, имеем:

$$(1-3x)^{-3} = [1+(-3x)]^{-3} = 1+(-3)(-3x)+$$
$$+6(-3x)^2+(-10)(-3x)^3+15(-3x)^4+\ \dots =$$
$$= 1+9x+54x^2+270x^3+1215x^4+\ \dots$$

Пример 3. Найти первые пять членов разложения бинома $(1+x)^{-\frac{3}{4}}$.

$$c_1 = \frac{-3}{4}$$

$$c_2 = c_1 \times \frac{\frac{-7}{4}}{2} = \frac{-3}{4} \times \frac{-7}{8} = \frac{21}{32}$$

$$c_3 = c_2 \times \frac{\frac{-11}{4}}{3} = \frac{21}{32} \times \frac{-11}{12} = \frac{-77}{128}$$

$$c_4 = c_3 \times \frac{\frac{-15}{4}}{4} = \frac{-77}{128} \times \frac{-15}{16} = \frac{1155}{2048}.$$

Таким образом

$$(1+x)^{-\frac{3}{4}} = 1 - \frac{3}{4}x + \frac{21}{32}x^2 - \frac{77}{128}x^3 + \frac{1155}{2048}x^4 + \ldots$$

Заметим, что нечетные степени x имеют отрицательные коэффициенты.

459. Некоторые биномиальные ряды.

[93] $(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \ldots$ сходящийся, если $x^2 < 1$.

[94] $(1 \pm x)^{-n} = 1 \mp nx + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}x^2 \mp \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \ldots$ сходящийся, если $x^2 < 1$.

[95] $(a - bx)^{-1} = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2} + \frac{b^3x^3}{a^3} + \frac{b^4x^4}{a^4} + \ldots\right)$, сходящийся, если $b^2x^2 < a^2$.

[96] $(1 \pm x)^{-1} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + x^4 \mp x^5 + x^6 \mp x^7 + \ldots$ сходящийся, если $x^2 < 1$.

[97] $(1 \pm x)^{-2} = 1 \mp 2x + 3x^2 \mp 4x^3 + 5x^4 \mp 6x^5 + \ldots$ сходящийся, если $x^2 < 1$.

[98] $$(1 \pm x)^{\frac{1}{2}} = 1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}x^2 \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6}x^3 - \\ - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{5}{8}x^4 \pm \ldots$$

сходящийся, если $x^2 < 1$.

[99] $$(1\pm x)^{-\frac{1}{2}}=1\mp\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x^2\mp\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}x^3+$$
$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}x^4\mp\ldots$$

сходящийся, если $x^2<1$.

[100] $$(1\pm x)^{\frac{1}{3}}=1\pm\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{6}x^2\pm\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{5}{9}x^3-$$
$$-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{8}{12}x^4\pm\ldots$$

ходящийся, если $x^2<1$.

[101] $$(1\pm x)^{-\frac{1}{3}}=1\mp\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6}x^2\mp\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{7}{9}x^3+$$
$$+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{10}{12}x^4\mp\ldots$$

сходящийся, если $x^2<1$.

460. Полагая в выражении $\left(1+\frac{b}{a}\right)^n$ величину $\frac{b}{a}$ равной x (n⁰ 123), получим $(1+x)^n$. Рассматривая абсолютные значения x, меньшие единицы, найдем

$$(1+x)^n=1+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ldots$$

Отсюда можно получить некоторые важные формулы:

[102] $$\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+$$

[103] $$\frac{1}{1-x}=(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+\ldots$$

[104] $$\sqrt{(1+x)^3}=(1+x)^{\frac{3}{2}}=1+\frac{3x}{2}+\frac{3x^2}{8}-\frac{x^3}{16}+\ldots$$

[105] $$\sqrt{(1-x)^3}=(1-x)^{\frac{3}{2}}=1-\frac{3x}{2}+\frac{3x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+\ldots$$

[106] $$\frac{1}{\sqrt{(1+x)^3}}=(1+x)^{-\frac{3}{2}}=1-\frac{3x}{2}+\frac{15x^2}{8}-\frac{35x^3}{16}+\ldots$$

[107] $$\frac{1}{\sqrt{(1-x)^3}}=(1-x)^{-\frac{3}{2}}=1+\frac{3x}{2}+\frac{15x^2}{8}+\frac{35x^3}{16}+\ldots$$

Заметим, что для $\sqrt{(1-x)}$ нечетные степени x имеют знаки, противоположные знакам соответствующих членов разложения $\sqrt{(1+x)}$.

Приближенные формулы, получаемые из биномиальных рядов.

461. Если a представляет собой величину малую по сравнению с 1, и n — тоже величина сравнительно малая, и например находится между -2 и $+2$, то члены разложения $(1+a)^n$ быстро уменьшаются.

Для первого приближения имеем:

[108] $(1+a)^n \approx 1+na$

[109] $(1-a)^n \approx 1-na$

[110] $(1+a)^{-n} \approx 1-na$

[111] $(1-a)^{-n} \approx 1+na$.

Если требуется большая точность, то получим:

[112] $(1+a)^n \approx 1+na+\frac{n}{2}(n-1)a^2$

[113] $(1-a)^n \approx 1-na+\frac{n}{2}(n-1)a^2$

[114] $(1+a)^{-n} \approx 1-na+\frac{n}{2}(n+1)a^2$

[115] $(1-a)^{-n} \approx 1+na+\frac{n}{2}(n+1)a^2$.

В ф-лах (108)—(111) взяты лишь два первых члена разложения, а в (112)—(115) добавлен еще и третий член.

Пример. Найти первое приближение $\sqrt[3]{220}$.

Ближайший точный куб есть 216.

$$\sqrt[3]{220}=(216+4)^{\frac{1}{3}}=6\left(1+\frac{4}{216}\right)^{\frac{1}{3}}=6\left(1+\frac{1}{54}\right)^{\frac{1}{3}}=6\,(1+na)^{\frac{1}{3}}=$$
$$=6\left(1+\frac{1}{162}\right)=6\,(1+0{,}00617)=6{,}037.$$

462. Показательные ряды. Показательным называется ряд, представляющий разложение по возрастающим степеням x x-й степени некоторого постоянного основания. Этот ряд может быть получен следующим образом из разложения бинома, если $|n| > 1$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} = 1 + \frac{nx}{n} + \frac{nx(nx-1)}{n^2\ 2!} + \\ + \frac{nx(nx-1)(nx-2)}{n^3\ 3!} + \ldots \tag{1}$$

Если $x = 1$, то (1) обращается в следующий ряд.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{n^2\ 2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3\ 3!} + \ldots \tag{2}$$

$$\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{x} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}$$

или

$$\left[1 + 1 + \frac{n(n-1)}{n^2\ 2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3\ 3!} + \ldots\right]^{x} = \\ = 1 + x + \frac{nx(nx-1)}{n^2\ 2!} + \frac{nx(nx-1)(nx-2)}{n^3\ 3!} + \ldots \tag{3}$$

В равенстве (3) при беспредельном увеличении n мы можем придать x любое конечное значение. Пусть n численно возрастает до бесконечности. Тогда из равенства (3):

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n(n-1)}{n^2}\right] \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{n}\right] = 1.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}\right] \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3n-2}{n^2}\right) = 1.$$

Кроме того

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{nx(nx-1)}{n^2}\right] \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty}\left(x^2-\frac{x}{n}\right) = x^2.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{nx(nx-1)(nx-2)}{n^3}\right] \quad \text{или} \quad \lim\left(x^3-\frac{3nx^2-2x}{n^2}\right) = x^3$$

и т. д. Таким образом для всех конечных значений x ряд (3) принимает вид:

$$\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ \ldots\right)^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \\ + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ \ldots$$

[116] $e^{x} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ \ldots$

В [116] основание степени есть постоянная e, равная (ср. n⁰ 343) сумме ряда

$$1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots,$$

имеющей величину 2,7182818..., а показатель x есть переменная, могущая принимать конечное значение. Так как в выражении e^x неизвестная является показателем степени, то e^x называется показательной функцией x, а ряды, полученные из этого выражения, называются *показательными*.

463. Выведем формулу, применимую для любого положительного основания a.

Положим

$$\lg_e a=k,$$

тогда

$$a=e^k \text{ и } a^x=e^{kx}=e^{(\lg_e a)x}.$$

Отсюда, по формуле [116] имеем:

$$a^x=1+(\lg a)\,x+\frac{(\lg a)^2x^2}{2!}+\frac{(\lg a)^3x^3}{3!}+\ \ldots,$$

где $\lg a=\lg_e a$.

Это и есть показательный ряд, где показатель e равен $(\lg_e a)x$. Ряд сходится для всех конечных x.

Составим критическое отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ряда; согласно n⁰ 443 имеем:

$$\frac{\dfrac{(\lg a)^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{(\lg a)^n}{n!}}=\frac{(\lg a)^{n+1}\,n!}{(\lg a)^n\,(n+1)!}=\frac{\lg a}{n+1}.$$

Предел этого выражения при безграничном возрастании n равен нулю. Поэтому, согласно n⁰ 454, ряд сходится для всех конечных значений x.

Показательный ряд

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ \ldots\ +\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\ \ldots$$

сходится для всех конечных значений x.

Величина e является основанием в натуральной системе логарифмов.

464. Логарифмический ряд. Логарифмическим рядом называется разложение функции $\lg_e(1+x)$ по возрастающим степеням x.

[117] $$\lg_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ \dots$$

В логарифмическом ряде

$$a_{n+1}=\pm\frac{1}{n+1};\qquad a_n=\pm\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=-1.$$

Ряд сходится, если $|x|<1$.

Глава XIX.

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ.

465. Выражения вида $a_1b_2-a_2b_1$, где a_1, a_2, b_1, b_2 суть какие-нибудь числа, встречаются в математике весьма часто и называются *определителями*.

Соотношение $a_1b_2-a_2b_1$, написанное в форме

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

называется *определителем второго порядка*.

Определитель n-го порядка состоит из n^2 элементов, расположенных в n строках и n столбцах. Так, указанный выше определитель состоит из четырех элементов, расположенных в двух строках и двух столбцах.

Для разложения определителя второго порядка следует вычесть из произведения элементов, лежащих на главной диагонали, произведение элементов, расположенных на другой диагонали, например

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1\,b_2-a_2\,b_1$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}=4(-6)-3\cdot7=-24-21=-45.$$

Каждый член разложения содержит только один элемент из каждой строки и один—из каждого столбца.

466. Система уравнений с двумя неизвестными:

$$a_1x+b_1y=c_1$$
$$a_2x+b_2y=c_2.$$

Решая эти уравнения посредством обычного аналитического метода подстановки, имеем:

$$x=\frac{c_1\ b_2-c_2\ b_1}{a_1\ b_2-a_2\ b_1}, \qquad y=\frac{a_1\ c_2-a_2\ c_1}{a_1\ b_2-a_2\ b_1}.$$

Написав числители и знаменатели в форме определителей, получим

$$\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=x, \qquad \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=y.$$

Определители, находящиеся в знаменателях, одинаковы. Они составлены из коэффициентов при x и y в данных уравнениях.

467. Каждый определитель, стоящий в числителе, получается из определителя, стоящего в знаменателе, путем замены коэффициентов при искомых неизвестных постоянными членами. Чтобы найти числитель выражения для x, следует заменить коэффициенты при x (т. е. a_1 и a_2) постоянными членами c_1 и c_2. Точно также для нахождения величины y нужно заменить b_1 и b_2 членами c_1 и c_2.

Пример. Решить посредством определителей систему

$$2x-\ y=1$$
$$3x+2y=3.$$

Определитель для знаменателя будет иметь вид:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

как для x, так и для y.

Для получения числителя дроби в выражении для x следует заменить коэффициенты при x постоянными членами 1 и 3, тогда найдем:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Поэтому

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}}=\frac{5}{7}$$

Точно так же найдем

$$y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}}=\frac{3}{7}$$

468. Определитель третьего порядка. Определитель, состоящий из 9 элементов, расположенных в трех строках и трех столбцах, называется определителем третьего порядка. Так

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

есть определитель третьего порядка.

Он является весьма удобным обозначением выражения:

$$a_1\,b_2\,c_3+a_2\,b_3\,c_1+a_3\,b_1\,c_2-a_1\,b_3\,c_2-a_2\,b_1\,c_3-a_3\,b_2\,c_1.$$

Заметим, что здесь каждый член представляет собой произведение трех элементов по одному из каждого столбца и по одному из каждой строки.

Написанное выражение может быть преобразовано таким образом:

$$a_1\,(b_2\,c_3-b_3\,c_2)-a_2\,(b_1\,c_3-b_3\,c_1)+a_3\,(b_1\,c_2-b_2\,c_1).$$

Члены, заключенные в скобках, являются развернутыми определителями второго порядка, поэтому определитель третьего порядка может быть представлен так:

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}.$$

469. Итак, мы установили весьма важный способ получения определителей второго порядка из определителей третьего порядка.

Составим произведение из каждого элемента первого столбца и определителя второго порядка, который получается после вычеркивания того столбца и строки, в которых расположен данный элемент.

Взяв a, отбросим (зачеркнем) первую строку и первый столбец:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Взяв a_2, отбросим вторую строку и первый столбец:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Взяв a_3, отбросим третью строку и первый столбец:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Чтобы получить разложение определителя третьего порядка на определители второго порядка, следует изменить знак второго члена, т. е. произведения элемента, находящегося во второй строке и первом столбце, и соответствующего определителя второго порядка.

Определитель следующего низшего порядка, получающийся путем вычеркивания строки и столбца, в котором стоит известный элемент, называется *минором* этого элемента.

Так например, в определителе

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

минор члена a_1 есть определитель

$$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Если минору приписан надлежащий знак, то его называют алгебраическим дополнением соответствующего элемента.

470. Элементы второго и третьего столбца, а также второй и третьей строки также могут служить для разложения.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Точно так же

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

Пример 1. Разложить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Имеем:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(3-8) - 7(9-10) + 6(12-5) = -10 + 7 + 42 = 39.$$

Пример 2. Разложить определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -6 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Имеем:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -6 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-6-0) - 4(2-0) + (4+6) = -18 - 8 + 10 = -16.$$

471. Решение системы трех уравнений первой степени.

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3.$$

Предполагая, что коэффициенты при неизвестных, входящие в определители, не равны нулю, получим для каждого из этих неизвестных частное двух определителей, точно так же как и в случае системы двух уравнений (см. n⁰ 466).

472. Всякая система трех совместных уравнений первой степени с тремя неизвестными может быть приведена к общему виду

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \qquad (1)$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \qquad (2)$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \qquad (3)$$

Исключая одно из неизвестных, например z, из (1) и (2), получим

$$(a_1 c_2 - c_1 a_2)\, x + (b_1 c_2 - c_1 b_2)\, y = d_1 c_2 - c_1 d_2, \qquad (4)$$

исключая z из (2) и (3)

$$(a_2 c_3 - a_3 c_2)\, x + (b_2 c_3 - b_3 c_2)\, y = d_2 c_3 - d_3 c_2. \qquad (5)$$

Исключая из (4) и (5) неизвестную y, имеем:

$$x = \frac{d_1 b_2 c_3 - d_1 c_2 b_3 + c_1 d_2 b_3 - b_1 d_2 c_3 + b_1 c_2 d_3 - c_1 b_2 d_3}{a_1 b_2 c_3 - a_1 c_2 b_3 + c_1 a_2 b_3 - b_1 a_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 - c_1 b_2 a_3}$$

$$y = \frac{a_1 d_2 c_3 - a_1 c_2 d_3 + c_1 a_2 d_3 - d_1 a_2 c_3 + d_1 c_2 a_3 - c_1 d_2 a_3}{a_1 b_2 c_3 - a_1 c_2 b_3 + c_1 a_2 b_3 - b_1 a_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 - c_1 b_2 a_3}$$

$$z = \frac{a_1 b_2 d_3 - a_1 d_2 b_3 + d_1 a_2 b_3 - b_1 a_2 d_3 + b_1 d_2 a_3 - d_1 b_2 a_3}{a_1 b_2 c_3 - a_1 c_2 b_3 + c_1 a_2 b_3 - b_1 a_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 - c_1 b_2 a_3}$$

Заметим, что для системы трех уравнений с тремя неизвестными число членов в выражениях для этих неизвестных как в числителе, так и в знаменателе равно шести или $3!$, т. е. $1 \cdot 2 \cdot 3$.

Значения x, y и z могут быть получены путем приведения уравнений к общему виду и подстановки в формулы

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

473. Знаменателем во всех приведенных выражениях служит один и тот же определитель, называемый *определителем системы*. Он составлен из элементов, являющихся коэффициентами при неизвестных в заданных уравнениях.

Каждый определитель числителей получен путем замены в определителе системы коэффициентов искомого неизвестного постоянными членами, совершенно так же, как это мы делали при решении системы двух уравнений (n^0 466).

Пример. Решить посредством определителей систему:

$$\begin{aligned} x-2y+3z&=2\\ 2x- \quad -3z&=3\\ x+y+z&=6. \end{aligned}$$

Определитель системы будет иметь вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 19.$$

Отсюда

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{19}; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}}{19}; \quad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}}{19}$$

следовательно $\qquad x=3,\ y=2,\ z=1.$

474. Знаки алгебраических дополнений. Если элемент расположен в p-ой строке и в m-ом столбце, то его минор, умноженный на $(-1)^{m+p}$, называется алгебраическим дополнением элемента.

Возьмем, например, минор элемента c_3 в определителе 4-го порядка

$$\begin{array}{cccc} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{array}$$

Алгебраическим дополнением c_3 будет:

$$\begin{vmatrix} a_1\, b_1\, d_1 \\ a_2\, b_2\, d_2 \\ a_4\, b_4\, d_4 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{3+3} = + \begin{vmatrix} a_1\, b_1\, d_1 \\ a_2\, b_2\, d_2 \\ a_4\, b_4\, d_4 \end{vmatrix}.$$

Здесь

$m=3$, так как c_3 стоит в третьем столбце

$p=3$, так как c_3 стоит в третьей строке.

Алгебраические дополнения a_1, a_2, a_3 обычно обозначаются буквами: A_1, A_2, A_3, а определитель системы буквой D.

Таким образом

$$D = a_1 A_1 + a_2' A_2 + a_3 A_3.$$

475. Определители n-го порядка. До сих пор мы рассматривали только определители второго и третьего порядка. Для решения системы n линейных уравнений с n неизвестными, необходимо составить определитель, в который войдут все n^2 коэффициентов при неизвестных из заданных уравнений. В таком случае получим определитель n-го порядка, обозначаемый обыкновенно буквой Δ (дельта):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1\, b_1 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \, q_1 \\ a_2\, b_2 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \, q_2 \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ a_n\, b_n \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \, q_n \end{vmatrix}$$

Этот определитель заменяет собой алгебраическую сумму произведений n множителей, каждый из которых может быть получен, если взять один элемент из каждой строки и один элемент из каждого столбца. Соответственно правилу, указанному в n⁰ 474, каждому такому произведению нужно приписать знак плюс или минус в зависимости от его расположения в определителе.

476. Свойства определителей. Разложение определителя n-го порядка дает $n!$ членов.

477. Если все элементы столбца или строки суть нули, то определитель равен нулю, ибо, разлагая по элементам этого столбца или строки, получим все члены равными нулю.

478. Если все элементы столбца или строки, кроме одного, равны нулю, то определитель равен произведению этого элемента на его алгебраическое дополнение.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & 0 \end{vmatrix} = -d_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}.$$

479. Величина определителя не изменится, если заменить строки столбцами или наоборот. Это можно доказать, производя разложение определителя.

480. Всякая теорема, справедливая для столбцов определителя, справедлива и для его строк, и обратно.

481. Перестановка двух строк или столбцов одного на место другого изменяет знак определителя.

482. Если две строки или два столбца определителя одинаковы, то определитель равен нулю.

483. Если элементы какого-нибудь столбца (или строки) умножить на алгебраические дополнения соответствующих элементов другого столбца (или строки), то сумма их произведений равняется нулю.

Так например,

$$b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3 + \cdots + b_k A_k = 0$$

$$a_2 A_1 + b_2 B_1 + c_2 C_1 + \cdots + k_2 K_1 = 0.$$

484. Если все элементы одного из столбцов умножить на какое-либо число, то этим самым и определитель умножается на это же число. Действительно,

$$\begin{vmatrix} ma_1, & b_1 & c_1 \ldots k_1 \\ ma_2, & b_2 & c_2 \ldots k_2 \\ ma_n & b_3 & c_3 \ldots k_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ ma_n & b_n & c_n \ldots k_n \end{vmatrix} = ma_1A_1 + ma_2A_2 + ma_3A_3 + \ldots$$
$$\ldots + ma_kA_k =$$
$$= m(a_1A_1 + a_2A_2 + \ldots + a_kA_k) =$$
$$= m \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \ldots k_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \ldots k_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \ldots k_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ a_n & b_n & c_n \ldots k_n \end{vmatrix}$$

485. Только-что доказанная теорема справедлива и для случая деления, так как деление на m равносильно умножению на $\frac{1}{m}$.

486. Если каждый элемент одного из столбцов определителя представить в виде суммы двух количеств, то данный определитель можно заменить суммой двух определителей того же порядка

$$\begin{vmatrix} a_1+d_1 & b_1 & c_1 \dots & k_1 \\ a_2+d_2 & b_2 & c_2 \dots & k_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n+d_n & b_n & c_n \dots & k_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \dots & k_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \dots & k_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & c_n \dots & k_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \dots & k_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \dots & k_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_n & b_n & c_n \dots & k_n \end{vmatrix}$$

487. Если умножить каждый элемент столбца (или строки) на одно и то же число и произведение прибавить (или отнять) к соответствующим элементам другого столбца (или строки), то определитель по величине не изменится.

488. Разложение определителей. Посредством применения принципа, изложенного в n⁰ 487, можно обратить все элементы столбца (или строки), кроме одного, в нули, причем порядок определителя может быть понижен на единицу (см. n⁰ 478). Этот процесс можно продолжать до тех пор, пока не получится определитель второго порядка.

Перед понижением порядка определитель во многих случаях можно упростить путем сокращения на множители, общие для всех элементов столбца или строки. Кроме того можно уменьшить абсолютные величины членов, вычитая соответствующие элементы других столбцов (или строк) или их кратные.

Пример. Определить величину определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 7 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Преобразуем этот определитель посредством способа, указанного в n⁰ 487, таким образом, чтобы сделать все элементы строки или столбца, кроме одного, равными нулю. Особенно удобен для этой цели второй столбец.

Прибавим учетверенную первую строку ко второй, тогда цифра 4 во второй строке обратится в нуль.

Затем прибавим удвоенную первую строку к третьей, а затем — первую к четвертой. Эти действия, как доказано в предыдущих nn⁰, не изменят величину определителя, но в результате их определитель примет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 & 1 \\ 9 & 0 & 26 & 7 \\ 8 & 0 & 17 & 6 \\ 5 & 0 & 7 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 26 & 7 \\ 8 & 17 & 6 \\ 5 & 7 & 6 \end{vmatrix}$$

Вычитая элементы последнего столбца из первого, получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 26 & 7 \\ 2 & 17 & 6 \\ -1 & 7 & 6 \end{vmatrix}$$

Прибавим удвоенную третью строку к первой, а затем удвоенную третью ко второй, тогда найдем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 40 & 19 \\ 0 & 31 & 18 \\ -1 & 7 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 40 & 19 \\ 31 & 18 \end{vmatrix}$$

Вычитая вторую строку из первой, имеем:

$$-\begin{vmatrix} 40 & 19 \\ 31 & 18 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 31 & 18 \end{vmatrix} = -(162 - 31) = -131.$$

Задача. Даны три числа. Сумма половины первого, трети второго и одной четверти третьего равна 12. Сумма одной трети первого, четверти второго и одной пятой третьего равна 9. Сумма всех трех чисел равна 38. Найти эти числа.

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 12$$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 9$$

$$x + y + z = 38$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 12 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 9 & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 38 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{12\begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 9\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 38\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{vmatrix}}{\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \frac{1}{3}\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{vmatrix}} =$$

$$12\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - 9\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + 38\left(\frac{1}{15} - \frac{1}{16}\right)$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & 12 & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{3} & 9 & \frac{1}{5}\\ 1 & 38 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{\frac{1}{2}\begin{vmatrix}9 & \frac{1}{5}\\ 38 & 1\end{vmatrix}-\frac{1}{3}\begin{vmatrix}12 & \frac{1}{4}\\ 38 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}12 & \frac{1}{4}\\ 9 & \frac{1}{5}\end{vmatrix}}{\text{тот же, что и для } x.}=$$

$$=\frac{\frac{7}{10}-\frac{5}{6}+\frac{3}{20}}{\frac{1}{40}-\frac{1}{36}+\frac{1}{240}}=12.$$

Так как $x+y+z=38$, то $z=20$.

Таким образом искомые числа суть 6, 12 и 20.

489. Разложение определителей на множители. Если определитель обращается в нуль при замене какого-нибудь элемента b, другим элементом a, то разность чисел a и b является множителем определителя.

Пример.

$$D=\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}$$

Если $a=b$, то

$$D=\begin{vmatrix}1 & b & b^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}$$

Так как две строки в этом определителе одинаковы, то $D=0$ и $(a-b)$ является его множителем. По той же причине $(b-c)$ и $(c-a)$ также являются множителями данного определителя.

Произведение этих трех множителей имеет ту же степень и может отличаться от D только коэффициентом k. Поэтому

$$D=k(a-b)(b-c)(c-a).$$

Член, полученный из главной диагонали первоначального определителя, равен bc^2.

Он должен быть равен соответствующему члену в выражении

$$k(a-b)(b-c)(c-a) \text{ или } kbc^2,$$

отсюда

$$bc^2=kbc^2, \quad \text{т. е. } k=1.$$

Следовательно

$$D=(a-b)(b-c)(c-a).$$

Глава XX.

СОЕДИНЕНИЯ.

490. Если для изготовления какой-нибудь вещи требуется произвести два действия, причем первое может быть выполнено только одним способом, а второе r способами, то указанную вещь можно изготовить, сочетая первое действие с любым из r возможных способов осуществления второго действия. Таким образом данную вещь можно сделать r способами.

Пусть в предыдущем примере первое действие можно осуществить уже не одним, а двумя способами, второе же попрежнему r способами.

Тогда каждый из двух способов выполнения первого действия можно сочетать с любым из r способов для второго действия, следовательно вещь может быть изготовлена $2r$ различными способами.

Положим, для изготовления предмета нужно выполнить три действия, причем для первого существует n способов осуществления его, для второго — r и для третьего — s способов. Рассуждая подобно предыдущему, найдем, что всего возможно $n \cdot r \cdot s$ способов для того, чтобы изготовить данный предмет.

Точно таким же образом, если на должность директора предприятия могут быть приглашены 4 человека, а на должность его помощника 6 человек, то существует $6 \times 4 = 24$ способа замещения указанных вакансий.

n различных вещей можно раздать x мужчинам и a женщинам $(x+a)^n$ способами, так как первую вещь можно раздать $(x+a)$ способами, вторую — также $(x+a)$ способами и т. д. Следовательно, для n вещей существует

$$(x+a)(x+a)(x+a)\ldots \text{ или } (x+a)^n$$

способов распределения.

491. Всякое расположение предметов, отличающееся порядком их расположения, или самими предметами, называется *размещением.*

Перестановкой называются размещения, отличающиеся только порядком расположения предметов, а не самими предметами.

492. Всякое распределение предметов в группы независимо от порядка, в котором они расположены в этих группах, называется *сочетанием.* Например:

$$ab,\ ac,\ ba,\ bc,\ ca,\ cb,$$

ab и ba суть различные перестановки в одном и том же сочетании. Если рассматривать все три буквы, взятые вместе, то получим 6 перестановок, а именно:

$$abc,\ acb,\ bca,\ bac,\ cab,\ cba,$$

но только одно сочетание: abc.

493. Число размещений n различных предметов, взятых одновременно, равно произведению

$$n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots3\cdot2\cdot1. \text{ или } n!$$

Предположим, что у нас имеется n различных вещей и мы хотим знать, сколькими способами можно расставить их по n местам.

Можно поставить любую из вещей на первое место, любую из оставшихся $n-1$ вещей на второе место. Первые два места могут быть заняты $n(n-1)$ различными способами. Продолжая действие в том же порядке, найдем, что последние два места можно заполнить только двумя способами, а последнее лишь одним.

494. Число размещений n вещей, взятых по r за-раз, будет равно

$$\frac{n!}{(n-r)!}$$

Пусть имеется ряд из r стульев и мы желаем знать, сколькими способами можно рассадить на них r из n человек.

Каждого из людей можно посадить на первый стул. После того как он будет занят, можно занять второй стул любым из $(n-1)$ оставшихся людей. Таким образом число возможных размещений на двух стульях равно $n(n-1)$, если $r \leqslant n$.

Последний r-ый стул можно занять столькими способами, сколько осталось стоящих людей. Следовательно, если мы захотим выбрать человека, могущего занять r-ый стул, имея уже $(r-1)$ сидящих, то найдется $n-(r-1)$ или $(n-r+1)$ людей, не имеющих места.

Итак, общее количество способов рассадить r людей из n на r стульях будет:

$$n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-r+1)=$$
$$=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots3\cdot2\cdot1}{(n-r)(n-r-1)\ldots3\cdot2\cdot1}=\frac{n!}{(n-r)!}.$$

Условились обозначать число размещений из n предметов но r символом:

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

495. Число сочетаний из n различных вещей по r одновременно равно

$$C_n^r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}.$$

В предыдущем случае имелось r людей и $r!$ перестановок из них, но только одно сочетание. Таким образом там было в $r!$ раз больше перестановок, чем сочетаний.

Если число сочетаний равно x, то $x \cdot r!$ есть число возможных размещений

$$x \cdot r! = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

или

$$x = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}.$$

Глава XXI.

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ.

Разложение дробей на простейшие.

496. Неопределенные коэффициенты. Коэффициенты, величины которых в начале решения задачи неизвестны, но определяются впоследствии, называются *неопределенными коэффициентами.*

Если, например, мы хотим разложить выражение $(x-1) \cdot (x+1)(x-2)$, не производя самого перемножения, то можем вообще написать:

$$(x-1)(x+1)(x-2) = x^3 + Ax^2 + Bx + C. \qquad (1)$$

С целью определения коэффициентов A, B и C из тождества, которое должно оставаться справедливым для всех значений x, положим в (1) $x=0$. В этом случае $C=2$.

Если $x=1$, то выражение (1) примет вид:

$$0 = 1 + A + B + C.$$

Если $x=-1$, то из (1) будем иметь

$$0=-1+A-B+C.$$

Решая совместно два последние условные уравнения, имеем:

$$A=-2, \quad B=-1, \quad C=2.$$

Следовательно

$$(x-1)(x+1)(x-2)=x^3-2x^2-x+2.$$

497. Разложение дробей.

Пример. 1. Разложить дробь

$$\frac{1+2x}{1+x+x^2}.$$

Первый член разложения получается посредством обыкновенного деления и равен, очевидно, $1:1$, т. е. 1. Так как число не делится нацело на знаменателя, то результатом деления явится бесконечный ряд, начинающийся членом 1. Последующие члены представляют собой выражения с возрастающими степенями x. Для определения коэффициентов при этих степенях положим

$$\frac{1+2x}{1+x+x^2}=1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\ldots \tag{1}$$

Это равенство будет справедливо для всех значений x, которые обращают ряд в сходящийся.

Умножая все члены ряда на знаменатель и упрощая его, получим:

$$\begin{array}{r|r|r|r|r} 1+2x=1+A & x+B & x^2+C & x^3+D & x^4+\ldots \\ +1 & +A & +B & +C & +\ldots \\ & +1 & +A & +B & +\ldots \end{array} \tag{2}$$

Применяя принцип неопределенных коэффициентов (n^0 496), можно приравнять коэффициенты в этих двух рядах. Совокупность членов, стоящих по левую сторону от знака равенства, можно рассматривать как бесконечный ряд

$$1+2x+0x^2+0x^3+0x^4+\ldots$$

Сумма членов этого ряда имеет определенную величину для любых значений x, в то время как ряд, стоящий по правую сторону знака равенства, имеет *определенную величину суммы лишь для* тех значений x, которые делают этот ряд (1) сходящимся. Так как равенство (2) имеет смысл для значений x, обращающих ряд в сходящийся, то неопределенные величины A, B, C можно определить сравнением коэффициентов при одинаковых степенях x в обеих частях равенства.

Следовательно

$$\begin{array}{rl} A+1=2 & \text{и } A=1 \\ B+A+1=0 & \quad B=-2 \\ C+B+A=0 & \quad C=+1 \\ D+C+B=0 & \quad D=+1. \end{array}$$

Таким образом дробь

$$\frac{1+2x}{1+x+x^2}=1+x-2x^2+x^3+x^4+\ldots$$

Разложение может быть также получено делением.

Пример 2. Разложить дробь

$$\frac{2-x+2x^2}{x^2-2x^3}.$$

Так как первый член разложения есть очевидно $\frac{2}{x^2}$ или $2x^{-2}$, то полагаем, что дробь после разложения принимает вид:

$$\frac{2-x+2x^2}{x^2-2x^3}=Ax^{-2}+Bx^{-1}+C+Dx+Ex^2+\ldots$$

Освобождая от знаменателя и умножая обе части на x^2, имеем:

$$2-x+2x^2=\begin{array}{c|c|c|c|c} A+B & x+C & x^2+D & x^3+E & x^4+\ldots \\ -2A & -2B & -2C & -2D & \end{array}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x и решая уравнения, найдем:

$$A=2,\quad B=3,\quad C=8,\quad D=16,\quad E=32,$$

откуда

$$\frac{2-x+2x^2}{x^2-2x^3}=2x^{-2}+3x^{-1}+8+16x+32x^2+\ldots$$

498. Разложение иррациональных выражений. Чтобы разложить выражение $\sqrt{a+x}$ по методу неопределенных коэффициентов, положим

$$\sqrt{a+x}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\ldots$$

Возвышая обе стороны в квадрат, найдем:

$$a+x=A^2+\begin{array}{c|c|c|c} 2ABx+B^2 & x^2+2AD & x^3+C^2 & x^4+\ldots \\ +2AC & +2BC & +2AE & \\ & & +2BD & \end{array}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, находим:

$$\begin{array}{lcl} A^2=a, & \text{откуда} & A=\sqrt{a} \\ 2AB=1, & \text{"} & B=\frac{1}{2A}=\frac{\sqrt{a}}{2a} \\ B^2+2AC=0, & \text{"} & C=-\frac{\sqrt{a}}{8a^2} \\ 2AD+2BC=0, & \text{"} & D=\frac{\sqrt{a}}{16a^3}, \end{array}$$

и наконец,

$$C^2+2AE+2BD=0,$$

следовательно

$$E=-\frac{5\sqrt{a}}{128a^4}.$$

Таким образом

$$\sqrt{a+x}=\sqrt{a}\left(1+\frac{x}{2a}-\frac{x^2}{8a^2}+\frac{x^3}{16a^3}-\frac{5x^4}{128a^4}+\dots\right).$$

Заданное иррациональное выражение может быть также разложено посредством извлечения корня или по формуле бинома. Следует, однако, заметить, что, независимо от примененного способа, полученный ряд будет равен данному иррациональному выражению только при тех значениях x, которые делают ряд сходящимся.

499. Простейшие дроби. При сложении дробей получается одна дробь, у которой знаменатель равен наименьшему кратному знаменателей слагаемых.

Так например,

$$\frac{5}{2(x-1)}+\frac{7}{2(x-3)}-\frac{6}{x-2}=\frac{x+4}{4(x^3-6x^2+5x-6)}.$$

Часто бывает необходимо произвести обратное действие, а именно разбить данную дробь на сумму или разность дробей, имеющих знаменатель более низкой степени и более удобного вида.

Здесь мы будем рассматривать только такие дроби, у которых числитель имеет более низкую степень, чем знаменатель. В противном случае, произведя деление, получим целый многочлен и правильную дробь указанного типа.

Число простейших дробей, на которые разлагается данная, зависит от числа простых множителей, на которые можно разложить ее знаменатель.

Рассмотрим следующие случаи разложения:

500. Случай 1. Знаменатель разлагается на множители первой степени (линейные), которые являются действительными, но различными.

Рассмотрим дробь

$$\frac{x+4}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

и разложим ее на простейшие.

Положим

$$\frac{x+4}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}.$$

Умножая обе части равенства на $(x-1)(x-2)(x-3)$, получим:

$$x+4=A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1(x-2)=$$
$$=(A+B+C)x^2-(5A+4B+3C)x+6A+3B+2C.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x имеем:

$$0=A+B+C,$$
$$-1=5A+4B+3C,$$
$$4=6A+3B+2C.$$

Решая уравнения совместно, находим:

$$A=\frac{5}{2},\quad B=-6,\quad C=\frac{7}{2}.$$

Составим теперь уравнение

$$\frac{x+4}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{5}{2(x-1)}-\frac{6}{x-2}+\frac{7}{2(x-3)}.$$

Другой способ разложения состоит в рассмотрении отдельных множителей знаменателя, а именно, $(x-1)$, $(x-2)$ и $(x-3)$, как это указано в n^0 266, а затем в подстановке корней $x=1$, 2 и 3 вместо x.

Остаток во всех случаях будет равен нулю. В этом случае после упрощений будем иметь

$$x+4=A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)$$

Подставим значение корня $x=1$:

$$5=2A+0+0,$$

откуда, как и ранее,

$$A=\frac{5}{2}.$$

Подставляя корень $x=2$, имеем

$$6=0-B+0,$$

т. е.

$$B=-6.$$

Наконец, принимая $x=3$, получим:

$$7=0+0+2C$$

$$C=\frac{7}{2} \text{ как и раньше.}$$

Правило таково, что множителям $(x-a)$ соответствует простая дробь вида

$$\frac{A}{x-a}.$$

501. Случай 2. Знаменатель разлагается на действительные линейные множители, некоторые из которых повторяются, как например в дроби

$$\frac{5x^2-6x-5}{(x-1)^3\,(x+2)}.$$

В этом случае знаменателями отдельных дробей будут не только $(x-1)^3$, но также $(x-1)^2$ и $(x-1)$. В случае, если они не входят в состав дроби, числители равны нулю.

Рассматривая вышеуказанную дробь, имеем:

$$\frac{5x^2-6x-5}{(x-1)^3\,(x+2)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}+\frac{D}{(x+2)}.$$

Упрощая выражение путем умножения на $(x-1)^3\,(x+2)$, находим:

$$5x^2-6x-5=A\,(x-1)^2\,(x+2)+$$
$$+B\,(x-1)\,(x+2)+C\,(x+2)+D(x-1)^3.$$

Положив здесь $x=-2$, находим, что $D=-1$.

Положив $x=1$, находим, что $C=-2$, отсюда

$$A=1,\quad B=2,$$

следовательно

$$\frac{5x^2-6x-5}{(x-1)^3\,(x+2)}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{2}{(x-1)^3}-\frac{1}{x+2}.$$

Впрочем здесь можно было бы применить и метод, описанный в n^0 500.

Правило. *Если в знаменателе имеется множитель $(x-a)^n$, то данная дробь разлагается на сумму простейших*

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}+\frac{C}{(x-a)^3}+\ldots+\frac{N}{(x-a)^n}.$$

502. Случай 3. Знаменатель содержит множители второй степени, которые не повторяются и не могут быть разложены на линейные.

Таков, например, знаменатель дроби

$$\frac{3x^2-2}{(x^2+x+1)(x+1)}.$$

Положим, что

$$\frac{3x^2-2}{(x^2+x+1)(x+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{C}{x+1}.$$

Упрощая, имеем:

$$\begin{aligned}3x^2-2&=(Ax+B)(x+1)+C(x^2+x+1)=\\&=(A+C)x^2+(A+B+C)x+B+C.\end{aligned}$$

Применяя способ, приведенный в n⁰ 500, и сравнивая коэффициенты, находим:

$$\begin{aligned}A+C&=3\\A+B+C&=0\\B+C&=-2,\end{aligned}$$

отсюда

$$A=2,\quad B=-3,\quad C=1.$$

Следовательно:

$$\frac{3x^2-2}{(x^2+x+1)(x+1)}=\frac{2x-3}{x^2+x+1}+\frac{1}{x+1}.$$

Числитель для дроби со знаменателем второй степени берется равным $Ax+B$, так как знаменатель имеет два корня.

Правило. *Если один из множителей знаменателя является многочленом второй степени, то следует предположить, что соответствующая дробь будет иметь вид*

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}.$$

503. Случай 4. Знаменатель содержит одинаковые множители второй степени, как например дробь

$$\frac{x^4+x^3-2x^2-5x-4}{(x-1)(x^2+x+1)^2}.$$

Для разложения дроби на простейшие положим, что она равна сумме

$$\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+x+1)^2}.$$

Решение находим точно так же, как и в предыдущем случае.

Правило. *Если в знаменателе имеется множитель* $(ax^2+bx+c)^n$, *то дробь следует представить как сумму простейших*:

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}+\frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^2}+\ldots+\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}.$$

Во всех случаях степень числителя каждой простейшей дроби должна быть на единицу меньше, чем степень соответствующего знаменателя.

Глава XXII.

ГЕОМЕТРИЯ.

504. Угол называется дополнительным другого угла до прямого, если их сумма равна прямому углу.

505. Угол называется пополнительным другого угла до двух прямых, если они в сумме равны двум прямым.

506. Два угла со взаимно перпендикулярными сторонами или равны между собой, или пополняют один другого.

507. Два угла со взаимно параллельными сторонами или равны между собою, или пополняют один другого.

508. Прямоугольные треугольники. Если обозначить буквами a и b длины катетов, а буквой c — длину гипотенузы, то имеем:

[118] $$a^2+b^2=c^2$$

[119] $$a=\sqrt{(c+b)\,(c-b)}$$

[120] $$a=c\sin A=b\operatorname{tg}A$$

[121] $$a=\sqrt{mc}$$

[122] $$b=\sqrt{(c+a)\cdot(c-a)}$$

[123] $$b=c\cos A=\frac{a}{\operatorname{tg}A}$$

[124] $$b=\sqrt{nc}$$

[125] $$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

[126] $$c = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\cos A}$$

[127] $$c = m + n$$

[128] $$\text{Площадь} = \frac{1}{2} ab$$

[129] $$= \frac{1}{2} a^2 \operatorname{ctg} A = \frac{1}{2} b^2 \operatorname{tg} A$$

[130] $$= \frac{1}{4} c^2 \sin 2A$$

[131] $$= \frac{1}{2} bc \sin A$$

[132] $$= \frac{1}{2} ac \sin B$$

[133] $$= \frac{a^2}{2 \operatorname{tg} A}$$

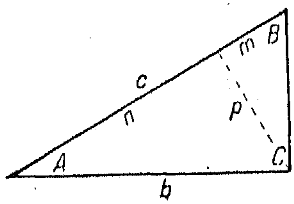


Рис. 160.

[134] $$p^2 = mn.$$

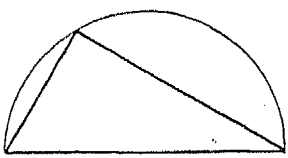


Рис. 161.

509. В прямоугольном треугольнике, два острых угла которого равны соответственно 30° и 60°, гипотенуза вдвое длиннее меньшего катета. Больший катет в $\sqrt{3}$ раз длиннее меньшего.

510. Если треугольник вписан в полукруг, то он — прямоугольный (рис. 161).

511. Теорема Пифагора. *В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов*

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Квадрат, построенный на катете a равновелик прямоугольнику со сторонами m и c.

Квадрат, построенный на другом катете, равновелик прямоугольнику со сторонами n и c.

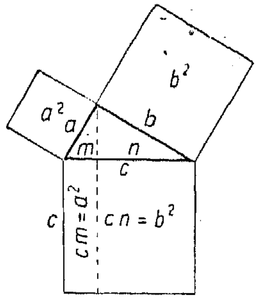


Рис. 162.

512. В прямоугольном треугольнике перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, есть среднее пропорциональное между отрезками гипотенузы (рис. 163).

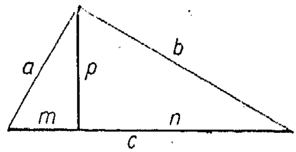


Рис. 163.

[135] $$\frac{m}{p} = \frac{p}{n} \text{ или } p = \sqrt{mn}.$$

513. В прямоугольном треугольнике катет есть среднее пропорциональное между проекцией этого катета на гипотенузу и самой гипотенузой:

$$\frac{m}{a} = \frac{a}{c} \text{ и } \frac{n}{b} = \frac{b}{c},$$

откуда

$$a = \sqrt{mc} \qquad [121]$$

$$b = \sqrt{nc} \qquad [124]$$

514. Равносторонний треугольник (рис. 164).

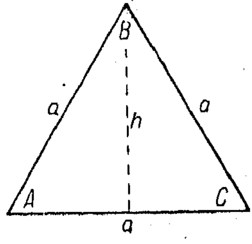


Рис. 164.

[136] $$A = B = C = 60^\circ$$

[137] $$\text{Площадь} = \frac{1}{2}\, ah$$

[138] $$= \frac{1}{4}\, a^2\sqrt{3} = 0{,}43301\, a^2$$

[139] $$h = \frac{1}{2}\, a\sqrt{3} = 0{,}866a$$

515. Какой угодно треугольник на плоскости.

[140] $A+B+C=180^\circ=\pi$ радианов; $180-A=B+C$.

Последнее равенство показывает, что внешний угол равен сумме двух внутренних, с ним не смежных.

Обозначая буквой s полусумму всех сторон (полупериметр), имеем:

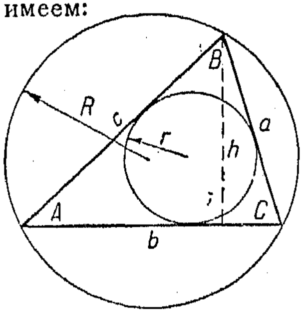


Рис. 165.

[141] $$s=\frac{a+b+c}{2}.$$

Радиус вписанного круга равен (рис. 165):

[142] $$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

Радиус описанного круга можно найти по формуле:

[143] $$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C};$$

[144] Площадь треугольника $=\frac{1}{2}bh=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$

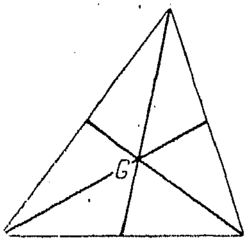


Рис. 166.

516. Прямые, соединяющие вершины треугольника с серединами противолежащих сторон, называются медианами. Они пересекаются в точке G, являющейся центром тяжести площади треугольника (рис. 166). Указанная точка лежит на медиане в расстоянии одной трети ее от соответствующего основания.

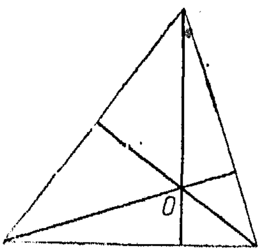


Рис. 167.

517. Перпендикуляры, опущенные из вершин на противолежащие стороны, называются высотами. Они пересекаются в точке O (в ортоцентре) (рис. 167).

518. Перпендикуляры, восставленные из середины сторон, пересекаются в точке C, являющейся центром описанного круга (рис. 168).

Точки O, C и G лежат на одной прямой, причем G делит отрезок OC на две части, из которых одна вдвое больше другой.

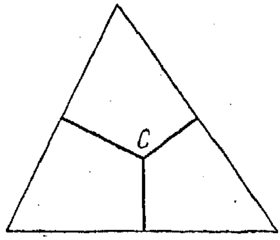


Рис. 163.

519. Прямая, делящая угол на две равные части, называется *биссектрисой*.

Биссектрисы углов треугольника пересекаются, в точке H, являющейся центром вписанного круга (рис. 169).

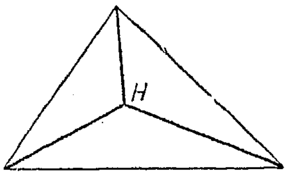


Рис. 169.

520. О пропорциональности линий в треугольнике. Прямая, параллельная одной из сторон треугольника (например $MN \| AC$), делит две другие стороны на части пропорциональные (рис. 170).

$$\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{NB}.$$

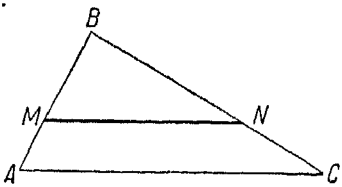


Рис. 170.

Биссектриса делит противолежащую сторону на части, пропорциональные двум другим сторонам (рис. 171):

$$\frac{BM}{MC} = \frac{AB}{AC}.$$

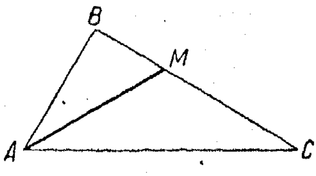


Рис. 171.

521. Два треугольника равны между собой, если две стороны и угол, заключенный между ними в одном треугольнике, соответственно равны двум сторонам и углу между ними в другом.

522. Два треугольника равны, если сторона и два прилежащих

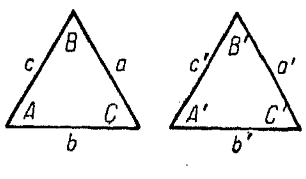


Рис. 172.

к ней угла в одном из них соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам в другом.

523. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого, то треугольники равны между собой.

524. Подобные треугольники. Два треугольника подобны, если углы одного из них равны углам другого, а сходственные стороны пропорциональны.

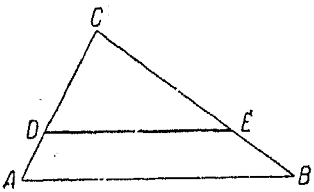


Рис. 173

525. Прямая, параллельная одной из сторон треугольника, образует с двумя другими треугольник, подобный данному

$\triangle DCE$ подобен $\triangle ACB$, если $DE \parallel AB$.

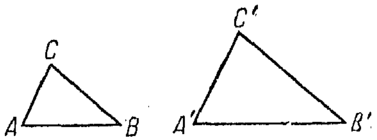


Рис. 174.

526. Два треугольника подобны, если два угла одного из них соответственно равны двум углам другого. Так, например, если A равен A' и C равен C', то треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны (рис. 174).

527. Графическое умножение и деление посредством подобных треугольников. Пусть требуется графически перемножить a и b.

Правило. *Начертите треугольник (лучше всего прямоугольный), сторона которого равна одному из данных чисел, а высота—единице. Продолжая его стороны, построим второй треугольник, подобный данному, таким образом, чтобы его высота равнялась второму числу. Основание этого треугольника дает искомое произведение.*

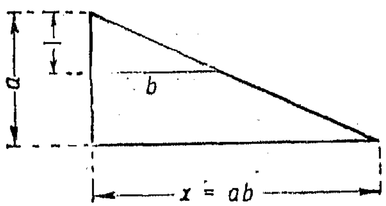


Рис. 175.

Доказательство. Вследствие подобия треугольников

$$x : a = b : 1 \text{ или } x = ab,$$

Если $a < 1$, треугольник примет вид, изображенный на рис 176. Если же $a < 1$ и $b < 1$, треугольники будут иметь вид, показанный на рис. 177.

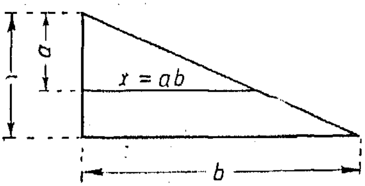


Рис. 176.

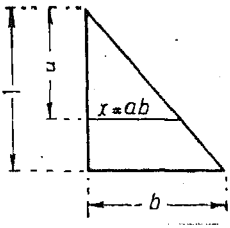


Рис. 177.

Пусть требуется разделить графически a на b.

Правило. *Начертите прямоугольный треугольник, основание которого равно делителю, а высота равна единице. Продолжая стороны его, постройте треугольник, подобный*

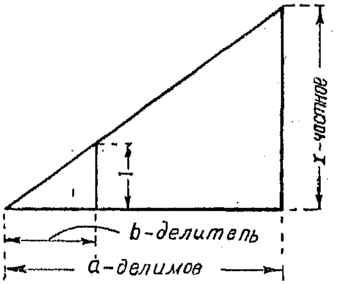


Рис. 178.

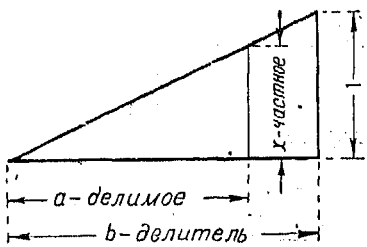


Рис. 179.

первому, таким образом, чтобы основание нового треугольника равнялось делимому. Высота его будет равна частному.

Доказательство: $x : a = 1 : b$.

Следовательно

$$x = \frac{a}{b}.$$

Если делимое меньше делителя, то получатся треугольники, показанные на рис. 179.

528. Прямоугольник (рис. 180).

[145] Площадь $= ab$

[146] $= \frac{1}{2} d^2 \sin U.$

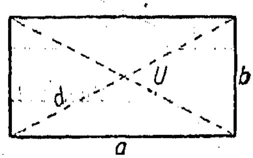


Рис. 180.

[147] диагональ $d = \sqrt{a^2 + b^2}$

[148] U — острый угол между диагоналями $= 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{b}{a}$.

529. Параллелограмм.

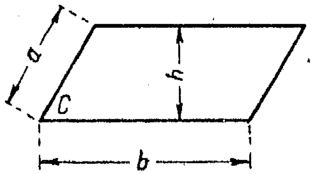


Рис. 181.

[149] Площадь $= bh$

[150] $= ab \sin C$.

Противоположные стороны этой фигуры параллельны и равны между собой.

Диагонали делят ее на треугольники, соответственно равные друг другу.

Углы, примыкающие к каждой стороне, в сумме составляют два прямых.

Диагонали делятся точкой пересечения их пополам.

[151] Площадь $= \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \sin U$, где d_1 и d_2 — длины диагоналей, а U — острый угол между ними.

Центр тяжести площади параллелограмма лежит в точке пересечения диагоналей.

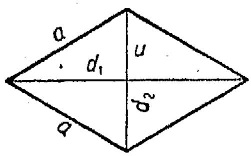


Рис. 182.

530. Ромб. Параллелограмм с равными сторонами называется *ромбом* (рис. 182).

[152] Площадь $= a^2 \sin C$, где C — угол между соседними сторонами.

[153] Площадь $= \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$, где d_1 и d_2 — длины диагоналей.

531. Трапеция. Четырехугольник, две стороны которого параллельны, называется *трапецией* (рис. 183—184).

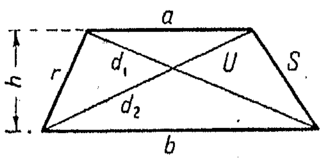


Рис. 183.

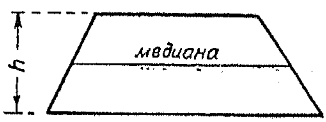


Рис. 184.

[154] Площадь $= \frac{(a+b)h}{2}$.

[155] $$\text{Площадь} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \sin U.$$

[156] $$(d_1)^2 + (d_2)^2 = r^2 + S^2 + 2ab.$$

Прямая, проведенная через середины непараллельных сторон трапеции, называется *медианой*. Длина медианы равна полусумме параллельных сторон.

Площадь трапеции равна произведению медианы на высоту.

Для нахождения центра тяжести трапеции следует разбить ее на два треугольника и найти их центры тяжести. Прямая, соединяющая середины параллельных сторон, пересекаясь с прямой, проведенной через центры тяжести треугольников, дает искомый центр тяжести площади трапеции.

532. Четырехугольник. Всякая фигура, имеющая четыре стороны, называется *четырехугольником*.

[157] $$\text{Площадь} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \sin U.$$

[158] $$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = [d_1]^2 + [d_2]^2 + 4m^2,$$

где m — длина прямой, соединяющей середины диагоналей.

Для определения площади четырехугольника его обычно разбивают на два треугольника и находят сумму их площадей.

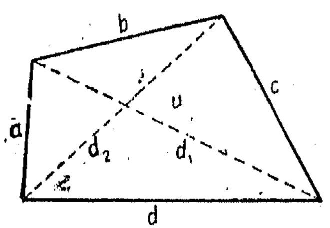


Рис. 185.

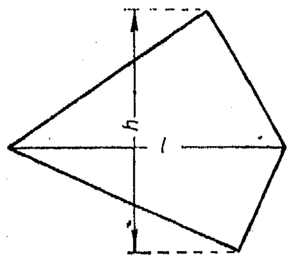
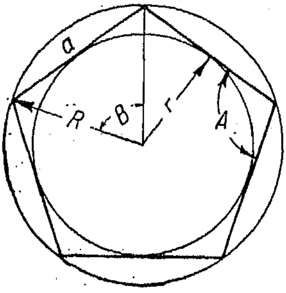


Рис. 186.

Сумма внутренних углов четырехугольников равна 360°.

[159] Площадь $\frac{lh}{2}$, где l — длина диагонали, h — ширина в направлении, перпендикулярном к диагонали (рис. 186).

533. Правильные многоугольники. В правильном многоугольнике все стороны, а также все углы равны между собой (рис. 187).



Рис, 187.

Если обозначим буквой n число сторон этой фигуры, то

[160] $$\angle A = \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ = \frac{n-2}{n} \pi \text{ радианов.}$$

[161] $$\angle B = \frac{360^\circ}{n} = \frac{2\pi}{n} \text{ радианов.}$$

Между числом сторон, длиной стороны, радиусом вписанного круга и площадью существуют следующие соотношения:

n	a	r	R	Площадь
3	$1{,}732R$	$0{,}2887a$	$0{,}5773a$	$0{,}433a^2$
4	$1{,}414R$	$0{,}5a$	$0{,}7071a$	$1{,}000a^2$
5	$1{,}1756R$	$0{,}6882a$	$0{,}8506a$	$1{,}7205a^2$
6	$1{,}000R$	$0{,}866a$	$1{,}0000a$	$2{,}5981a^2$
7	$0{,}8677R$	$1{,}0383a$	$1{,}1524a$	$3{,}6339a^2$
8	$0{,}7653R$	$1{,}2071a$	$1{,}3066a$	$4{,}8284a^2$
n	$2R\sin\frac{B}{2}$	$\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}$	$\frac{a}{2}\operatorname{cosec}\frac{B}{2}$	$\frac{na^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}$

534. Построение правильных многоугольников. Всякий правильный многоугольник может быть построен следующим образом.

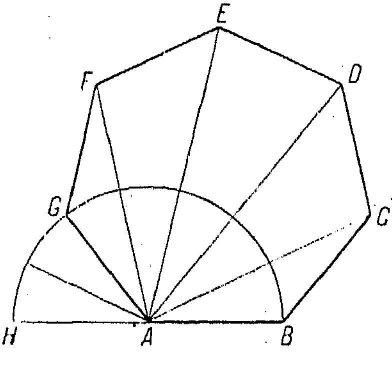


Рис. 188.

Пусть требуется начертить семиугольник. Проведем полуокружность HGB радиусом AB, равным стороне семиугольника. Разделим ее на семь равных частей и через точки деления проведем радиусы, продолжив их за пределы полуокружности. Поставим ножку циркуля в точку G и радиусом, равным стороне семиугольника, сделаем засечки F, E, D и C. Соединив их прямыми, получим искомую фигуру (рис. 188).

535. Подобные многоугольники. Два многоугольника подобны, если их стороны пропорциональны, а углы равны между собой (рис. 189).

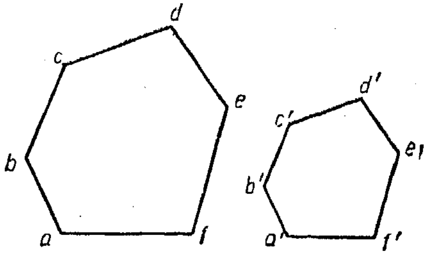


Рис. 189.

536. Построение подобных многоугольников со сторонами, находящимися в данном отношении. Из каждой вершины проводим диагонали и продолжим их, как показано на рис. 190.

Из точки B' проводим прямую $B'C'$, параллельную BC. Продолжая построение подобным же образом, получим многоугольник $AB'C'D'E'F'$, подобный данному.

Подобные многоугольники можно диагоналями разбить на треугольники, подобные друг другу и одинаково расположенные.

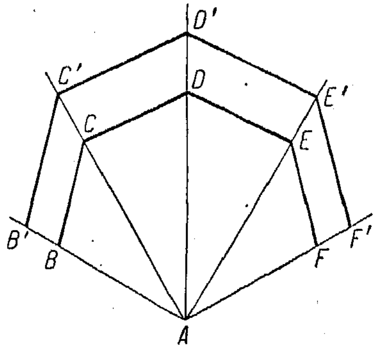


Рис. 190.

537. Круг (рис. 191).

[162] Длина окружности = диаметру $\times$ 3,1416 = радиусу $\times$ 6,2832.

[163] Площадь круга =

$$= \pi \times (\text{радиус})^2 = \frac{\text{длине окружности} \times \text{радиус}}{2} = \frac{\text{длине окружности} \times \text{диаметр}}{4} = \frac{1}{4}\pi \times (\text{диаметр})^2 = 0{,}7854\,(\text{диаметр})^2$$

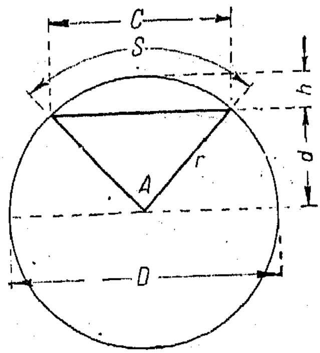


Рис. 191.

Если A — угол в радианах, то

[164] $$S = rA = 2r\ \arccos\frac{d}{r} = 2r\ \operatorname{arctg}\frac{c}{2d}.$$

[165] $$c = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2r\ \sin\frac{A}{2} = 2d\ \operatorname{tg}\frac{A}{2} = 2d\ \operatorname{tg}\frac{S}{2r}.$$

[166] $$d = \frac{\sqrt{4r^2 - c^2}}{2} = \frac{\sqrt{D^2 - c^2}}{2} = r\ \cos\frac{A}{2} = \frac{c}{2}\operatorname{ctg}\frac{A}{2} = \frac{c}{2}\ \operatorname{ctg}\frac{S}{D}.$$

[167] $$A\ (\text{в радианах}) = \frac{S}{r} = 2\ \arccos\frac{d}{r} = 2\ \operatorname{arctg}\frac{c}{2d} = 2\ \arcsin\frac{c}{D}.$$

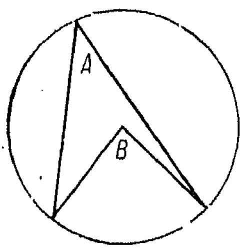


Рис. 192.

538. Вписанный угол A измеряется половиной дуги, заключенной между его сторонами. Он равен половине центрального угла B, опирающегося на ту же дугу (рис. 192).

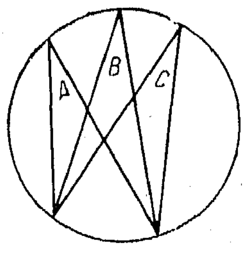


Рис. 193.

539. Все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны между собой (рис. 193).

$$\angle A = \angle B = \angle C.$$

540. Вписанный угол, опирающийся на полуокружность, равен $90°$ или $\frac{\pi}{2}$ радианам (рис. 194).

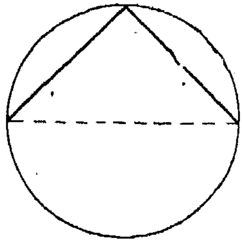


Рис. 194.

541. Если дуга, на которую опирается вписанный угол, меньше полуокружности, то угол — острый (рис. 195).

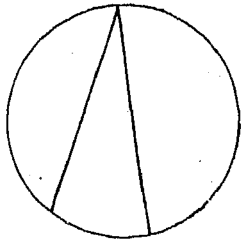


Рис. 195.

542. Если же эта дуга больше полуокружности, то угол — тупой (рис. 196).

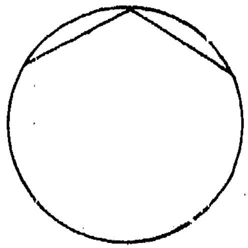


Рис. 196.

543. Угол между хордой cd и касательной cb измеряется половиной дуги dac.

Он равен половине центрального угла A, опирающегося на эту дугу (рис. 197).

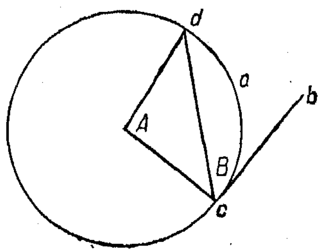


Рис. 197.

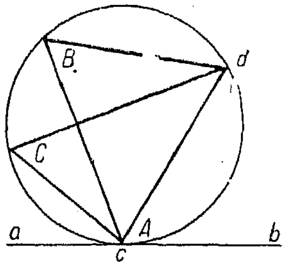


Рис. 198.

544. Угол между касательной cb и хордой cd, проведенной через точку касания, равен любому вписанному углу (например B или C), опирающемуся на ту же дугу cd (рис. 198).

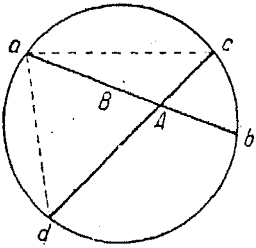


Рис. 199.

545. Если две хорды пересекаются внутри круга, то каждый из двух полученных углов измеряется полусуммой дуг, заключенных между хордами (рис. 199).

$$\angle A = \frac{1}{2}(ac + db)$$

$$\angle B = \frac{1}{2}(ad + cb).$$

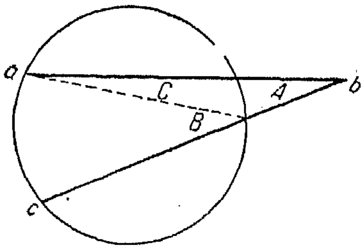


Рис. 200.

546. Если две секущие ab и cb пересекаются вне круга, то полученный угол измеряется полуразностью дуг, заключенных между сторонами (рис. 200). В самом деле

$$\angle A = \angle B - \angle C.$$

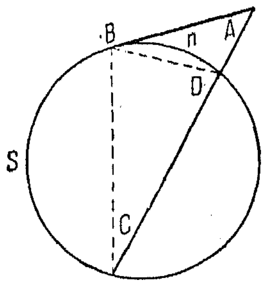


Рис. 201.

547. Угол, образованный касательной и секущей, пересекающимися вне круга, измеряется полуразностью дуг, заключенных между его сторонами (рис. 201). [**168**] $\angle A$ измеряется половиной дуги s минус половина дуги n, или

$$\angle A = \angle D - \angle C.$$

548. Угол, образованный двумя касательными к окружности, измеряется полуразностью дуг, заключенных между ними (рис. 202).

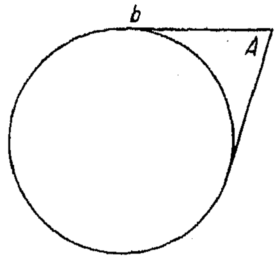


Рис. 202.

549. Если две хорды, проведенные в круге, пересекаются между собой, то произведение отрезков одной из них равно произведению отрезков другой (рис. 203).

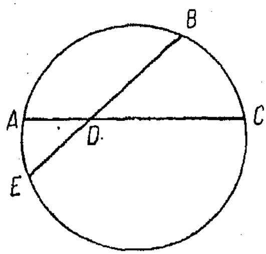


Рис. 203.

$$[169] \qquad AD \cdot DC = ED \cdot DB.$$

550. Если произвольная прямая, проходящая через точку A, пересекает окружность в точках P и Q (рис. 204), то произведение

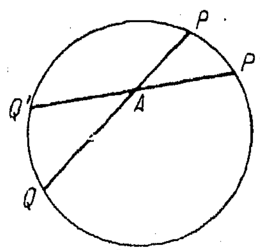


Рис. 204.

$$[170] \qquad AP \cdot AQ = \text{const}.$$

551. Если произвольная прямая проходит через точку A, лежащую вне круга, и пересекает окружность в точках P и Q (рис. 205), то

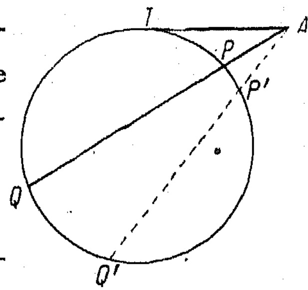


Рис. 205.

$$[171] \qquad AP \cdot AQ = AT^2,$$

где AT — длина касательной, проведенной из A.

552. Если из точки A, лежащей вне круга, провести касательную и секущую, то длина касательной AD есть среднее пропорциональное между всей секущей AD и ее внешним отрезком (рис. 206).

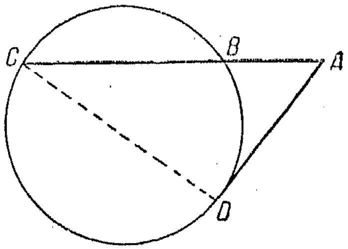


Рис. 206.

$$[172] \qquad \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AB}.$$

553. Если из точки C, лежащей вне круга, провести две секущие, то произведение длины секущей на ее внешний отрезок равно произведению второй секущей на соответственный ее отрезок (рис. 207).

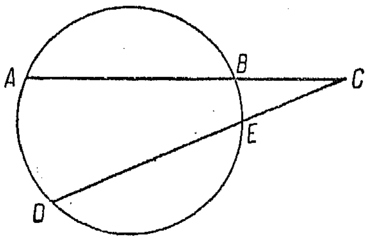


Рис. 207.

$$[173] \qquad AC \cdot BC = CD \cdot CE.$$

554. Кольцо (рис. 208).

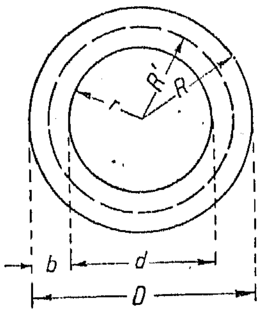


Рис. 208.

$$[174] \qquad \text{Площадь} = \pi\,(R^2 - r^2) = \frac{\pi\,(D^2 - d^2)}{4} = 2\pi R' b.$$

$$[175] \qquad R' = \frac{R + r}{2}.$$

$$[176] \qquad b = R - r.$$

555. Сектор (рис. 209).

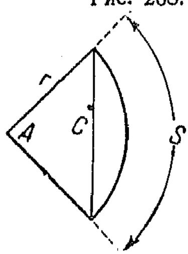


Рис. 209.

Обозначая длину хорды буквой C, имеем:

$$[177] \qquad C = 2r\,\sin\frac{A}{2} \quad (A \text{ выражен в радианах}).$$

$$[178] \qquad C = 2r\,\sin\left(\frac{90S}{\pi r}\right)^{\circ},$$

где S — длина дуги,

$$S=\frac{\pi rA}{180}(A \text{ выражен в градусах})$$

$$S=rA\ (A \text{ — в радианах}).$$

[179] $$\text{Площадь}=\frac{rS}{2}=\frac{\pi r^2A}{360^\circ}\ (A \text{ — в градусах}).$$

556. Площадь части кольца (рис. 210).

[180] $$\text{Площадь}=\pi\frac{A(R^2-r^2)}{360^\circ},$$

где A — угол в градусах.

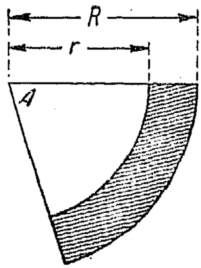


Рис. 210.

557. Сегмент (рис. 211).

[181] $C=\text{хорде}=2r\sin\frac{A}{2}$ (A выражен в радианах или в градусах).

[182] $S=\text{длине дуги}=$
$$=\frac{\pi rA}{180^\circ}\ (A \text{ — в градусах}),$$
$$S=2r\frac{A}{2}=rA\ (A \text{ — в радианах}).$$

[183] $h=r-d=r\left(1-\cos\frac{A}{2}\right)$ (A — в радианах или градусах).

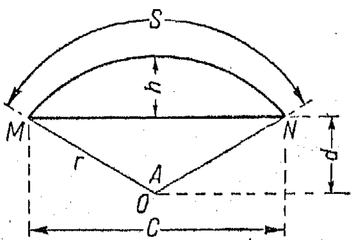


Рис. 211.

[184] $$d=r\cos\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{4r^2-C^2}}{2}$$

(здесь A — в радианах или градусах).

558. Площадь кругового сегмента. Площадь сегмента равна площади сектора $MONS$ (рис. 211) минус площадь треугольника MON.

[**185**] $$\text{Площадь} = \frac{r^2}{2}(A - \sin A) = \frac{r}{2}\left(S - r\sin\frac{S}{r}\right),$$

где A и $\frac{S}{r}$ — в радианах.

$$\text{Площадь} = r^2 \arccos\frac{d}{r} - d\sqrt{r^2 - d^2},$$

здесь $\arccos\frac{d}{r}$ — в радианах.

$$\text{Площадь} = r^2 \arccos\frac{r-h}{r} - (r-h)\sqrt{2rh - h^2},$$

здесь $\arccos\frac{r-h}{r}$ — в радианах.

[**186**] $$\text{Площадь} = \frac{r(S-C) + Ch}{2} = r^2 \arcsin\frac{C}{2r} - \frac{C}{4}\sqrt{4r^2 - C^2},$$

где $\arcsin\frac{C}{2r}$ — в радианах.

Последняя из приведенных формул действительна для сегментов, меньших полукруга. Если же он превышает полукруг, то его площадь можно получить путем вычитания меньшего сегмента из площади круга.

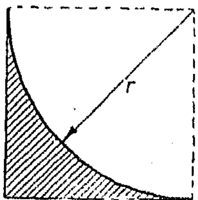


Рис. 212.

Площадь сегмента равна площади круга минус площадь сегмента MNS.

Площадь между сторонами квадрата и вписанной в него четвертью окружности (рис. 212) находится из формулы:

[**187**] $$\text{Площадь} = 0{,}215r^2 \approx \frac{1}{5}r^2\ ^{1)}.$$

---

1) Истинное выражение площади, заключенной между сторонами квадрата и вписанной в квадрат четвертью окружности, дается формулой

$$\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)r^2 \approx (1 - 0{,}785)\,r^2 \approx 0{,}215r^2$$

Прим. ред.

559. Эллипс. Эллипс есть кривая, для которой сумма расстояний от точек ее до двух данных точек (называемых фокусами), есть величина постоянная (рис. 213 и 214).

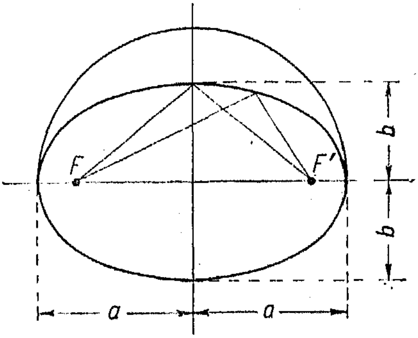


Рис. 213.

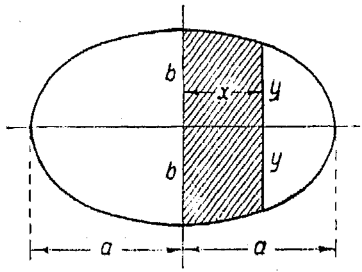


Рис. 214.

[188] Длина кривой $\approx a\,[4 + 1{,}1\, m + 1{,}2\, m^2]$,

где $m = \dfrac{b}{a}$.

[189] Площадь $= \pi\, ab$.

[190] Площадь заштрихованного сегмента $= xy + ab \arcsin \dfrac{x}{a}$.

560. Парабола. Параболой называется кривая, каждая точка которой находится в одинаковом расстоянии от заданной прямой (директрисы) и заданной точки, называемой фокусом (рис. 215 и 216).

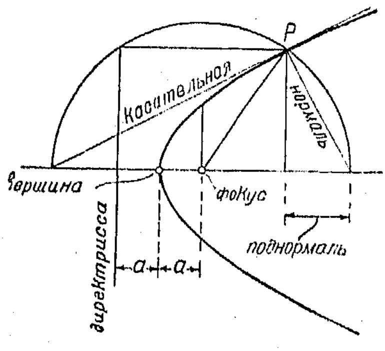


Рис. 215.

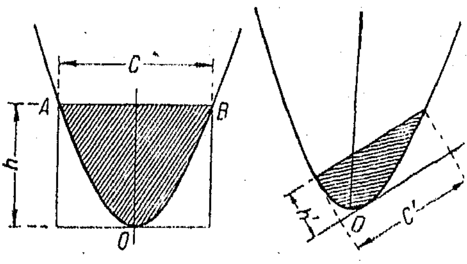


Рис. 216.

[191] Длина дуги $AOB =$

$$= \frac{c}{2}\left[\sqrt{n^2+1} + \frac{1}{n}\lg_e\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)\right] =$$

$$= \frac{c}{2}\left[\sqrt{n^2+1} + \frac{1}{n}\operatorname{arc\,sinh} n\right],$$

где $n = \frac{4h}{c}$.

Площадь сегмента, отсекаемого хордой C или C', равняется $\frac{2}{3}Ch$ или $\frac{2}{3}C'h'$.

Площадь сегмента эквивалентна двум третям площади прямоугольника со сторонами C и h.

561. Гипербола. Гипербола есть кривая, разность расстояний всех точек которой от двух заданных точек (фокусов) есть величина постоянная (рис. 217 и 218).

[192] Заштрихованная площадь $= ab\cdot\lg_e\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)$.

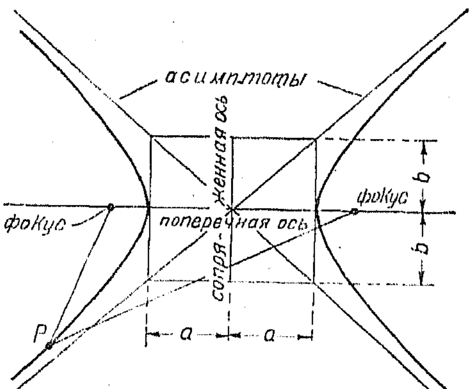


Рис. 217.

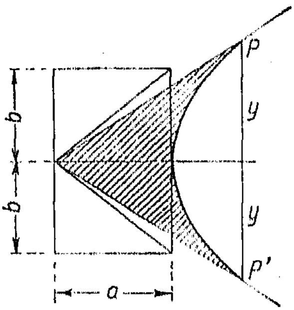


Рис. 218.

В равнобочной гиперболе $a = b$.

[193] Заштрихованная площадь $= a^2\lg\left(\frac{x+y}{a}\right) =$

$$= a^2\lg\left(\frac{a}{x-y}\right) = a^2 \operatorname{arc\,sh}\frac{y}{a} = a^2\operatorname{arc\,ch}\frac{x}{a}.$$

562. Циклоида. Кривая, которую описывает точка окружности, когда последняя катится по неподвижной прямой, называется *циклоидой* (рис. 219).

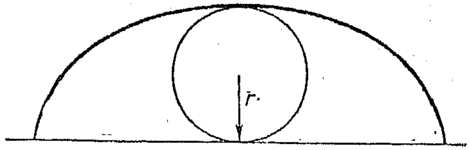


Рис. 219.

[194] Длина дуги $S = 8r$.

[195] Площадь $= 3\pi r^2$.

563. Площади неправильной формы. Для определения площадей неправильной формы применяется способ Симпсона, заключающийся в следующем:

Разделим данную фигуру на четное число полос одинаковой ширины. Чем меньше будет эта ширина, тем точнее окажется результат (рис. 220).

Затем пользуются формулой:

[196] $$\text{Площадь} = \frac{h}{3}\left[(y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \ldots) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \ldots)\right].$$

Соответствующие обозначения указаны на рис. 220, причем приведенную формулу можно выразить так:

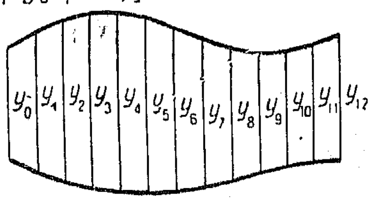


Рис. 220.

Площадь равна произведению одной трети ширины взятой полоски на сумму следующих величин: первой и последней ординаты, учетверенной суммы ординат с нечетными значками и удвоенной суммы ординат с четными значками.

Из последней суммы исключается первая и последняя ординаты.

Поверхности и объем тел.

564. Куб (рис. 221).

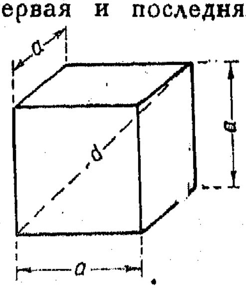


Рис. 221.

[197] Объем $= a^3$.

[198] Полная поверхность $= 6a^2$.

[199] Диагональ $= a\sqrt{3}$.

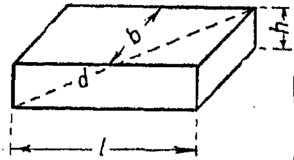


Рис. 222.

565. Параллелепипед (рис. 222).

[200] Объем = площади основания $\times$ высоту.

[201] Полная поверхность $= 2(lb + lh + bh)$.

[202] Диагональ $d = \sqrt{b^2 + l^2 + h^2}$.

566. Правильная шестигранная призма (рис. 223).

[203] Объем $= \frac{3}{2}\sqrt{3}\,a^2h = 2{,}6\;a^2h = \frac{1}{2}\sqrt{3}\;f^2h = 0{,}866\,f^2h$.

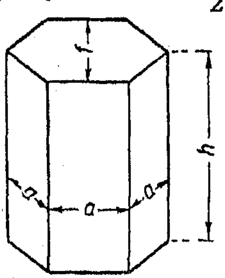


Рис. 223.

[204] Боковая поверхность $= 6ah = 2\sqrt{3}\;fh = 3{,}46\,fh$.

[205] Площадь основания $= \frac{3}{2}\sqrt{3}\,a^2 = 2{,}6\;a^2$.

[206] Полная поверхность $= 6a\left(h + \frac{\sqrt{3}}{2}a\right) = 6a\;(h + 0{,}866a)$.

567. Правильная восьмигранная призма (рис. 224).

[207] Объем $= 2\;(\sqrt{2} + 1)a^2h = 4{,}83a^2h = \frac{2\;(1 + \sqrt{2})}{1 + 2\sqrt{2} + 2}\;f^2h = 0{,}829\,f^2h$.

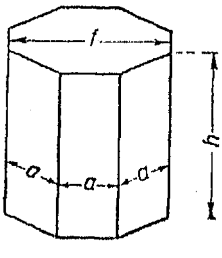


Рис. 224.

[208] Боковая поверхность $= 8ah = \frac{8}{1 + \sqrt{2}}\,fh = 3{,}32\,fh$.

[209] Площадь основания $= 2(1 + \sqrt{2})\;a^2 = 4{,}828\;a^2$.

[210] Полная поверхность $= 8a\left\{h + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)a\right\} = 8a\;(h + 1{,}207a)$.

568. Прямой круглый цилиндр (рис. 225).

[211] Объем $= \pi r^2 h = 0{,}7854\ d^2 h.$

[212] Боковая поверхность $= 2\pi r h.$

[213] Площадь основания $= \pi r^2.$

[214] Общая поверхность $= 2\pi r\ (h + r).$

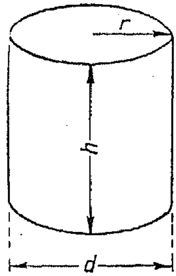


Рис. 225.

569. Полый цилиндр (рис. 226).

[215] Объем $= \pi h\ (R^2 - r^2).$

[216] Внешняя боковая поверхность $=$
$= 2\pi R h.$

[217] Внутренняя боковая поверхность $= 2\pi r h.$

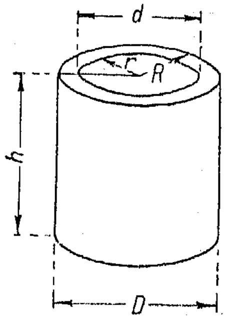


Рис. 226.

570. Любая призма или цилиндр (рис. 227).

[218] Объем $=$
$= h \times$ площадь основания.

[219] Боковая поверхность $=$
$= l \times$ периметр перпендикулярного сечения.

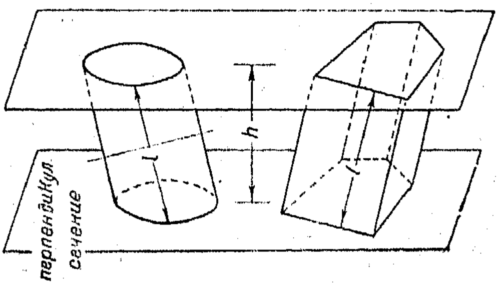


Рис. 227.

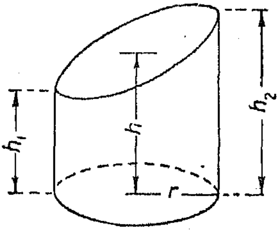


Рис. 228.

571. Усеченный прямой круглый цилиндр (рис. 228).

[220] $h =$ средняя высота $= \frac{h_1 + h_2}{2}$.

[221] Объем $= \pi r^2 h = h \times$ площадь основания.

[222] Боковая поверхность $= 2\pi r h$.

572. Усеченная призма или цилиндр любого вида.

[223] Объем = расстояние между центрами тяжести оснований $\times$ площадь перпендикулярного сечения.

[224] Боковая поверхность = периметру перпендикулярного сечения $\times$ расстояние между центрами тяжести двух периметров.

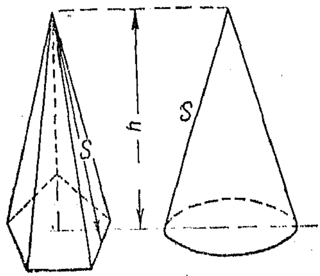


Рис. 229.

573. Правильная пирамида или конус (рис. 229).

[225] Объем $= \frac{1}{3}$ (площадь основания $\times$ высоту).

[226] Боковая поверхность = полупериметру основания $\times$ апофему S.

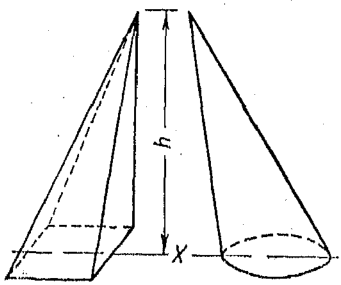


Рис. 230.

574. Любая пирамида или конус (рис. 230).

[227] Объем $= \frac{1}{3}$ (площади основания $\times$ расстояние от вершины до плоскости основания).

575. Усеченная пирамида или конус (рис. 231).

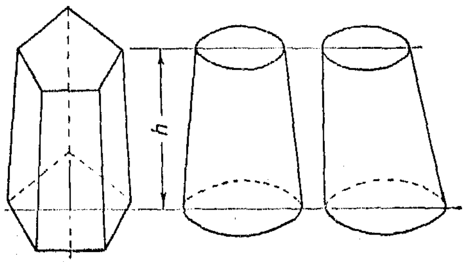


Рис. 231.

[**228**] $$\text{Объем} = \frac{h}{3}(A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 \cdot A_2}),$$

где A_1 и A_2 — площади оснований, параллельные между собой.

576. Шар (рис. 232).

[**229**] $$\text{Объем} = \frac{4}{3}\pi r^3 = 4{,}1888\ r^3 = \frac{\pi}{6} D^3 = 0{,}5236\ D^3.$$

[**230**] $$\text{Поверхность} = 4\pi r^2 = 12{,}5664 r^2 = \pi D^2.$$

Поверхность шара равна боковой поверхности описанного вокруг него цилиндра.

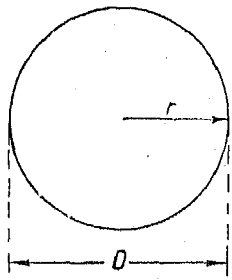


Рис. 232.

577. Полый шар (рис. 233).

[**231**] $$\text{Объем} \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3) = 4{,}1888\ (R^3 - r^3) = \frac{\pi}{6}(D^3 - d^3) = 0{,}5236\ (D^3 - d^3) = 4\pi R_1^2 t + \frac{\pi}{3} t^3,$$

где R_1 — средний радиус, равный $\frac{R+r}{2}$, а t — толщина оболочки.

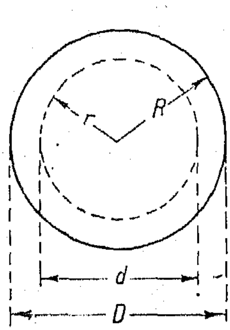


Рис. 233.

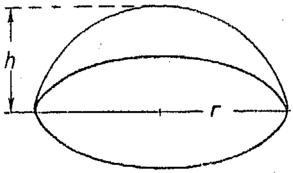


Рис. 234.

578. Сферический сегмент (рис. 234).

[**232**] Объем сегмента с одним основанием $=\frac{\pi h}{6}(3r^2+h^2)=0{,}5236\ (h^2+3r^2)$.

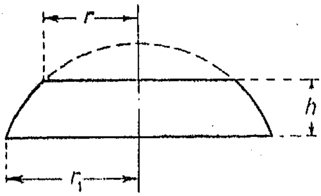


Рис. 235.

579. Шаровой слой (рис. 235).

[**233**] Объем шарового слоя $=$

$$=\frac{\pi h}{6}\left[3\left(r_1^2+r^2\right)+h^2\right].$$

[**234**] Поверхность $=2\pi Rh$.

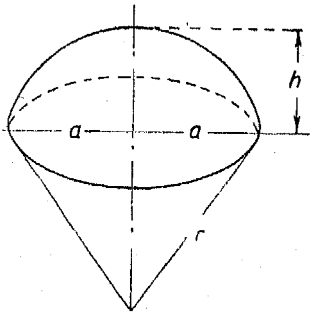


Рис. 236.

580. Сферический сектор (рис. 236).

[**235**] Объем $=\frac{2}{3}\pi r^2 h$.

[**236**] Полная поверхность $=2\pi rh+$
$+\pi ra=\pi r\ (2h+a)$.

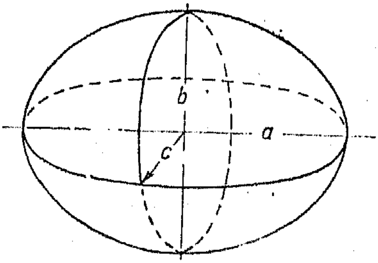


Рис. 237.

581. Эллипсоид (рис. 237).

[**237**] Объем $=\frac{4}{3}\pi abc=$

$$=4{,}1888\ abc.$$

582. Параболоид вращения (рис. 238).

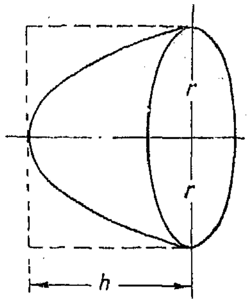


Рис. 238.

[**238**] Объем $= \frac{\pi}{2} r^2 h = \frac{1}{2}$ объема описанного цилиндра.

583. Параболический слой (рис. 239).

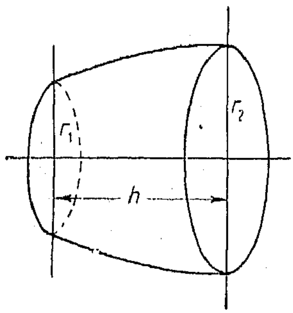


Рис. 239.

[**239**] Объем $= \frac{1}{2} \pi h (r_1^2 + r_2^2)$.

584. Кольцо (тор) (рис. 240).

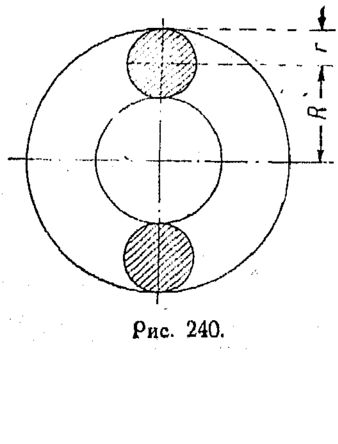


Рис. 240.

[**240**] Объем $= 2\pi^2 R r^2$.

[**241**] Поверхность $= 4\pi^2 R r$.

Формулы для призматоидов[1])

585. Для нахождения объема призматоидов, имеем:

[**242**] $$\text{Объем} = \frac{L}{6}(A + B + 4M),$$

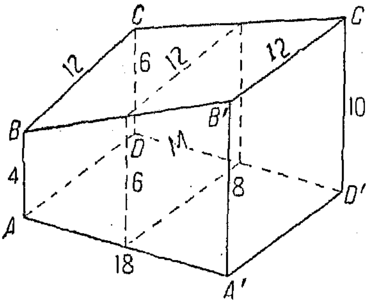


Рис. 24

где L — расстояние между параллельными гранями, A и B — площади этих граней, M — площадь среднего сечения, проходящего на одинаковом расстоянии от параллельных граней.

Эта формула очень полезна для определения вычисления объема выемок.

В случае рис. 241 имеем:

$$\text{Площадь } A = 60,\ B = 108,\ M = 84,\ L = 18.$$

$$\text{Объем} = \frac{18}{6}(60 + 108 + 4 \cdot 84) = 1512.$$

586. Клиновидное тело. Формула для призматоида может быть применена к выемке клиновидной формы (рис. 242).

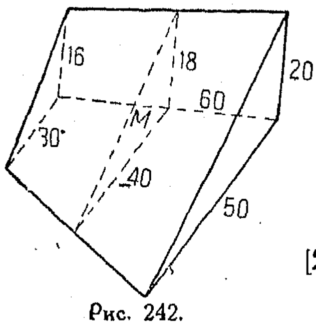


Рис. 242.

$$A = \frac{30 \times 16}{2} = 240.$$

$$B = \frac{50 \times 20}{2} = 500.$$

$$M = \frac{40 \times 18}{2} = 360.$$

[**243**] $$\text{Объем} = \frac{60}{6}(240 + 500 + 4 \cdot 360) = 21800$$

В железнодорожной выемке с уклоном откосов $S:1$ с той и другой стороны

$$\text{площадь } ABCD = h\ (2a + hS),$$

[1]) Призматоидом называется тело, ограниченное двумя параллельными основаниями и произвольным числом боковых граней. *Прим. ред.*

где $2a$ — основание выемки, h — высота от гребня до основания выемки.

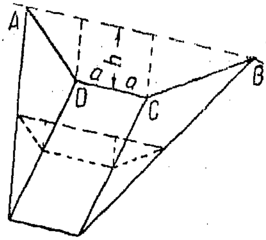


Рис. 243.

Применяя формулу для призматоидов, получим (рис. 243):

$$\text{Объем} = \frac{L}{6}(A + B + 4M). \quad [242]$$

Для случая, показанного на рис. 244,

$$[244] \quad \text{площадь сечения} = \frac{mn - a^2}{S} \text{ [1]}.$$

Уклон откоса, как и в предыдущем примере, равен $S:1$.

Для определения объема здесь также можно применить формулу [242].

Эту же формулу применяют и для железнодорожных насыпей.

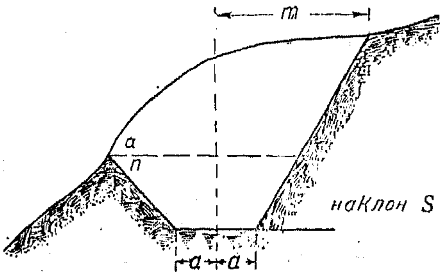
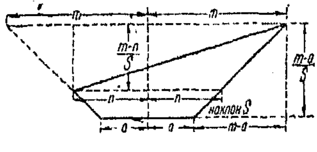


Рис. 244.

---

[1]) Формула [244] для площади сечения получается из формул для площади трапеции и треугольника. Площадь данного сечения можно рассма-



тривать как разность между площадью трапеции с основаниями $2m$, $2a$ и высотой $\frac{m-a}{S}$ и треугольником с основанием $2m$ и высотой $\frac{m-a}{S}$. Разность площадей этих фигур равна:

$$\frac{2m + 2a}{2} \cdot \frac{m-a}{S} - \frac{2m}{2} \cdot \frac{m-n}{S} = \frac{m^2 - a^2}{S} - \frac{m^2 - mn}{S} = \frac{mn - a^2}{S}$$

Прим. ред.

587. Правило Симпсона для определения объемов. Для нахождения объема неправильной фигуры следует вычислить площади A_0, A_1, A_2 и т. д. и подставить их в формулу

$$[245] \quad \text{Объем} = \frac{h}{3}[(A_0 + A_n) + 4(A_1 + A_3 + A_5 + \ldots) + 2(A_2 + A_4 + \ldots)].$$

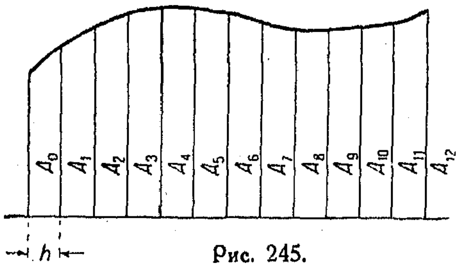


Рис. 245.

Необходимо брать четное число слоев одинаковой толщины.

[245] A_0 — площадь первой, A_n — последней поверхности, A_1, A_3, A_5 — площади с нечетными значками, A_2, A_4, A_6... — площади с четными значками.

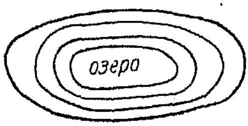


Рис. 246.

588. Объем воды (в прудах) может быть вычислен по формуле Симпсона, для чего предварительно необходимо найти площади сечения по горизонталям (контурам) (рис. 246).

Глава XXIII.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ.

589. Угол характеризуется величиной поворота прямой около неподвижной точки.

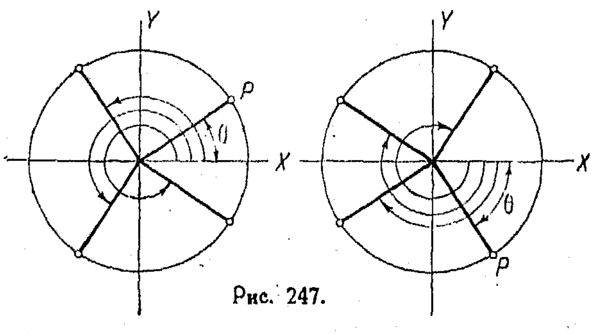


Рис. 247.

Если это вращение производится в направлении против часовой стрелки, то угол считается положительным.

При вращении по часовой стрелке угол считается отрицательным.

Величина угла не ограничена никакими пределами.

Наиболее распространенными единицами для измерения величин углов являются градус и радиан.

В градусной системе за единицу принимается $\frac{1}{360}$ полного поворота $\left(\text{т. е. } \frac{1}{90} \text{ прямого угла}\right)$.

590. В радиальной системе измерения за единицу принят центральный угол, дуга которого имеет длину, равную радиусу. Такой угол называется *радианом*.

Длина окружности $= 2\pi r$, следовательно, ей соответствует

$$\frac{2\pi r}{r} = 2\pi = 6{,}2832 \text{ радианов.}$$

С другой стороны, окружность соответствует 360°, поэтому

$$2\pi \text{ радианов} = 360^\circ$$

$$\pi \text{ радианов} = 180^\circ$$

$$1 \text{ радиан} = \frac{180}{\pi} = 57{,}29578^\circ = 57^\circ 17' 44'',8$$

$$1 \text{ градус} = \frac{\pi}{180} = 0{,}0174533 \text{ радиана.}$$

591. При изучении тригонометрии мы будем рассматривать во-первых, соотношения между различными функциями угла при определенном положении его подвижной стороны, а во-вторых, самые углы как меру поворота указанной стороны при ее непрерывном вращении. В последнем смысле приходится рассматривать углы, когда идет речь о скорости вращения.

592. Пусть дано несколько концентрических окружностей и центральный угол AOB (рис. 248). Как известно,

$$\frac{\text{дуга } P_1Q_1}{OP_1} = \frac{\text{дуга } P_2Q_2}{OP_2} = \frac{\text{дуга } P_3Q_3}{OP_3},$$

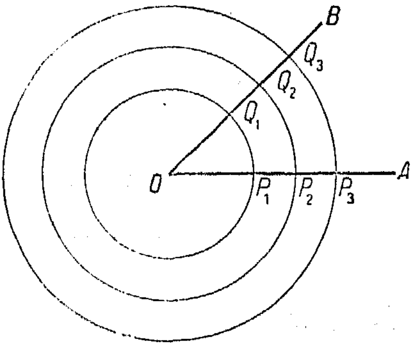


Рис. 248.

т. е. для дуг, заключенных между сторонами одного и того же угла, отношение их длины к соответствующим радиусам есть величина постоянная.

Центральный угол, у которого это отношение равно единице, весьма удобен для измерения углов и, как сказано выше, называется *радианом*.

В одном и том же круге или в равных кругах два центральные угла относятся друг к другу как соответствующие им дуги (рис. 249):

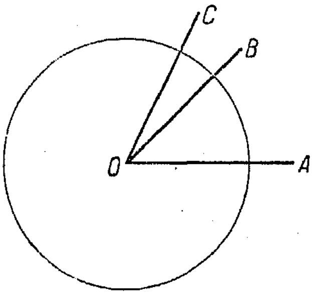


Рис. 249.

$$\frac{\angle AOB}{\angle AOC} = \frac{\text{дуга } AB}{\text{дуге } AC}.$$

Таким образом, если угол AOC равен единице, то дуга AC равна радиусу r:

$$\angle AOB = \frac{\text{дуге } AB}{r}$$

или вообще (см. **[164]** и следующие)

$$\theta = \frac{S}{r},$$

где θ — центральный угол, выраженный в радианах, S — длина соответствующей дуги, проведенной радиусом r.

Отюда $S = r\theta$, т. е. длина дуги равна произведению радиуса на центральный угол (выраженный в радианах).

593. Координаты. Положение точки P на плоскости можно определить прямоугольными координатами x и y, что не требует пояснений, или полярными координатами.

В последней системе положение точки определяется длиной прямой r, соединяющей ее с началом координат и называемой *радиусом-вектором*, и углом A, который называется *полярным углом* (амплитудой) (рис. 250).

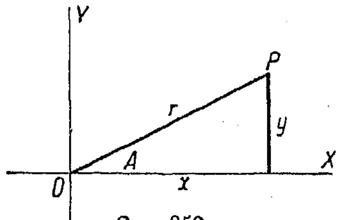


Рис. 250.

Радиус-вектор обычно обозначается буквой ρ, а полярный угол—буквой θ.

594. Функции угла. Расположим вершину угла в начале координат, а неподвижную (начальную) сторону его совместим с положительным направлением оси X. Пусть подвижная сторона угла занимает различные положения относительно неподвижной. Обозначим координаты произвольной точки P на этой стороне буквами x и y, а расстояние от начала координат—буквой r (рис. 251).

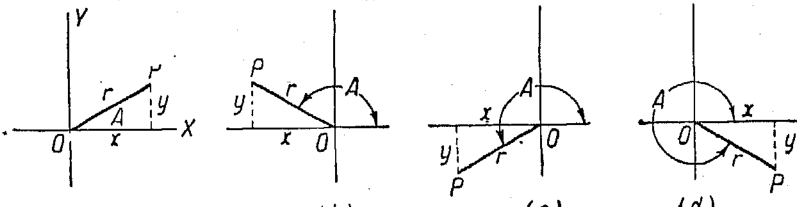


Рис. 251.

Отношения между x, y и r будут называться *тригонометрическими* функциями угла A.

Знак r будет всегда приниматься положительным. Знак же самой функции определится знаками координат точки P, т. е. будет соответствовать квадранту, в котором эта точка находится.

Указанные отношения имеют следующие названия:

[246] Синус A $(\sin A) = \dfrac{y}{r}$ **[247]** Косинус A $(\cos A) = \dfrac{x}{r}$

[248] Тангенс A $(\operatorname{tg} A) = \dfrac{y}{x}$ **[249]** Котангенс A $(\operatorname{ctg} A) = \dfrac{x}{y}$

[250] Секанс A $(\sec A) = \dfrac{r}{x}$ **[251]** Косеканс A $(\operatorname{cosec} A) = \dfrac{r}{y}$.

Полагая длину радиуса равной единице, получим:

[252] $\sin A = y$ [253] $\cos A = x$

[254] $\sec A = \frac{1}{x}$ [255] $\operatorname{cosec} A = \frac{1}{y}$.

Из геометрии известно, что $x^2 + y^2 = r^2$, поэтому

[256] $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y}{\sin A} = \frac{x}{\cos A} = x \sec A = y \operatorname{cosec} A$.

[257] $x = \sqrt{r^2 - y^2} = r \cos A = \frac{y}{\operatorname{tg} A} = y \operatorname{ctg} A = \frac{r}{\sec A}$.

[258] $y = \sqrt{r^2 - x^2} = r \sin A = x \operatorname{tg} A = \frac{x}{\operatorname{ctg} A} = \frac{r}{\operatorname{cosec} A}$.

595. Из формул [246] — [251] получим следующие соотношения между тригонометрическими функциями:

[259] $\sin A = \frac{1}{\operatorname{cosec} A}$ [260] $\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}$

[261] $\cos A = \frac{1}{\sec A}$ [262] $\sec A = \frac{1}{\cos A}$

[263] $\operatorname{tg} A = \frac{1}{\operatorname{ctg} A}$ [264] $\operatorname{ctg} A = \frac{1}{\operatorname{tg} A}$.

596. Функции некоторых углов. Из геометрии известно, что в прямоугольном треугольнике, один из острых углов которого равен 30°, катет, лежащий против этого угла, равняется половине гипотенузы. Полагая y равным единице, получим из формул [246]—[251]

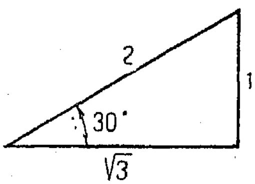


Рис. 252.

$$\sin 30° = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3}$$

$$\sec 30° = \frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{cosec} 30° = 2.$$

Аналогичным образом можно вычислить функции углов 45° и 60°.

597. Если угол равен 90°, то, выбирая точку P на его подвижной стороне в расстоянии a от начала координат, получим $r=a$. Координаты точки P будут 0 и $r=a$, следовательно,

$$\sin 90^\circ=\frac{y}{r}=\frac{a}{a}=1$$

$$\cos 90^\circ=\frac{x}{r}=\frac{0}{a}=0$$

$$\mathrm{tg}\, 90^\circ=\frac{y}{x}=\frac{a}{0}=\infty$$

$$\mathrm{ctg}\, 90^\circ=\frac{x}{y}=\frac{0}{a}=0$$

$$\sec 90^\circ=\frac{r}{x}=\frac{a}{0}=\infty$$

$$\mathrm{cosec}\, 90^\circ=\frac{r}{y}=\frac{a}{a}=1.$$

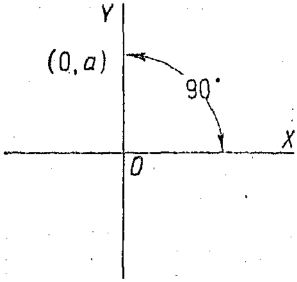


Рис. 253.

Обозначения $\mathrm{tg}\, 90^\circ=\infty$ и $\sec 90^\circ=\infty$ имеют тот смысл, что для данного положения стороны эти функции не могут получить конечное значение.

598. Для угла 120° можно получить соотношение между сторонами из уже рассмотренного случая угла 30°, но так как x во второй четверти отрицателен, то он будет равен (-1).

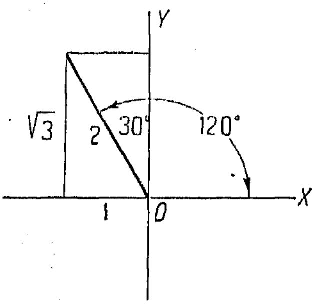


Рис. 254.

$$\sin 120^\circ=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\cos 120^\circ=\frac{x}{r}=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{tg}\, 120=\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3}$$

$$\mathrm{ctg}\, 120^\circ=\frac{x}{y}=\frac{-1}{\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 120^\circ=\frac{r}{x}=\frac{2}{-1}=-2$$

$$\mathrm{cosec}\, 120^\circ=\frac{r}{y}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

Рассуждая таким же образом, можем составить таблицу значений тригонометрических функций для часто встречающихся углов.

θ в градусах	θ° в радианах	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\operatorname{tg}\theta$	$\operatorname{ctg}\theta$	$\sec\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$	Хорды
0	0	0	1	0	∞	1	∞	0
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\sqrt{2-\sqrt{3}}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2-\sqrt{2}}$
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0	∞	1	$\sqrt{2}$
120	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	-2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
135	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	-1	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2+\sqrt{2}}$
150	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{-2\sqrt{3}}{3}$	2	$\sqrt{2+\sqrt{3}}$
180	π	0	-1	0	∞	-1	∞	2
210	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{-2\sqrt{3}}{3}$	-2	$\sqrt{2+\sqrt{3}}$
225	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	1	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2+\sqrt{2}}$
240	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-2	$\frac{-2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
270	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	∞	0	∞	-1	$\sqrt{2}$
300	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{-2\sqrt{3}}{3}$	1
315	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2-\sqrt{2}}$
330	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2	$\sqrt{2-\sqrt{3}}$
360	2π	0	1	0	∞	1	∞	0

599. Графическое изображение тригонометрических функций во всех четырех квадрантах при радиусе, равном единице:

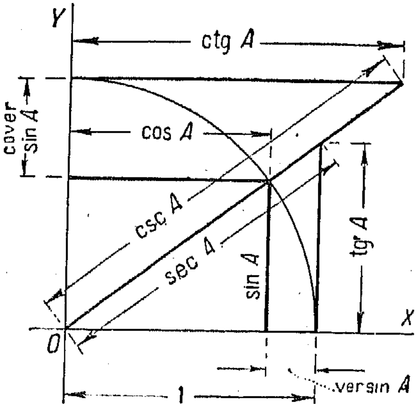


Рис. 255.

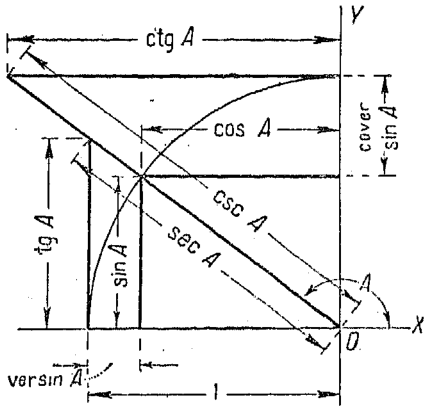


Рис. 256.

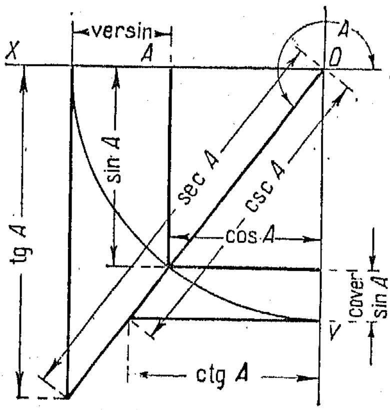


Рис. 257.

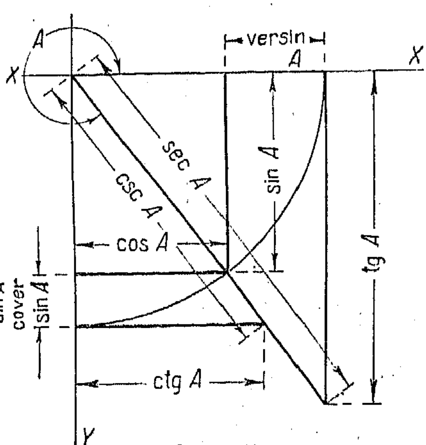


Рис. 258.

В качестве единицы можно взять отрезок любой длины, например 10 см. В таком случае величина функции будет равняться частному от деления длины соответствующей линии (т. е. линии синуса, линии косинуса и т. д.), измеренной в сантиметрах, на 10.

600. Дополнительные углы. Во всяком прямоугольном треугольнике сумма $\angle A$ и $\angle B$ равна $90°$, т. е. каждый из них является дополнительным другого до $90°$, поэтому любая тригонометрическая функция одного из этих углов равна функции другого угла с приставкой „со" „(ко)". Таким образом, косинус, котангенс и косеканс являются синусом, тангенсом и секансом дополнительного угла (рис. 259):

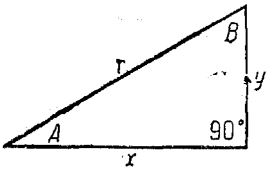


Рис. 259.

$$\sin A = \cos(90 - A) = \cos B.$$

601. Знаки тригонометрических функций. Для определения знака функции рассмотрим знаки координат точки P на подвижной стороне угла (рис. 260a)

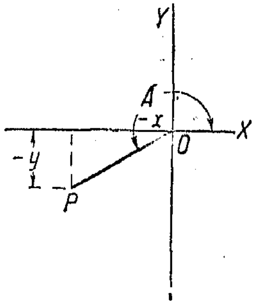


Рис. 260a.

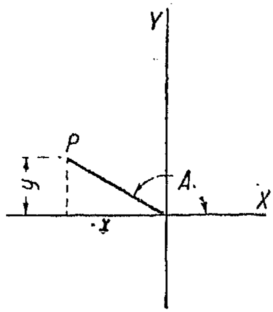


Рис. 260b.

$$\operatorname{tg} A = \frac{-y}{-x} \text{ (знак } +)$$

и (рис. 260b)

$$\operatorname{tg} A = \frac{y}{-x} \text{ (знак } -).$$

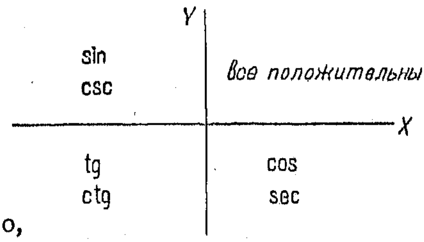


Рис. 261.

На рис. 261 показано, какие функции в данном квадранте положительны. Так, например, если угол находится в I или IV квадранте, то его косинус положителен, а если—во II или III, то косинус отрицателен.

602. Функции отрицательных углов. Начертим углы A и $-A$. Пусть OP — положение подвижной стороны угла A, а OP' — положение подвижной стороны угла $-A$ во всех четырех квадрантах (рис. 262).

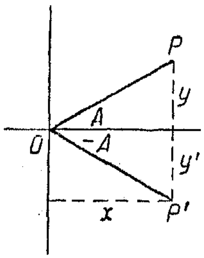


Рис. 262a.

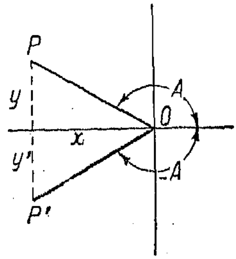


Рис. 262b.

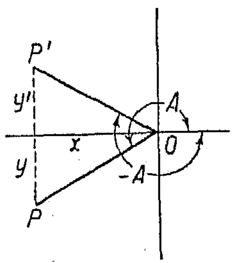


Рис. 262c.

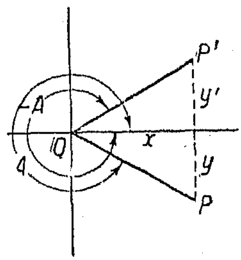


Рис. 262d.

Если обозначим координаты точек P и P' через (x, y) и (x', y') соответственно, то получим:

$$x = x', \quad y = -y', \quad r = r',$$

следовательно

$$\sin(-A) = \frac{y'}{r'} = \frac{-y}{r} = -\sin A$$

$$\cos(-A) = \frac{x'}{r'} = \frac{x}{r} = \cos A$$

$$\operatorname{tg}(-A) = \frac{y'}{x'} = \frac{-y}{x} = -\operatorname{tg} A$$

$$\operatorname{ctg}(-A) = \frac{x'}{y'} = \frac{x}{-y} = -\operatorname{ctg} A$$

$$\sec(-A) = \frac{r'}{x'} = \frac{r}{x} = \sec A$$

$$\operatorname{cosec}(-A) = \frac{r'}{y'} = \frac{r}{-y} = -\operatorname{cosec} A.$$

603. Функции углов $\left(n\frac{\pi}{2} \pm \theta\right)$, например, $\sin(90° + \theta)$, $\cos(180° - \theta)$, $\sin(\theta - 90°)$ и т. д.

Для приведения этих углов к соответствующим острым (меньшим 90°), следует выразить данный угол в виде суммы угла кратного 90°, или $\frac{\pi}{2}$, и угла, меньшего 90°, например,

$$n\frac{\pi}{2} \pm \theta \quad \text{или} \quad n \cdot 90° \pm \theta.$$

Если n—четное, то названия функций данного угла будут одинаковы с названиями функций соответствующего острого. Если же n — нечетное, то название функций острого угла следует изменить на обратное, т. е. добавить приставку „со" (см. n⁰ 600). В обоих случаях функциям острого угля θ следует приписать те знаки, которые соответствуют знакам функций первоначального угла. Если, например, угол $\left(n\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ лежит в III квадранте, то координаты точки в этом квадранте определят знак функций (см. n⁰ 601).

Пример. $\sin 680° = \sin(7 \times 90 + 50)$. Так как n—число нечетное и синус в IV квадранте—отрицателен, то

$$\sin 680° = -\cos 50°.$$

604. Соотношения между тригонометрическими функциями угла.

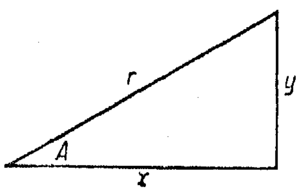


Рис. 263.

$$\sin A = \frac{y}{r} \qquad [246]$$

$$\cos A = \frac{x}{r} \qquad [247]$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{y}{x} \qquad [248]$$

$$\operatorname{ctg} A = \frac{x}{y} \qquad [249]$$

$$\sec A = \frac{r}{x} \qquad [250]$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{r}{y} \qquad [251]$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y}{\sin A} = \frac{x}{\cos A} = x \sec A = y \cos A \qquad [256]$$

$$x = \sqrt{r^2 - y^2} = r \cos A = \frac{y}{\operatorname{tg} A} = y \operatorname{ctg} A = \frac{r}{\sec A} \qquad [257]$$

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} = r \sin A = x \operatorname{tg} A = \frac{x}{\operatorname{ctg} A} = \frac{r}{\operatorname{cosec} A} \qquad [258]$$

[265] $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

[266] $\sec^2 A - \operatorname{tg}^2 A = 1$

[267] $\operatorname{cosec}^2 A - \operatorname{ctg}^2 A = 1$

[268] $\sin A \cdot \operatorname{cosec} A = 1$ [259], [260]

[269] $\cos A \cdot \sec A = 1$ [261], [262]

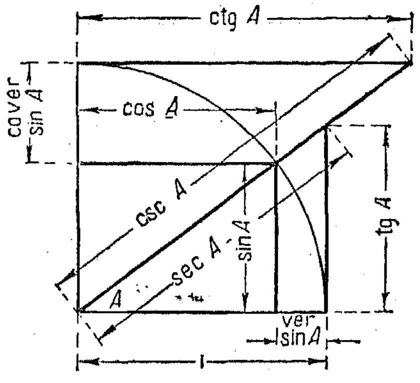


Рис. 264.

[270] $\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{ctg} A = 1$ [263], [264]

[271] $\sin A < A < \operatorname{tg} A$ (если $0 < A < 90°$).

$$\lim_{A \to 0} \left[\frac{A}{\sin A}\right] = 1.$$

[272] $$\sin A = \frac{\cos A}{\operatorname{ctg} A} = \frac{1}{\operatorname{cosec}} = \cos A \cdot \operatorname{tg} A = \sqrt{1-\cos^2 A} =$$
$$= \frac{\operatorname{tg} A}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 A}} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 A}} = \frac{\sqrt{\sec^2 A - 1}}{\sec A} =$$
$$= 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2A}{2}}.$$

[273] $$\cos A = \frac{\sin A}{\operatorname{tg} A} = \frac{1}{\sec A} = \sin A \cdot \operatorname{ctg} A =$$
$$= \sqrt{1-\sin^2 A} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 A}} = \frac{\operatorname{ctg} A}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 A}} =$$
$$= \frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 A - 1}}{\operatorname{cosec} A} = \cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2A}{2}}.$$

[274] $$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{1}{\operatorname{ctg} A} = \sin A \cdot \sec A = \sqrt{\sec^2 A - 1} =$$
$$= \frac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2 A}}{\cos A} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 A - 1}} =$$
$$= \frac{2\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}} = \frac{\sec A}{\operatorname{cosec} A}.$$

[275] $$\operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{1}{\operatorname{tg} A} = \cos A \cdot \operatorname{cosec} A =$$
$$= \sqrt{\operatorname{cosec}^2 A - 1} = \frac{\sqrt{1-\sin^2 A}}{\sin A} = \frac{\cos A}{\sqrt{1-\cos^2 A}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\sec^2 A - 1}} = \frac{\operatorname{cosec} A}{\sec A}.$$

[276] $$\sec A = \frac{\operatorname{tg} A}{\sin A} = \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 A}} =$$
$$= \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 A} = \frac{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 A}}{\operatorname{ctg} A} = \frac{\operatorname{cosec} A}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 A - 1}}$$

[277] $$\operatorname{cosec} A = \frac{\operatorname{ctg} A}{\cos A} = \frac{1}{\sin A} = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 A}} =$$
$$= \sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 A} = \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 A}}{\operatorname{tg} A} = \frac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}.$$

[278] $$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B.$$

[279] $$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B.$$

[280] $$\operatorname{tg}(A \pm B) = \frac{\operatorname{tg} A \pm \operatorname{tg} B}{1 \mp \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B}.$$

[281] $$\operatorname{ctg}(A \pm B) = \frac{\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B \mp 1}{\operatorname{ctg} B \pm \operatorname{ctg} A}.$$

[282] $$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}.$$

[283] $$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cdot \sin \frac{A-B}{2}.$$

[284] $$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}.$$

[285] $$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \cdot \sin \frac{A-B}{2}.$$

[286] $$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B = \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cdot \cos b}.$$

[287] $$\operatorname{tg} A - \operatorname{tg} B = \frac{\sin(A-B)}{\cos A \cdot \cos B}.$$

[288] $$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B = \frac{\sin(A+B)}{\sin A \cdot \sin B}.$$

[289] $$\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} B = \frac{\sin(B-A)}{\sin A \cdot \sin B}.$$

[290] $$\sin 2A = 2 \sin A \cos A.$$

[291] $$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A = 2\cos^2 A - 1.$$

[292] $$\operatorname{tg} 2A = \frac{2 \operatorname{tg} A}{1 - \operatorname{tg}^2 A}.$$

[293] $$\operatorname{ctg} 2A = \frac{\operatorname{ctg}^2 A - 1}{2 \operatorname{ctg} A}.$$

[294] $$\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}.$$

[295] $$\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}.$$

[296] $$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \frac{1-\cos A}{\sin A} = \frac{\sin A}{1+\cos A}.$$

[297] $$\sin^2 A = \frac{1-\cos 2A}{2}.$$

[298] $$\cos^2 A = \frac{1+\cos 2A}{2}.$$

[299] $$\sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A+B)\sin(A-B).$$

[300] $$\cos^2 A - \sin^2 B = \cos(A+B)\cos(A-B).$$

[301] $$\operatorname{tg}^2 A = \frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}.$$

[302] $$\operatorname{ctg}^2 A = \frac{1+\cos 2A}{1-\cos 2A}.$$

[303] $$\operatorname{tg}\frac{A\pm B}{2} = \frac{\sin A \pm \sin B}{\cos A + \cos B}.$$

[304] $$\operatorname{ctg}\frac{A\pm B}{2} = \frac{\sin A \mp \sin B}{\cos B - \cos A}.$$

[305] $$\sin A\cos B = \frac{1}{2}[\sin(A+B) + \sin(A-B)].$$

[306] $$\cos A\sin B = \frac{1}{2}[\sin(A+B) - \sin(A-B)].$$

[307] $$\cos A\cos B = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)].$$

[308] $$\sin A\sin B = -\frac{1}{2}[\cos(A+B) - \cos(A-B)]$$

605. Если θ есть малая величина, то $\sin\theta$, $\operatorname{tg}\theta$ и угол θ приблизительно равны между собой.

Пример.

$$\sin 2^\circ = 0{,}0349 \text{ (из таблиц)};$$
$$\operatorname{tg} 2^\circ = 0{,}0349 \text{ (из таблиц)};$$
$$\text{угол } 2^\circ, \text{ в радианах} = 0{,}0349 \text{ (из таблиц)}.$$

Если угол несколько больше, то в таблицах будет иметься некоторая разница между значениями указанных величин, однако с известным приближением этой разницей можно пренебречь.

Удобства от замены угла его синусом или тангенсом— очевидны, так как при этом избегается утомительная операция с нахождением десятичных знаков его выражения в радианах.

606. Если x есть величина малая, то, выражая угол в радианах, можем считать, что

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2.$$

Пример.

$$\cos 0{,}006 = 1 - 0{,}000018 = 0{,}999982.$$

Глава XXIV.

ГРАФИКИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ.

607. График синуса. Рассмотрим функцию

$$y = \sin x,$$

где x—радиальная мера угла.

Вычертим график этой функции в прямоугольных координатах, откладывая по оси абсцисс число радианов в угле, а по ординатам—синусы соответствующих углов (рис. 265).

Кривая пересечет ось X в точках, где

$$x = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi,\ \ldots\ k\pi,$$

а также в точках, где

$$x = -\pi,\ -2\pi,\ -3\pi,\ -4\pi, \ldots\ -k\pi,$$

причем k обозначает здесь любое целое, положительное или отрицательное число, или же нуль.

По мере увеличения угла x от 0 до $\frac{\pi}{2}$, y возрастает от 0 до 1.

По мере увеличения угла x от $\frac{\pi}{2}$ до π, y убывает от 1 до 0.

С увеличением угла x от π до $\frac{3\pi}{2}$, y убывает от 0 до -1.

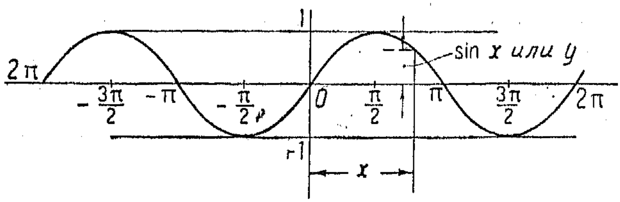


Рис. 265.

С увеличением угла x от $\frac{3\pi}{2}$ до 2π, y возрастает от -1 до 0.

Из графика ясно видно, что для действительных значений x величина y не может быть больше 1 и меньше -1. Значений x, которые делали бы y по абсолютной величине больше единицы,—не существует.

Синус является периодической функцией с периодом 2π или 360°. Это значит, что график функции, после каждого поворота подвижной стороны угла, повторяется, и что y имеет одинаковую величину для всех значений x, разнящихся друг от друга на величины, кратные 2π.

608. Построение графика синуса (синусоиды). Будем откладывать на оси абсцисс углы, а на ординатах — соответствующие значения синусов, как это показано на рис. 266.

Согласно n⁰ 599, где дан график функции $\sin A$, отрезок PB для каждого положения P дает величину $\sin A$ в соответствующем масштабе.

609. График функции $\sin(x+B)$. Пусть имеется вычерченный график $y=\sin x_1$ в системе прямоугольных координат с началом в точке O_1 и пусть нам необходимо перенести это начало в точку O, а затем написать уравнение, связывающее x и y в новой системе (рис. 267).

Из рисунка видим, что $x_1 = x + B$.

Подставляя эту величину в уравнение $y=\sin x_1$, получим:

$$y = \sin(x + B).$$

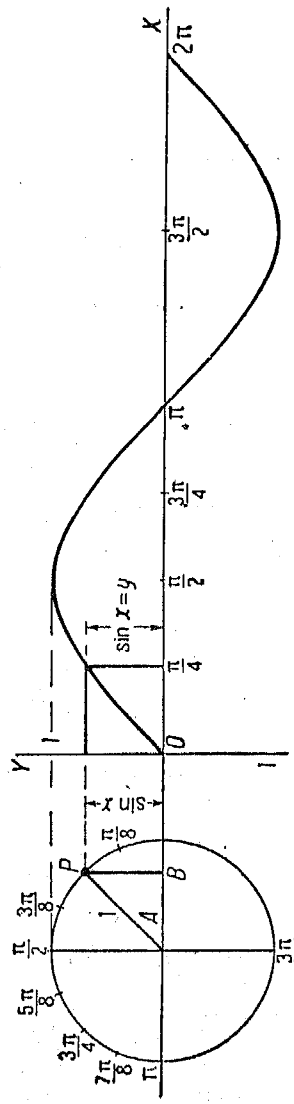


Рис. 266.

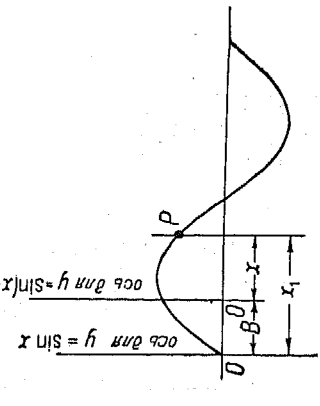


Рис. 267.

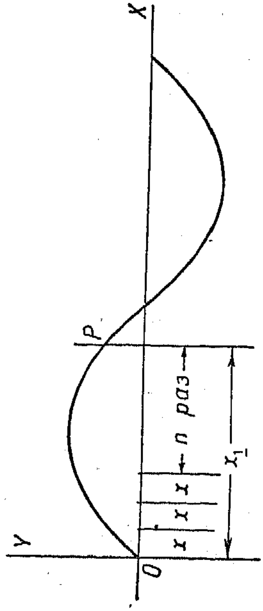


Рис. 268.

Таким образом замена x_1 на $(x+B)$ соответствует простому перенесению начала координат на расстояние, соответствующее углу B, по оси X. При этом мы получаем график функции $y=\sin(x+B)$.

Из сказанного ясно, что для построения графика заданной функции следует начинать с уже имеющейся кривой $y=\sin x$.

Если B — положительно, то начало координат нужно перенести в положительном направлении оси X, в противном же случае — в отрицательном направлении. Расстояние, на которое приходится переносить начало координат, определяется величиной B.

Рекомендуется всегда иметь под рукой вычерченный график функции $y=\sin x$. Передвигая начало координат, легко получить график для $y=\sin(x+B)$.

Если $\angle B=\frac{\pi}{2}$ то имеем:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin(x+90^\circ),$$

но так как косинус угла равен синусу дополнительного, то можем написать

$$\sin(x+90^\circ)=\cos x\ ^{1)},$$

откуда видно, что графики синуса и косинуса — одинаковы, но для последнего начало координат в первоначальном графике синуса следует передвинуть на отрезок, соответствующий углу 90° или $\frac{\pi}{2}$ радианов (см. n⁰ 622 и 624).

610. График функции $y=\sin nx$, при n — положительном. Пусть имеется график функции $y=\sin x_1$. Положим x_1 равным nx, тогда

$$y=\sin nx.$$

Коэффициент n при x влияет лишь на величину абсциссы, но не изменяет значений ординат. Если $n=2$, то $x_1=2x$, т. е. x в два раза меньше чем x_1. Таким образом подстановка вместо x_1 величины x укорачивает абсциссы в отношении $1:n$.

---

[1]) $\sin(x+90^\circ)=\sin[90^\circ-(-x)]=\cos(-x)=\cos x$.

Прим. ред.

На рис. 269 показаны графики функций $y = \sin x$ и $y = \sin 3x$.

Если $n < 1$, то кривая будет более растянутой, чем $y = \sin x$.

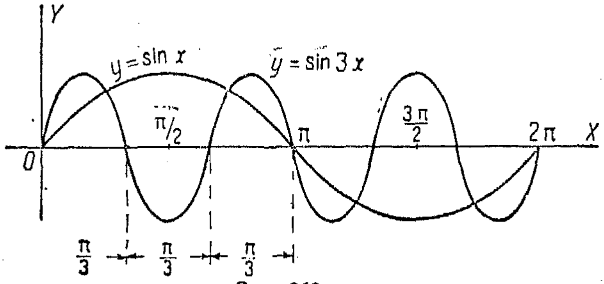


Рис. 269.

Аналогичные результаты можно получить, изменяя масштаб абсцисс на основном графике функции $y = \sin x$ в n раз.

611. Рассмотрим изменение значений y в уравнении $y = \sin 2x$, при возрастании x от 0 до $\frac{\pi}{2}$ или от 0 до 90°.

x	0°	9°	18°	27°	36°	45°	54°	63°	72°	81°	90°
$2x$	0°	18°	36°	54°	72°	90°	108°	126°	144°	162°	180°
y	0	0,309	0,588	0,809	0,951	1,00	—0,951	—0,809	—0,588	—0,309	0,00

Заметим, что два угла x, имеющие одинаковые синусы или значения y, отличающиеся лишь знаками, являются пополнительными, т. е. в сумме составляют 90°. Таковы, например, углы 9° и 81°.

В ряде углов $2x$ углы, имеющие одинаковые синусы, равны в сумме 180°, например 18° и 162°.

Из приведенной таблицы видно, что значения y при изменении x от 0 до 90° образуют две волны: одну положительную, а другую—отрицательную.

612. График функции $y = \sin(nx + B)$. Пусть имеется график функции $y = \sin nx_1$, построенный по правилам, указанным в n° 610.

Положим $x_1 = x + \frac{B}{n}$.

Нам требуется передвинуть начало координат указанного графика из точки O_1 в точку O и написать уравнение, дающее зависимость между x и y в новой системе координат.

Из чертежа имеем:

$$x_1 = x + \frac{B}{n}.$$

Подставляя в уравнение $y = \sin nx_1$, получим:

$$y = \sin n\left(x + \frac{B}{n}\right) = \sin(nx + B).$$

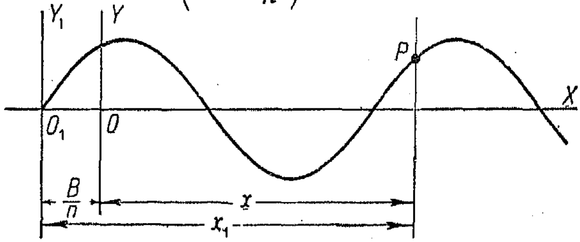


Рис. 270.

Переход от $y = \sin nx_1$ к $y = \sin(nx + B)$ соответствует перенесению начала координат графика первой из этих функций (т. е. $y = \sin nx_1$) на расстояние, соответствующее углу $\frac{B}{n}$.

Если на вычерченном графике $y = \sin x$ изменить масштаб абсцисс в отношении $1 : n$, а затем перенести начало координат в точку $\left(\frac{B}{n}, 0\right)$ в первоначальной кривой или в точку $(B, 0)$ в графике с измененным масштабом, то получим искомый график функции $y = \sin(nx + B)$, отнесенный к новому началу координат.

Если B — число положительное, то начало следует передвинуть в направлении положительных x, если же оно отрицательное, то в противоположную сторону.

613. График общего уравнения $y = a \sin(nx + B)$ (рис. 271). Так как ординаты этой кривой, т. е. значения y, увеличены по сравнению с ординатами графика $y = \sin(nx + B)$ (который был разобран в предыдущем n^0), в a раз, то мы сразу же можем построить кривую функции $y = a \sin(nx + B)$.

Постоянный множитель a изменяет высоту волны в a раз. Возьмем основной график $y = \sin x$.

Изменим масштаб абсцисс в отношении $1 : n$. Перенесем начало координат в точку $\left(\frac{B}{n}, 0\right)$, если абсциссы измерены в первоначальном масштабе, или в точку $(B, 0,)$ если они взяты в измененном масштабе.

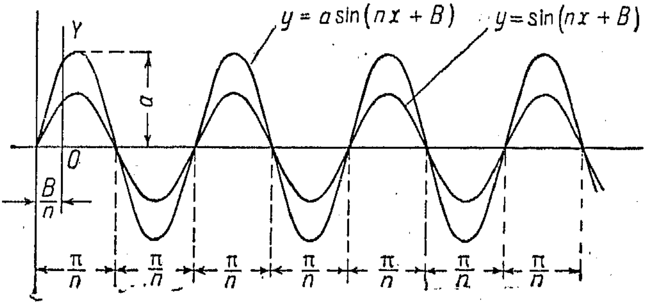


Рис. 271.

Умножим каждую ординату на a или изменим масштаб ординат так, чтобы каждая единица в первоначальном масштабе отвечала a единицам в новом.

Выполнив указанные операции, получим график функции $y = a\sin(nx + B)$, отнесенный к новому началу.

614. Элемент времени в синусоидальных функциях. Если и x и y соответствуют измеренным расстояниям или длинам, то график синуса может изображать форму волн, получаемых при колебаниях струн и т. д.

Пусть y обозначает линейное расстояние, а x — время в секундах, тогда график синуса может изображать периодические колебания, например колебания пружины, звуковые волны, проекции кривошипа на координатную ось, проходящую через центр вращения, и т. п.

Обозначим буквой ω (омега) угол в радианах, описываемый прямой OP в одну секунду, при равномерном движении, начатом из положения OA.

Через t секунд прямая OP займет положение OP', описав при этом угол θ.

Будем откладывать время в секундах по оси абсцисс, а синусоидальную функцию—по оси ординат.

Раз прямая OP поворачивается в одну секунду на ω радианов, то по истечении t секунд полный угол поворота θ будет равен ωt радианов (другими словами угол θ возрастает на ω радианов в секунд, и основное уравнение $y = \sin x$ примет вид

$$y = OP \sin \omega t.$$

Здесь ω представляет собой угловую скорость в радианах в секунду и поэтому угол на который повернулась точка за t секунд, равен ωt.

Пример. Точка P (рис. 272) движется в направлении против часовой стрелки по окружности радиуса в 10 *см*. Движение начинается в точке A и происходит равномерно с угловой скоростью, равной одному обороту в 10 секунд.

Требуется начертить кривую, показывающую изменение расстояний проекции точки P на вертикальный диаметр от центра O в зависимости от времени, а также написать уравнение движения.

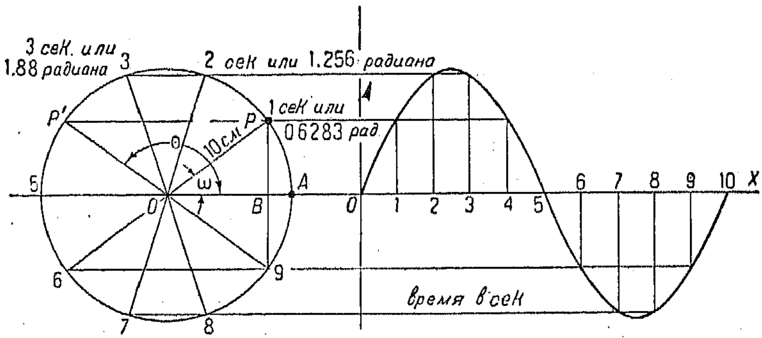


Рис. 272.

Решение. Если один оборот совершается в течение 10 секунд, то, деля окружность на десять равных частей, видим, что каждая такая часть представляет собой путь, проходимый точкой в одну секунду. Каждое деление соответствует углу ω, равному $\frac{2\pi}{10} = 0{,}6283$ радиана, так как целая окружность соответствует $2\pi = 6{,}283$ радианов.

Выберем удобный масштаб абсцисс и отложим на оси x десять равных частей, как это показано на рисунке.

Будем проектировать положение точки P на соответствующие ординаты. Соединяя полученные точки плавной кривой, получим искомый график синусов (синусоиду).

Угловая скорость ω равна 0,6283 радиана в секунду. Радиус OP равен 10 *см*, а $PB = OP \sin 0{,}6283\, t$.

Поэтому

$$y = 10 \sin\, (0{,}6283\, t).$$

Расстояние OP представляет собой длину кривошипа или величину максимальной деформации пружины, колеблющейся около своего среднего положения, или, наконец, максимальное отклонение маятника. Оно называется *амплитудой* графика.

Если вместо угловой скорости задано число оборотов кривошипа n в секунду; то эту скорость можно легко найти, имея в виду, что тело поворачивается на $2\pi n$ радианов в секунду, т. е.

$$\omega = 2\pi n$$

и наша синусоидальная функция примет вид:

$$y = OP \sin 2\pi nt.$$

615. Для преобразования графика функции $y = \sin x$ в график синусоидальной функции времени, рассуждаем следующим образом. Пусть $y = r \sin \omega t$, тогда

$$\frac{y}{r} = \sin \omega t.$$

Обозначим $\frac{y}{r}$ буквой λ (лямбда), в таком случае

$$y = \lambda r.$$

Полагая $x = \omega t$, получим:

$$t = \frac{x}{\omega}.$$

На рис. 273 показана кривая $y = \sin x$ с дополнительной горизонтальной шкалой, на которой отложено время, и до-

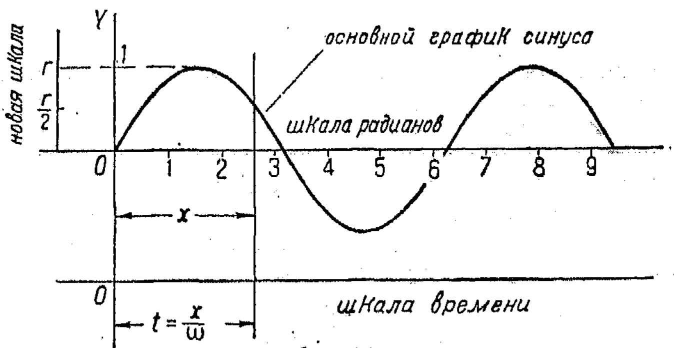


Рис. 273.

полнительной вертикальной шкалой амплитуд, соответствующих различным моментам времени.

Пример. Требуется преобразовать основную кривую $y = \sin x$ в график функции $y = 0{,}5 \sin 4t$.

Имеем:

$$\frac{y}{0{,}5} = \lambda \quad \text{или} \quad y = 0{,}5\,\lambda.$$

Полагая $x = 4t$, получим

$$t = \frac{x}{4}.$$

Если теперь начертить вертикальную шкалу с делениями, вдвое большими, чем для имеющейся кривой, а также горизонтальную шкалу для вре-

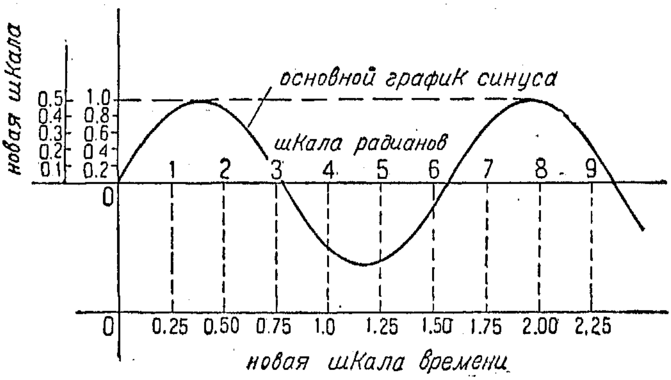


Рис. 274.

мени с масштабом, вчетверо большим, чем на основном графике, то и получим искомый график функции

$$y = 0{,}5 \sin 4t.$$

Пусть угловая скорость, выраженная в радианах в секунду, равна ω. Условимся считать отрезок оси, соответствующий числу секунд, в течение которых совершается полный оборот, равным отрезку на оси абсцисс, соответствующему углу 2π на основном графике. Тогда последний можно легко разделить на нужное число частей.

616. Пусть n есть число оборотов кривошипа в одну минуту. Угловая скорость будет равна

$$\omega = \frac{2\pi n}{60},$$

а уравнение примет вид

$$y = OP \sin \frac{2\pi n}{60} t.$$

Угловая скорость ω определяет *период* графика. Периодом в случае равномерного вращения будет являться время, нужное для одного оборота. Заметим, что на рис. 272 кривая имеет период, равный 10 секундам, так как один оборот происходит в течение 10 секунд, после чего кривая повторяется.

Если ω равна 1 радиану в секунду, то период равен 2π секундам и $y = \sin t$.

Для любого значения ω период будет равен $\frac{2\pi}{\omega}$.

Длина волны есть расстояние между двумя одинаково расположенными точками на графике.

В случаях быстрого вращения часто бывает необходимо рассматривать периоды времени в десятые и даже в сотые доли секунды.

617. Рассмотрим движение точки тела, вращающегося со скоростью 180 оборотов в минуту. В секунду происходит 3 оборота или, как говорят, частота равна 3. Таким образом время, потребное для одного оборота, равно $\frac{1}{3}$ секунды, а угловая скорость

$$\omega = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 18{,}85 \text{ радианов в секунду.}$$

Уравнение, соответствующее кривошипу радиусом в 15 *см*, будет

$$y = 15 \sin(18{,}85\, t).$$

618. Частота равномерного вращательного движения есть число оборотов в секунду или

$$\text{частота} = \frac{\omega}{2\pi} = \text{числу периодов в секунду.}$$

Частота есть величина, обратная периоду, т. е.

$$\text{частота} = \frac{1}{\text{период}}.$$

На рис. 275 эта величина равна 3, так как в одну секунду для точки, делающей 3 оборота в секунду, получаются три волны.

619. Если отсчет углов должен начинаться не от горизонтальной оси X, а от какого-нибудь другого положения неподвижной стороны, то

$$y = r \sin(\omega t + c).$$

Здесь c — угол между неподвижной стороной и положительным направлением оси X. Этот угол будет считаться положительным или отрицательным в зависимо-

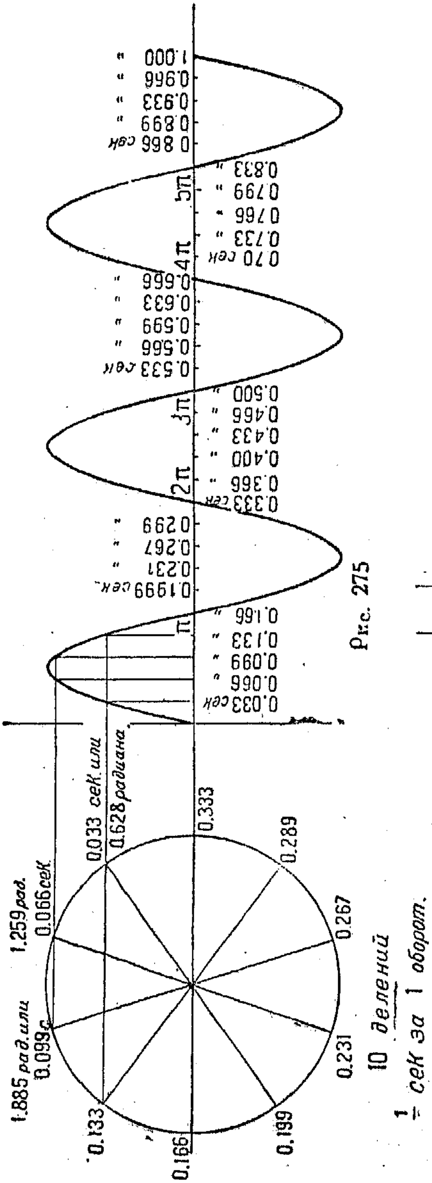


Рис. 275

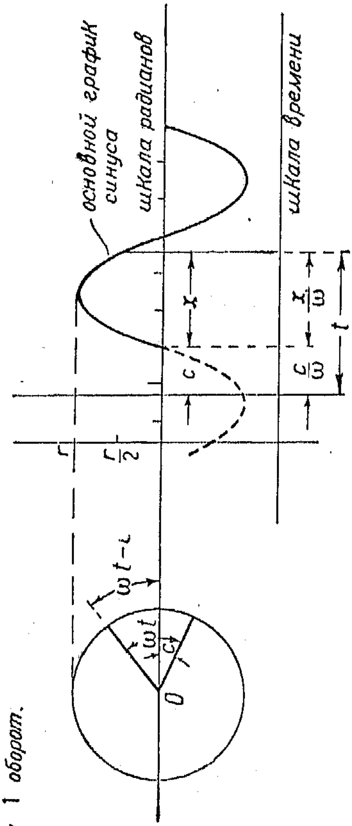


Рис. 276.

сти от того, измерен ли он от оси X против часовой стрелки или в сторону ее вращения.

$$y = r \sin(\omega t + c)$$

$$\frac{y}{r} = \sin(\omega t + c).$$

Положим $\frac{y}{r} = \gamma$, тогда $y = \gamma r$.

Обозначим величину $(\omega t + c)$ буквой X, тогда

$$t = \frac{X}{\omega} - \frac{c}{\omega}.$$

Новые шкалы для отсчета переменных показаны на рис. 276, где вычерчен график основной функции $y = \sin x$.

Если c задано в угловой мере, то располагаем начало координат, откладывая c непосредственно по угловой шкале.

Если же c дано в единицах времени или в частях ω, то следует пользоваться шкалой времени, относя начало в точку $\frac{c}{\omega}$.

Пример. Требуется вычертить график функции

$$y = r \sin(\omega t - 1{,}1),$$

причем максимальная амплитуда равна 0,5, а $\omega = 4$ радиана в секунду.

Имеем:

$$y = 0{,}5 \sin(4t - 1{,}1)$$

$$\frac{y}{0{,}5} = \sin(4t - 1{,}1)$$

Положим

$$\gamma = \frac{y}{0{,}5}, \text{ тогда } y = 0{,}5\,\gamma.$$

Если положить $X = 4t - 1{,}1$, то

$$t = \frac{X}{4} + \frac{1{,}1}{4}.$$

Отсюда

$$\frac{1{,}1}{4} = 0{,}275 \text{ секунд на один радиан}$$

или

$$\frac{4}{1{,}1} = 3{,}63 \text{ радианов в секунду.}$$

Отложим на оси времени от нового начала 1 секунду в таком масштабе, чтобы этот отрезок соответствовал отрезку 3,63 радиана по угловой шкале, и разделим его на доли секунды, как это показано на рис. 277 и 278.

Постоянный угол c передвигает лишь кривую вдоль оси X (или оси t в данном случае), но не меняет самого вида графика.

Если рассматривается движение кривошипа, то a представляет собой его длину.

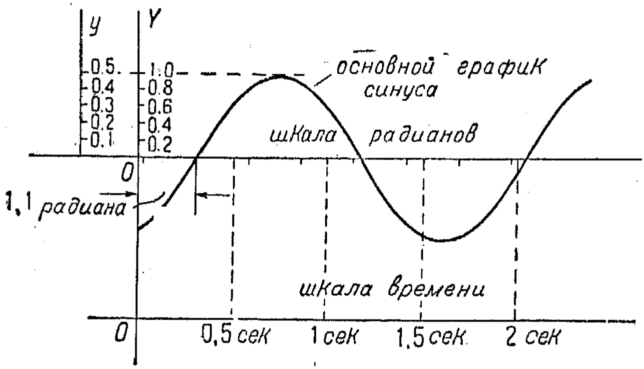


Рис. 277.

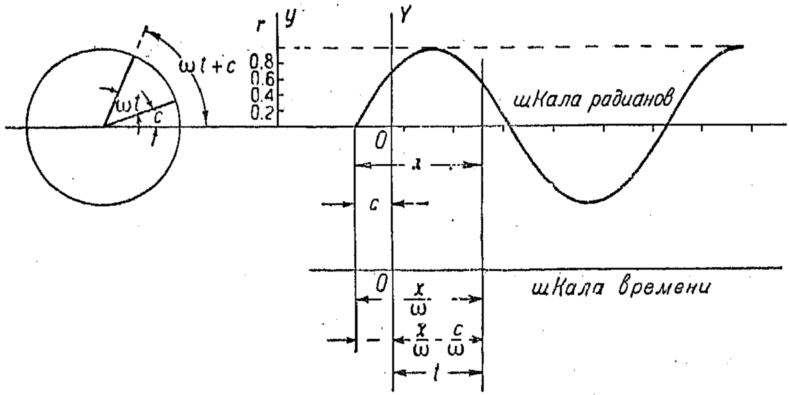


Рис. 278.

Пример. Кривошип OP (рис. 279), длиной 60 *см*, начинает двигаться из положения, образующего угол 30° или $\frac{2\pi}{12} = 0{,}5236$ радиана с горизонтальным направлением. Время t в начале движения равно нулю. В одну секунду происходит 2 оборота.

Так как время одного оборота равно $\frac{1}{2}$ секунды, то, деля окружность на 12 частей, находим, что каждая часть соответствует времени 0,0417 секунды.

Кривошип делает два оборота в секунду, т. е. поворачивается на угол $2 \cdot 2\pi$ радианов. Следовательно $\omega = 4\pi$.

$30^\circ = \frac{\pi}{6}$ радианов, поэтому согласно сказанному в n^0 613, следует передвинуть начало координат на величину $\frac{B}{n}$, равную в данном случае

$$\frac{\frac{\pi}{6}}{\frac{4\pi}{1}} = \frac{1}{24} = 0{,}0417 \text{ секунды,}$$

что совпадает с одним из сделанных на окружности делений. Уравнение движения будет иметь вид:

$$y = 60 \sin\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right).$$

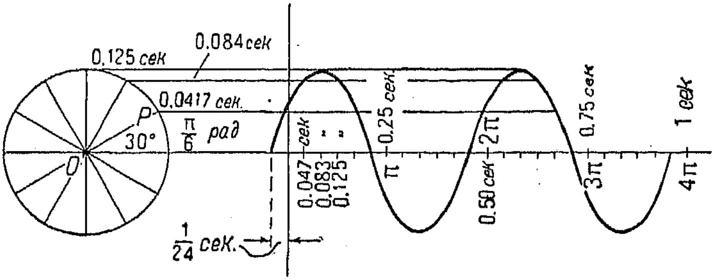


Рис. 279.

620. Переменный ток. Сила переменного тока возрастает до некоторого положительного максимума, уменьшается до нуля, а затем до отрицательного минимума, после чего опять возрастает до нуля, чем и заканчивается цикл.

Эта изменяющаяся сила тока i является синусоидальной функцией. Такова например,

$$i = 10 \sin(200t),$$

где t — протекшее время, а величина $200t$ есть число радианов в соответствующем углу фазы.

Так как график зависимости есть синусоида, а максимальное значение синуса равно единице, то в данном случае наибольшее значение i равно 10 единицам. Это значение функция имеет в точке, за которой ординаты кривой начинают уменьшаться. В течение одной секунды происходит несколько циклов. Полный цикл изменений заканчивается после того, как угол $200t$ достигает величины 2π, т. е. когда

$$200t = 2\pi, \quad t = 0{,}01\pi = 0{,}0314.$$

Таким образом продолжительность цикла равна $\frac{314}{10000}$ или около $\frac{1}{30}$ секунды и ток изменяет направление примерно 60 раз в секунду.

Расстояние между точками, в которых кривая пересекает горизонтальную ось, показывает время, необходимое для каждого изменения направления тока. Очевидно оно равно половине того времени, в течение которого совершается полный цикл (рис. 280).

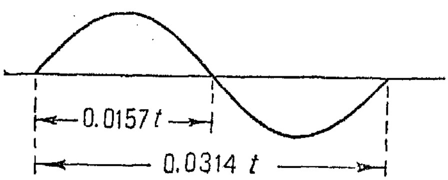


Рис. 280.

В данном случае время, нужное для каждого изменения направления, равно 0,0157 секунды.

621. Функции вида $x = a\sin(ny + B)$. Эти функции сходны с уже рассмотренными функциями вида $y = a\sin(nx + B)$, но отличаются от них тем, что переменные, входящие в формулу, поставлены одно на место другого. Вследствие этого положение осей необходимо соответственно изменить.

Что касается уравнений $x = \sin y$, $x = \sin(y + B)$ и $x = \sin ny$, то для них справедливо все сказанное в предыдущих n⁰ об уравнениях

$$y = \sin x$$

$$y = \sin(x + B)$$

$$y = \sin nx.$$

Так как x и y заменяют друг друга, то графики данных функций следует строить не на оси X, а на оси Y, как это и показано на рис. 281, где изображен график $x = a\sin(ny + B)$.

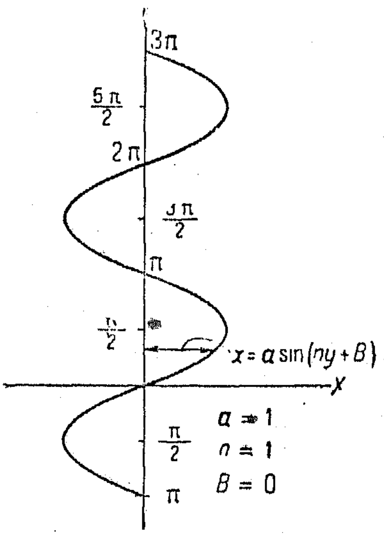


Рис. 281.

622. График функций. Рассмотрим функцию $y = \cos x$, где x — угол в радианах. Пусть имеется система прямоугольных координат, причем по оси абсцисс отложены величины углов (в радианах), а по ординатам — соответствующие им значения косинусов.

Кривая пересекает ось X в точках, где

$$x = \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2} \ldots \left(k - \frac{1}{2}\right)\pi,$$

а также где

$$x = -\frac{\pi}{2},\ -\frac{3\pi}{2},\ -\frac{5\pi}{2} \ldots -\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi.$$

Здесь k — любое целое, положительное число или нуль. При $x = 0$, $y = 1$ (рис. 282).

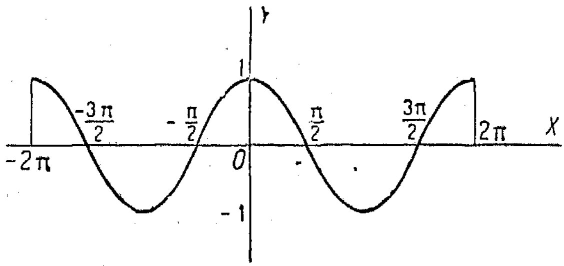


Рис. 282.

623. Построение графика косинуса. Так как $\cos x = \sin(90° + x)$, то график косинуса представляет собой синусоиду, передвинутую вдоль оси X на расстояние, соответствующее углу $\frac{\pi}{2}$ или 90°.

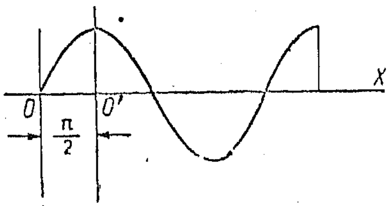


Рис. 283.

На рис. 283 точка O есть начало синусоиды, а точка O' — начало графика косинуса.

Кривые отличаются друг от друга только тем, что начала их находятся в расстоянии, соответствующем углу 90°, поэтому график косинуса следует строить точно так же, как график синуса, начиная его на указанном выше расстоянии от начала координат (рис. 284).

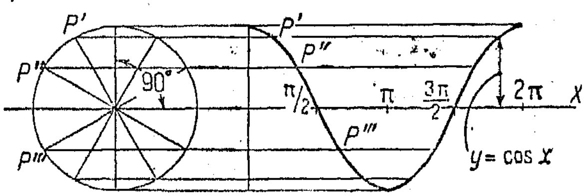


Рис. 284.

624. График функции

$$y=\cos(x+B)$$
$$y=\cos 2x$$
$$y=\cos nx$$
$$y=\cos(nx+B)$$
$$y=a\cos(nx+B)$$

подчиняются тем же законам, что и соответствующие синусоидальные кривые.

Указанные графики могут быть получены из графика основной функции

$$y=\cos x,$$

так же как и соответственные кривые функций синуса.

Будет ли данная кривая изображать изменения синуса или косинуса, зависит только от положения начала координат.

Если в данных уравнениях поменять x и y местами, то построенные графики придется отнести не к оси X, а к оси Y.

625. Сложные периодические колебания или графики волн. Общие уравнения $y=a\sin(nx+B)$ и $y=a\cos(nx+B)$ выражают простейший вид периодического движения.

Сложное периодическое движение выражается более общими формулами вида

$$y=a_1\sin(nx+B_1)+a_2\sin(2nx+B_2)+\ldots+b_1\cos(nx+B_1)+b_2\cos(2nx+B_2)\ldots$$

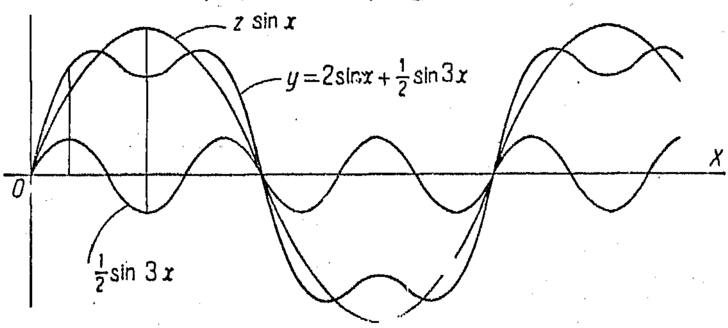


Рис. 285.

Звук музыкального инструмента, например флейты или скрипки, состоит из главного тона, выражаемого уравнением

$$y=a_1\sin(nx+B_1)$$

и обертонов или гармоник

$$y = a_2 \sin(2nx + B_2)$$

$$y = a_3 \sin(3nx + B_3) \text{ и т. д.}$$

Для получения графика такой сложной функции удобнее всего начертить каждую синусоиду отдельно, а затем сложить соответствующие ординаты.

На рис. 285 сделано построение для функции

$$y = 2\sin x + \frac{1}{2}\sin 3x.$$

626. Затухающие колебания. Многие законы природы выражаются графически кривыми синусов и косинусов с уменьшающимися амплитудами. Величина амплитуды a убывает как показательная функция. Она обычно представляется в виде ae^{-bx}.

В этих случаях общее уравнение синусоидальной функции принимает вид

$$y = ae^{-bx}\sin(nx + B).$$

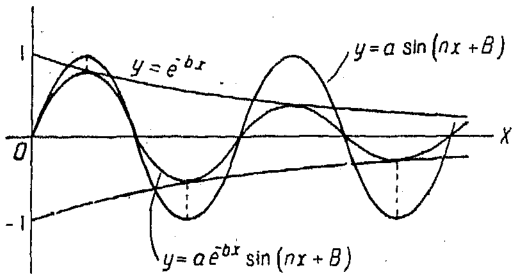


Рис. 286.

Для получения ординат кривой последнего уравнения удобнее всего вычертить отдельно графики функций e^{-bx} и $a\sin(nx + B)$, а затем перемножить их ординаты.

Величина b в данном уравнении может рассматриваться как мера сопротивления или задерживающий эффект и называется *логарифмическим декрементом колебания* (рис. 286).

627. Ограничивающие кривые. При построении графиков функций вида

$$y = e^{x}\sin x \text{ или } S = t^2\cos\frac{\pi t}{4} \text{ и т. п.,}$$

где один из множителей есть синус или косинус, проще всего рассматривать кривую, выражаемую другим сомножителем, как ограничивающую кривую.

Рассмотрим уравнение

$$y = e^{-\frac{1}{4}x} \cdot \sin\frac{\pi x}{2}. \qquad (1)$$

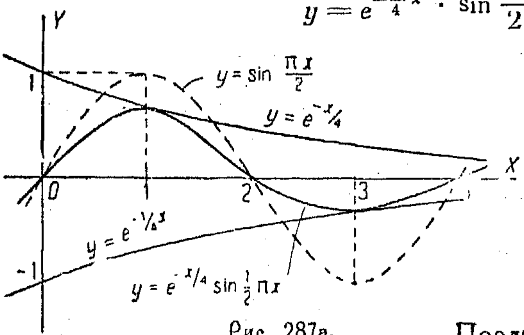


Рис. 287a.

Так как синус по абсолютной величине не может быть больше 1, то значение y в уравнении (1) не может быть численно больше чем первый множитель $e^{-\frac{1}{4}x}$.

Предельные значения $\sin\frac{\pi x}{2}$ суть $+1$ и -1, поэтому y имеет предельные значения, равные $e^{-\frac{1}{4}x}$ и $-e^{-\frac{1}{4}x}$.

Таким образом кривые, выражаемые уравнениями

$$y = e^{-\frac{1}{4}x} \text{ и } y = -e^{-\frac{1}{4}x},$$

можно рассматривать как ограничивающие для функции y уравнения (1).

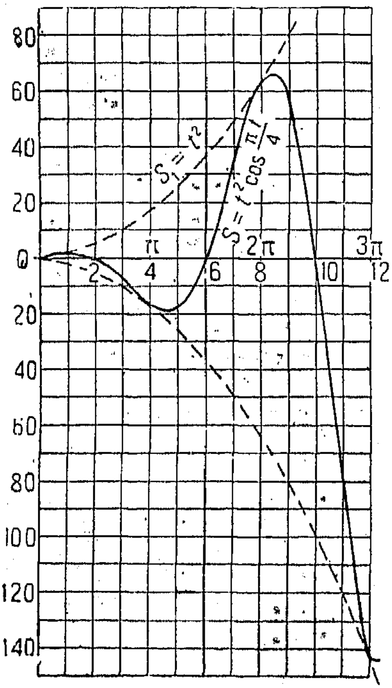


Рис. 287b.

Построение искомого графика облегчается, если иметь в виду следующее:

Когда $\sin\frac{\pi x}{2} = 0$, $y = 0$, следовательно кривая (1) пересекает ось X в тех же точках, что и кривая $y = \sin\frac{\pi x}{2}$, а именно при $x = 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6$ и т. д.

Кроме того кривая, выражаемая уравнением (1), и график показательной функции $y = e^{-\frac{1}{4}x}$ касаются друг друга в тех точках, где синус достигает максимума или минимума, т. е. где $\sin\frac{\pi x}{2}$ равен $+1$ или -1.

Таким образом кривая функции (1) касается ограничивающей кривой в точках, абсциссы которых равны

$$x = \pm 1,\ \pm 3,\ \pm 5 \text{ и т. д.}$$

Другим примером применения ограничивающих кривых является случай уравнения

$$S = t^2 \cos\frac{\pi t}{4},$$

график которого показан на рис. 287b.

Кривая пересекает ось X, когда $\cos\frac{\pi t}{4} = 0$, и касается ограничивающих кривых, когда $\cos\frac{\pi t}{4} = 1$ или $\cos\frac{\pi t}{4} = -1$.

628. Сложение ординат. Если уравнение состоит из двух или большего числа членов, как например

$$y = 2\sin\frac{\pi x}{4} + \frac{1}{2}x,$$

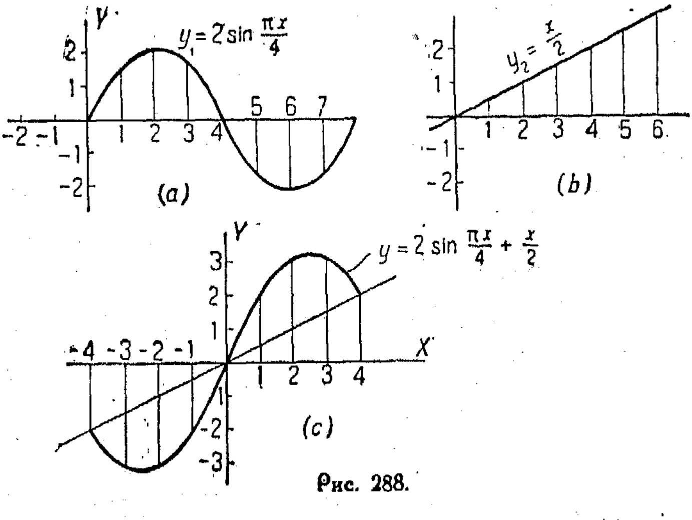


Рис. 288.

то удобно вычертить вспомогательные кривые в одинаковом масштабе, располагая их одну под другой, и сложить их ординаты (рис. 288).

В данном случае придется построить графики функций

$$y_1 = 2\sin\frac{\pi x}{4} \text{ и } y_2 = \frac{1}{2}x.$$

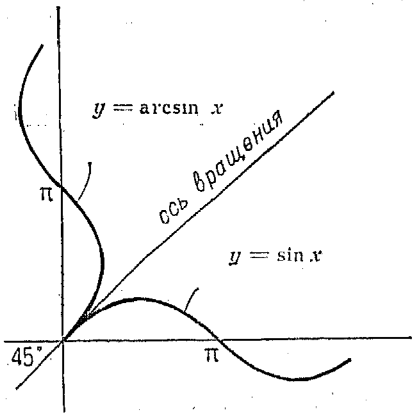


Рис. 289.

Для получения ординат искомой кривой имеем

$$y = y_1 + y_2.$$

629. Графики обратных тригонометрических функций. Уравнение $y = \sin x$ может быть написано еще и в такой форме:

$$x = \arcsin y.$$

Последнее выражение означает, что x есть угол, синус которого равен y.

Очевидно, что графики функций $y = \sin x$ и $x = \arcsin x$ одинаковы по форме. В первом случае y есть функция x, а во втором x является функцией y.

Таким образом в случае функции $x = \arcsin y$ график следует отнести к оси Y, а не к оси X (как в первом уравнении).

Указанные соображения действительны также для косинуса, тангенса и т. д.

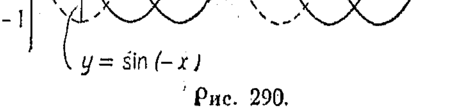


Рис. 290.

Другой метод построения графиков обратных тригонометрических функций заключается в том, что график основной функции чертится на прозрачной бумаге и поворачивается вокруг оси, проходящей через начало координат и наклоненной к оси X под углом $45°$ (рис. 289).

630. Сравнение графиков синуса и косинуса. Отметим, что $y = \cos(-x) = \cos x$ и поэтому графики функций $y = \cos x$ и $y = \cos(-x)$ — одинаковы. Отсюда следует, что при изменении знака x на противоположный, y получает те же самые значения и следовательно график косинуса симметричен относительно оси Y (рис. 290).

631. График функции $y = \operatorname{tg} x$. При изменении угла от 0 до 90° или до $\frac{\pi}{2}$ тангенс изменяется от 0 до ∞. Дальнейшему увеличению угла от 90° до 180° соответствует увеличение тангенса от $-\infty$ до 0.

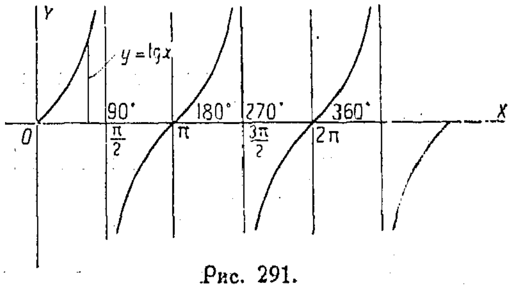


Рис. 291.

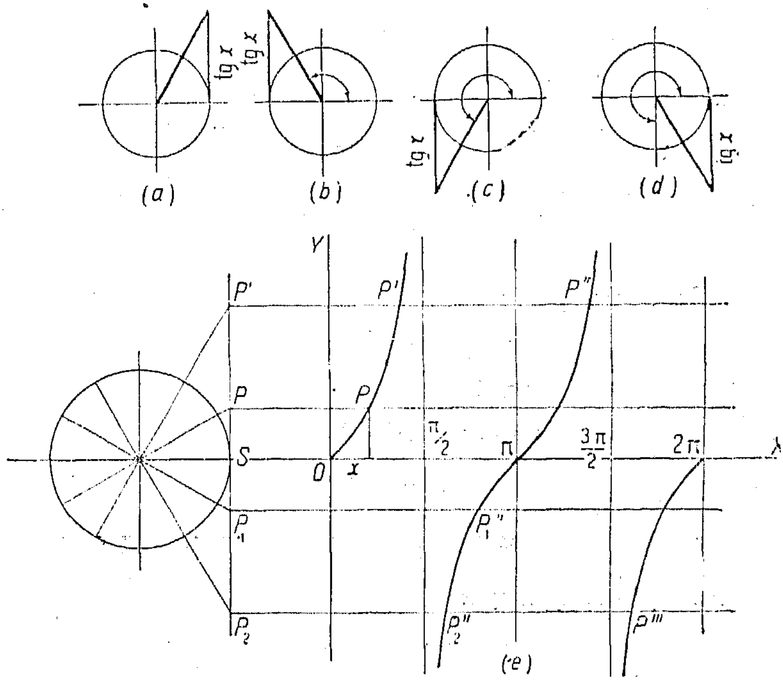


Рис. 292.

В пределах от 180° до 270° тангенс принимает значения от 0 до ∞ и наконец для углов от 270° до 360° он изменяется от $-\infty$ до 0 (рис. 291).

632. Построение графика функции $y = \operatorname{tg} x$. Согласно сказанному в n⁰ 594, где показаны соотношения между тригонометрическими функциями, на рис. 292 (a) (b) (c) и (d) изображены величины линии тангенса в различных квадрантах.

Откладывая величины углов как абсциссы, а значения функции $y = \operatorname{tg} x$—как ординаты, можно легко построить ее график.

Так как $\operatorname{tg} x$—положителен в I и III квадрантах и отрицателен во II и IV, то положительные значения тангенсов PS соответствуют углам в I и III четверти, а SP_1 и SP_2—во II и IV.

Пример нахождения тангенса для угла во втором квадранте показан на рис. 293.

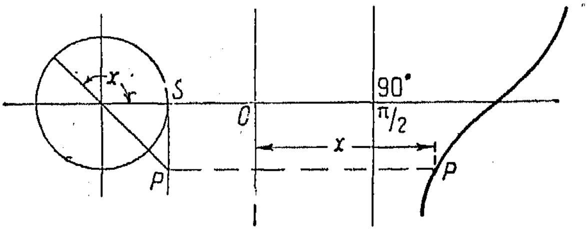


Рис. 293

633. Графики функций

$$y = \operatorname{tg}(x + B)$$
$$y = \operatorname{tg} nx$$
$$y = \operatorname{tg}(nx + B)$$
$$y = a \operatorname{tg}(nx + B)$$

строятся по тем же правилам, что и соответствующие функции синуса.

Общая форма функции

$$y = a \operatorname{tg}(nx + B)$$

показана графически на рис. 294.

Здесь ординаты увеличены в a раз по сравнению с таковыми для графика

$$y = \operatorname{tg}(nx + B).$$

Путем изменения масштаба абсцисс основного графика $y = \operatorname{tg} x$, передвижения начала координат в точку $\left(\frac{B}{n}, 0\right)$ и умножения ординат на a, получим кривую, выражаемую уравнением

$$y = a \operatorname{tg}(nx + B)$$

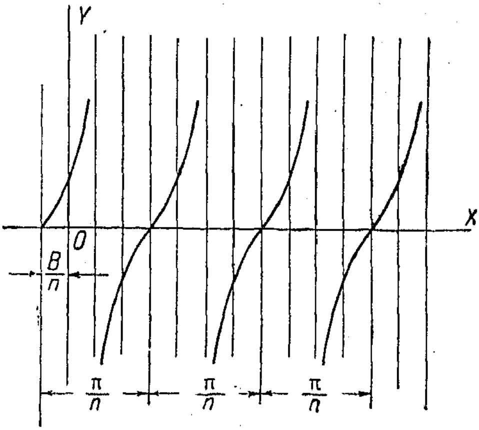


Рис. 294.

в новой системе координат.

Пример. Построить график уравнения (рис. 295)

$$y = \operatorname{tg}(2x + 45°)$$

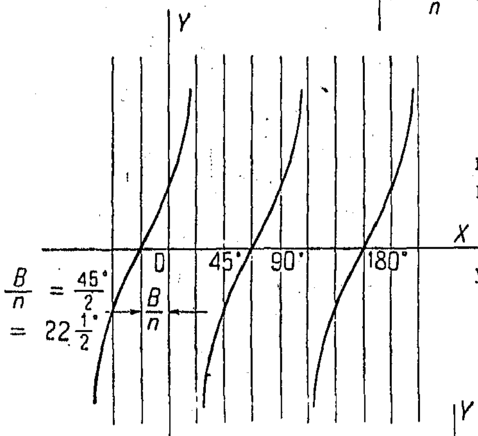


Рис. 295.

Период функции $y = \operatorname{tg} nx$ есть $\frac{\pi}{n}$.

634. Сравнение графика тангенса.

На рис. 296 даны для сравнения несколько графиков тангенсов.

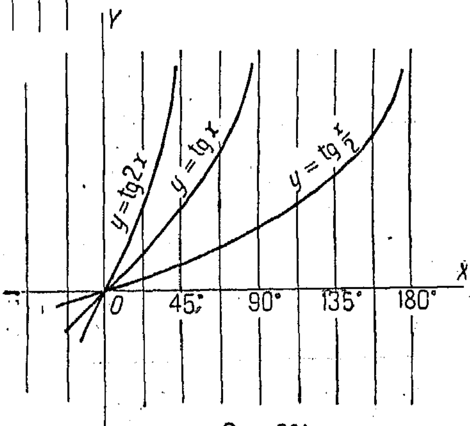


Рис. 296

635. График функции $a\,\mathrm{ctg}\,(nx+B)$. Эта функция применяется сравнительно редко, а потому ограничимся рассмотрением графика функции $y = \mathrm{ctg}\,x$ и общего уравнения

$$y = a\,\mathrm{ctg}\,(nx+B).$$

По сравнению с первым, ординаты кривой общего уравнения увеличены в a раз.

Таким образом кривая функции $y = a\,\mathrm{ctg}\,(nx+B)$ может быть построена точно таким же образом, как и для $y = a\,\mathrm{ctg}\,(nx+B)$ в n⁰ 633.

Здесь также берется основной график функции $y = \mathrm{ctg}\,x$, масштаб абсцисс изменяется в отношении $1:n$, начало координат переносится в точку

$$\left(\frac{B}{n}, 0\right)$$

и ординаты умножаются на a (рис. 298).

После выполнения указанных действий получим искомый график, приведенный к новому началу.

636. Построение графика функции $y = \mathrm{ctg}\,x$. Так как $\mathrm{ctg}\,x = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, то построение гра-

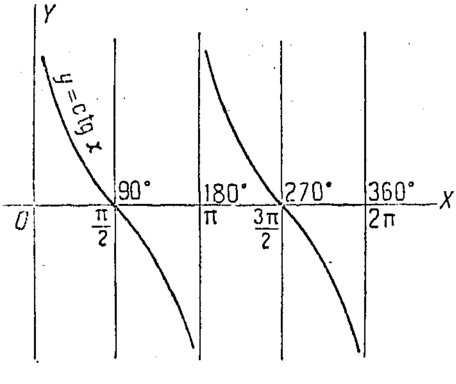


Рис. 297

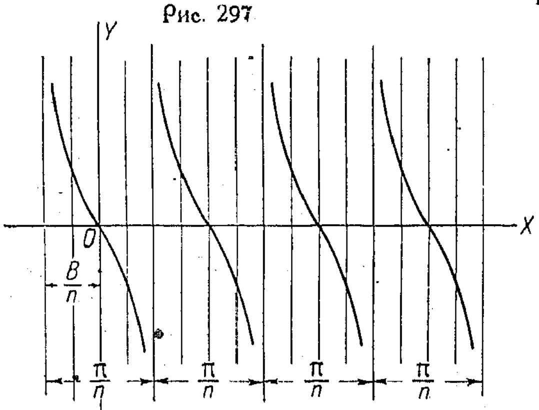


Рис. 298.

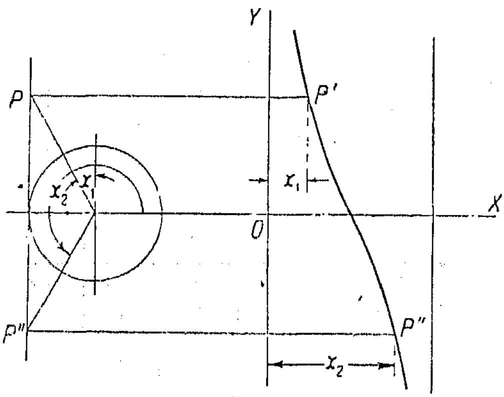


Рис. 299.

фика данной функции можно осуществить, строя кривую так же, как для тангенса. Необходимо начинать ее из положения, соответствующего углу 90°, по отношению к начальному по-

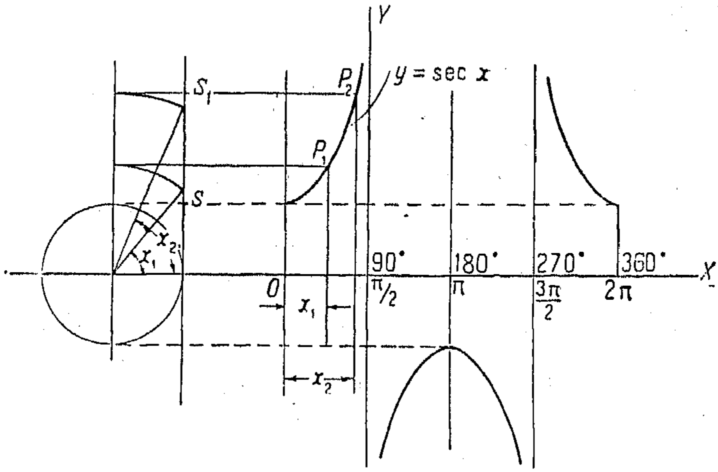


Рис. 300

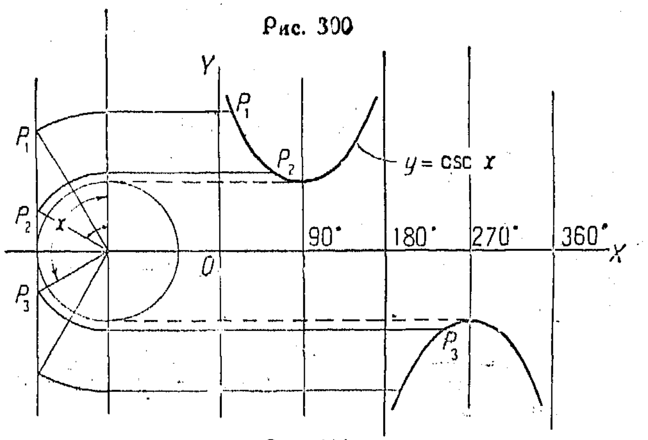


Рис. 301.

ложению подвижной стороны для графика $y = \operatorname{tg} x$. Самое же вращение следует производить в отрицательном направлении, так как перед x стоит знак — (рис. 299).

637. Графики функций $y = \sec x$ и $y = \operatorname{cosec} x$. Полагая радиус окружности равным единице, видим, что радиус-вектор OS или OS_1 является линией секанса. Для нахождения величин этой линии вращаем радиус-вектор OS до вертикального положения, а затем проектируем его на соответствующую ординату (рис. 300).

График косеканса аналогичен предыдущему, но начальное положение подвижной стороны угла x должно быть взято на $90°$ далее (рис. 301).

Ясно, что путем перенесения начала координат на отрезок, соответствующий углу $90°$, мы получим график секанса. Другими словами

$$\sec x = \operatorname{cosec}(90° + x).$$

Глава XXV.

РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

638. Решение прямоугольных треугольников. Для решения прямоугольных треугольников пользуются формулами, указанными в главе XXIII, и следующими соотношениями, известными из геометрии:

$$\angle A + \angle B = 90°; \quad c^2 = a^2 + b^2.$$

Решение будет возможным, если известны два элемента треугольника (не считая прямого угла), причем один из них должен быть стороной.

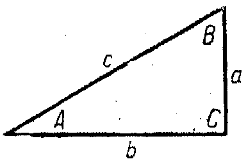


Рис. 302.

Выбираемая для решения тригонометрическая формула должна содержать три величины, из которых две заданы, а одна является искомой.

Пример 1. Дано: $A = 32°16'$; $a = 200$. Найти b, c и B. Имеем: $B = 90° - A = 90° - 32°16' = 57°44'$.

$$\sin A = \frac{a}{c} \text{ или } c = \frac{a}{\sin A}$$

$$\sin 32°16' = 0{,}53386,$$

следовательно

$$c = \frac{200}{0{,}53386} = 374{,}6$$

$$\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a} \text{ или } b = a \operatorname{ctg} A$$

$$\operatorname{ctg} 32°16' = 1{,}5839,$$

следовательно

$$b = 200 \cdot 1{,}5839 = 316{,}78.$$

Пример 2. Дано: $a = 52{,}6$; $b = 65{,}4$.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2767 + 4277} = 83{,}92,$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} = \frac{52{,}6}{65{,}4} = 0{,}8043;$$

из таблиц находим

$$A = 38°49',$$

отсюда

$$B = 90° - 38°49' = 51°11'.$$

Пример 3. Дано: $A = 59°58'$; $b = 412$. Найти a, c, B.

$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$, т. е. $a = b \operatorname{tg} A$	$\cos A = \frac{b}{c}$ или $c = \frac{b}{\cos A}$.
$\operatorname{tg} 59°58' = 1{,}7297$	$c = \frac{412}{0{,}50050} = 823{,}11$
$a = 412 \cdot 1{,}7297 = 712{,}64$	

$$B = 90° - A = 90° - 59°58' = 30°2'.$$

Пример 4. Дано: $B = 70°10'$; $c = 35{,}2$.

$\sin B = \frac{b}{c}$ или $b = c \sin B$	$\cos B = \frac{a}{c}$ или $a = c \cos B$
$\sin 70°10' = 0{,}94068$	$\cos 70°10' = 0{,}33929$
$b = 35{,}2 \cdot 0{,}94068 = 33{,}112$	$a = 35{,}2 \cdot 0{,}33929 = 11{,}94$

$$A = 90° - B = 90° - 70°10' = 19°50'.$$

639. Употребление логарифмов при решении прямоугольных треугольников ускоряет вычисления и делает их более точными.

Пример 1. Дано: $a = 23{,}47$; $B = 26°15{,}2'$. Найти A, b и c.
Имеем:

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg} B,\ b = a \operatorname{tg} B;\quad \frac{a}{c} = \cos B,\ c = \frac{a}{\cos B}.$$

$\lg \operatorname{tg} B = 9{,}64576 - 10$	$\lg \cos B = 9{,}95272 - 10$
$\lg a = 1{,}37051$	$\lg a = 1{,}37051$
$\lg b = 1{,}01627$	$\lg c = 1{,}41779$
$b = 10{,}38$	$c = 26{,}17$

$$A = 90° - B = 90° - 26°15{,}2' = 63°44{,}8'.$$

Пример 2. Дано: $B = 58°39'$; $c = 35{,}73$. Найти A, a и b.
Имеем:

$$\frac{b}{c} = \sin B \text{ или } b = c \sin B,\quad \frac{a}{c} = \cos B \text{ или } a = c \cos B.$$

$\lg \sin B = 9{,}93146 - 10$	$\lg \cos B = 9{,}71622 - 10$
$\lg c = 1{,}55303$	$\lg c = 1{,}55303$
$\lg b = 1{,}48449$	$\lg a = 1{,}26925$
$b = 30{,}51$	$a = 18{,}59$

$$A = 90° - B = 90° - 58°39' = 31°21'.$$

Пример 3. Дано: $a = 50$; $b = 60$. Найти A, B и c.

$\frac{a}{b} = \operatorname{tg} A,\ \operatorname{tg} A = \frac{5}{6}$	$\frac{a}{c} = \sin A,\quad c = \frac{a}{\sin A}$
$\lg a = 11{,}6990 - 10$	$\lg a = 11{,}6990 - 10$
$\lg b = 1{,}7782$	$\lg \sin A = 9{,}8063 - 10$
$\lg \operatorname{tg} A = 9{,}9208 - 10$	$\lg c = 1{,}8927$
$A = 39^\circ 48'$.	$c = 78{,}1$

640. Другой прием при решении прямоугольных треугольников с помощью логарифмов. Предположим, что нам нужно найти катет a прямоугольного треугольника по данной гипотенузе c и другому катету b (рис. 303).

Так как $a = \sqrt{(712{,}2)^2 - (554{,}5)^2}$,
то a можно вычислить обычным способом. Однако применение логарифмов при таком виде выражения неудобно.

Из алгебры известно, что

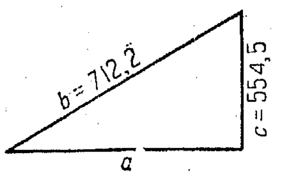


Рис. 303.

$$b^2 - c^2 = (b + c)\ (b - c),$$

но

$$b + c = 1266{,}7$$
$$b - c = 157{,}7,$$

отсюда

$$a = \sqrt{1266{,}7 \cdot 157{,}7}\ .$$

Полученное выражение может быть легко вычислено с помощью логарифмов.

Косоугольные треугольники.

641. Закон синусов. Во всяком треугольнике стороны пропорциональны синусам противолежащих углов

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}\ ;\quad \frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C} \text{ и т. д.}$$

Отсюда

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}\ . \quad [90]$$

642. Закон косинусов. Во всяком треугольнике квадрат стороны равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла, заключенного между ними.

[309]
$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{cases}$$

или

[310]
$$\begin{cases} \cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ \cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{cases}$$

643. Решение косоугольных треугольников. При решении косоугольных треугольников наиболее важным является знание закона синусов (n^0 641) и закона косинусов (n^0 642).

Рекомендуется сперва вычертить треугольник по заданным элементам и измерить его стороны и углы. Для многих задач, встречающихся в инженерном деле, точность полученных при этом способе результатов оказывается вполне достаточной.

Если же требуется большая точность, то применяют логарифмические таблицы.

Часто при решении косоугольных треугольников бывает удобно разбивать их на прямоугольные, применяя при этом соотношение $c^2 = a^2 + b^2$, а также обычные тригонометрические формулы.

Пример. Даны три стороны косоугольного треугольника. Найти его углы (рис. 304).

Имеем:

$$h^2 = 15^2 - x^2$$
$$h^2 = 10^2 - (20 - x)^2,$$

отсюда

$$225 - x^2 = 100 - 400 + 40x - x^2,$$
$$40x = 525,$$
$$x = 13{,}125,$$

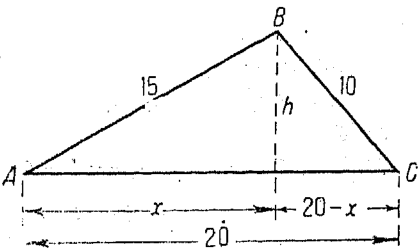


Рис. 304.

$$\cos A = \frac{x}{15} = \frac{13{,}125}{15} = 0{,}875;\quad A = 28^\circ 57',$$

$$\cos C = \frac{20 - x}{10} = \frac{6{,}875}{10} = 0{,}6875;\quad C = 46^\circ 34',$$

$$B = 180^\circ - (A + C) = 180^\circ - 75^\circ 31' = 104^\circ 29'.$$

Косоугольный треугольник имеет 6 элементов: три стороны и три угла. Из трех заданных элементов по крайней мере один должен быть стороной треугольника, тогда можно найти остальные три элемента.

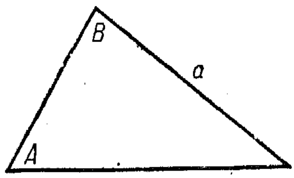


Рис. 305.

В зависимости от того, какие элементы заданы и какие требуется найти, рассмотрим следующие случаи:

644. Случай 1. Даны два угла и одна сторона.

Условие. Сумма двух данных углов должна быть меньше 180°.

Для решения, начертим треугольник, а затем применим закон синусов (рис. 305).

Данные	Искомые	Формулы
A, B, a	b	$b=\frac{a\sin B}{\sin A}$
	C	$C=180^\circ-(A+B)$
	c	$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{a\sin(A+B)}{\sin A}$

Для проверки можно применить формулу:

$$c\cos B+b\cos C=a.$$

$$\text{Площадь треугольника}=\frac{1}{2}\,ab\sin C=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}.$$

Другой способ решения. Опустим перпендикуляр из вершины на основание и решим два прямоугольных треугольника (этот перпендикуляр не следует опускать на заданную сторону a).

Пример. Случай 1. Дано: $b=6{,}362$; $A=76^\circ 13'$; $C=35^\circ 17'$. Найти a, c и B.

$$B=180^\circ-(A+C)=180^\circ-111^\circ 30'=68^\circ 30'.$$

$a=\frac{b\sin A}{\sin B}$	$c=\frac{b\sin C}{\sin B}$
$\lg b=0{,}80359$	$\lg b=0{,}80359$
$\lg\sin A=9{,}98731-10$	$\lg\sin C=9{,}76164-10$
$10{,}79090-10$	$10{,}56523-10$
$\lg\sin B=9{,}96868-10$	$\lg\sin B=9{,}96868-10$
$\lg a=0{,}82222$	$\lg c=0{,}59655$
$a=6{,}641$	$c=3{,}95$

645. Случай 2. Даны две стороны и угол между ними. Обозначим большую сторону буквой a $(a > b)$.

Применяя закон синусов и закон косинусов, имеем:

Данные	Искомые	Формулы
a, b, C	c	$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$.
Сперва следует найти меньший $\angle B$	B	$\sin B = \frac{b \sin C}{c}$,
	A	$A = 180° - (B + C)$.

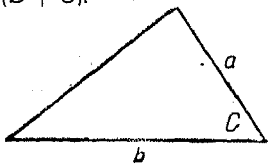


Рис. 306.

Для проверки можно применить формулу

$$a\cos B + b\cos A = c.$$

Другой способ решения. Опустим перпендикуляр из вершины на основание и решим два прямоугольных треугольника (не следует опускать этот перпендикуляр из вершины данного угла C).

Пример. Случай 2. Дано: $a = 20{,}63$; $b = 12{,}55$; $C = 27°24'$.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C} = \sqrt{(20{,}63)^2 + (12{,}55)^2 - 2 \cdot 20{,}63 \cdot 12{,}55 \cdot 0{,}8878} =$$
$$= \sqrt{425{,}6 + 157{,}5 - 459{,}7} = 11{,}09,$$

$$\sin B = \frac{b \sin C}{c}$$

$$\begin{aligned}
\lg b &= 1{,}09864 \\
\lg \sin C &= 9{,}66295 - 10 \\
\hline
& 10{,}76159 - 10 \\
\lg c &= 1{,}04571 \\
\hline
\lg \sin B &= 9{,}71588 - 10 \\
B &= 31°19'.
\end{aligned}$$

$$A = 180° - (31°19' + 27°24') = 121°17'.$$

646. Случай 3. Даны три стороны. Заметим, что бо́льшая сторона должна быть меньше суммы двух других сторон.

Начертим треугольник и применим для нахождения неизвестных элементов закон синусов и закон косинусов.

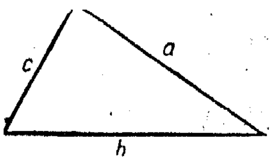


Рис. 307.

Данные	Искомые	Формулы
a, b, c	A	$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
	B	$\sin B = \frac{b \sin A}{a}$,
	C	$\sin C = \frac{c \sin A}{a}$.

Для проверки имеем

$$A+B+C=180°.$$

Если требуется бо̀льшая точность, то находим полупериметр

$$S=\frac{a+b+c}{2},$$

а затем отыскиваем нужные элементы, как это показано ниже:

Данные	Искомые	Если половина угла близка к нулю, то применяем формулу	Если половина угла близка к 90°, то применяем формулу
$a, b, c,$	A	$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(S-b)(S-c)}{bc}}$	$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{S(S-a)}{bc}}$
		$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(S-b)(S-c)}{S(S-a)}}$	
	B	$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(S-a)(S-c)}{ac}}$	$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{S(S-b)}{ac}}$
		$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(S-a)(S-c)}{S(S-b)}}$	
	C	$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(S-a)(S-b)}{ab}}$	$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{S(S-c)}{ab}}$
		$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(S-a)(S-b)}{S(S-c)}}$	

Для проверки имеем:

$$A+B+C=180°.$$

Площадь треугольника равна

$$\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}.$$

Пример. Случай 3. Дано: $a=10$; $b=12$; $c=14$. Найти A, B и C,

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{144+196-100}{336}=0{,}714,$$

$A=44°26'$.

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{12\cdot 0{,}70008}{10}=0{,}84010,$$

$B=57°8'$.

$$\sin C=\frac{c\sin A}{a}=\frac{14\cdot 0{,}70008}{10}=0{,}98010,$$

$C=78°29'$.

Проверяем: $A+B+C=180°3'$.

647. Случай 4. Даны две стороны и угол против одной из них. Заметим, что при некоторых соотношениях между заданными элементами иногда треугольник построить вообще невозможно, иногда можно построить два треугольника иногда же один.

Начертим пробный треугольник, если это окажется возможным. Затем применим закон синусов.

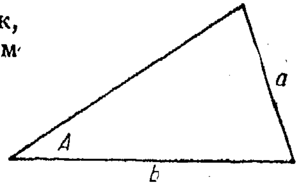


Рис. 308.

Пусть даны:

$$A, a \text{ и } b.$$

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}$$

Если $\sin B > 1$, то решение невозможно.

Если $\sin B = 1$, то треугольник — прямоугольный.

Если $\sin B < 1$, то возможны два решения: B_1 и B_2.

Действительно, угол B может быть острым или тупым (дополнительным первого до 180°).

$B_1 + A$ всегда будет меньше 180°.

$B_2 + A$ может быть, а может и не быть меньше 180°.

Очевидно решение возможно лишь в первом случае.

Итак имеем:

Данные	Искомые	Формулы
a, b, A	B	$\sin B = \dfrac{b \sin A}{a}$,
	C	$C = 180° - (A + B)$,
	c	$c = \dfrac{b \sin C}{\sin B} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$.

Для проверки имеем:

$$a \cos B + b \cos A = c.$$

$$\text{Площадь треугольника} = \frac{1}{2} ab \sin C.$$

Пример 1. Случай 4. Дано: $A = 43°26'$; $a = 4{,}75$; $b = 18{,}6$. Найти c, B, C.

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}$$

$$\lg b = 1{,}26951$$

$$\lg \sin A = 9{,}83728 - 10$$

$$1{,}10679$$

$$\lg a = 0{,}67669$$

$$\lg \sin B = 0{,}43010.$$

Это показывает, что $\sin B > 1$, т. е. решение невозможно.

Пример 2. Дано: $A = 43°26'$; $a = 14{,}75$; $b = 18{,}6$. Найти c, B и C.

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a},$$

$$\begin{array}{rl} \lg b = & 1{,}26951 \\ \lg \sin A = & 9{,}83728 - 10 \\ \hline & 11{,}10679 - 10 \\ \lg a = & 1{,}16879 \\ \hline \lg \sin B = & 9{,}93800 - 10 \end{array}$$

Отсюда ясно, что $\sin B < 1$ и что возможны два решения. Произведем вычисления для $B = 60°6'$ и $B = 119°54'$.

Последний угол является дополнительным для $60°6'$ до $180°$.

$B = 60°6'$

$C = 180° - (A + B) = 180° - (43°26' + 60°6') = 76°28'$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

$$\begin{array}{rl} \lg a = & 1{,}16879 \\ \lg \sin C = & 9{,}98777 - 10 \\ \hline & 11{,}15656 - 10 \\ \lg \sin A = & 9{,}83728 - 10 \\ \hline \lg c = & 1{,}31928 \\ c = & 20{,}86. \end{array}$$

$B' = 119°54'$

$C' = 180° - (43°26' + 119°54') = 16°40'$

$$c' = \frac{a \sin C'}{\sin A}$$

$$\begin{array}{rl} \lg a = & 1{,}16879 \\ \lg \sin C' = & 9{,}45758 - 10 \\ \hline & 10{,}62637 - 10 \\ \lg \sin A = & 9{,}83728 - 10 \\ \hline \lg c = & 0{,}78909 \\ c = & 6{,}153 \end{array}$$

648. Простое правило для определения, какую формулу следует применить при решении данного треугольника.

Законом косинусов можно пользоваться в тех случаях, когда даны две стороны и угол между ними или три стороны, а законом синусов — во всех остальных случаях.

Для треугольников с тупыми углами можно пользоваться обеими формулами.

649. Решение треугольников. При решении треугольников для нахождения каждого неизвестного лучше пользоваться заданными элементами, чем определять сначала один элемент, а затем пользоваться полученным результатом для нахождения других. Так например, если мы, вычислив одну сторону, воспользуемся ею для нахождения другой, то всякая погрешность, сделанная при первом вычислении, будет влиять на результат последующего.

Необходимо выбирать такую функцию (синус или тангенс), в выражение которой войдет искомый элемент и заданные величины. Там, где это возможно, лучше всего помещать неизвестное в числителе с целью избежать деления.

650. Тупые углы. Если при решении треугольника выяснится, что косинус угла отрицательный, то угол — тупой.

Так например, если $\cos A = -0{,}7660$, то A — тупой угол, а его дополнение A будет иметь косинус, равный $+0{,}7660$.

Из таблиц найдем:

$$A' = 40^\circ$$

$$A = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ.$$

Глава XXVI.

ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ.

651. Полярные координаты. Положение точки на плоскости можно определить не только прямоугольными координатами x и y, но также посредством угла θ и отрезка OP, отложенного на подвижной стороне угла θ. Указанный отрезок называется *радиусом-вектором* и обычно обозначается буквой ρ (рис. 309).

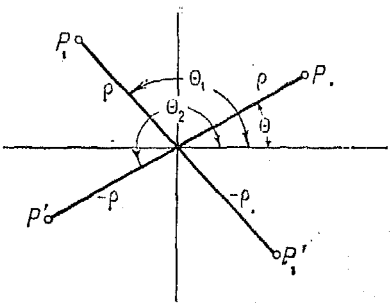


Рис. 309.

Радиус-вектор ρ и векторный угол θ называются *полярными* координатами точки $P(\rho, \theta)$, причем в скобках пишут сначала радиус-вектор (см. n⁰ 704).

Если векторный угол θ образуется путем вращения в направлении, противоположном часовой стрелке, то он считается положительным. При вращении же по часовой стрелке—отрицательным.

Радиус-вектор измеряется от полюса до заданной точки, если ρ положителен, и от заданной точки до полюса, если ρ отрицателен.

Так, точка P' получена вращением подвижной стороны на угол θ и величина отрицательного радиуса-вектора откладывается в обратном направлении на продолжение OP.

Координаты точки P' в последнем случае суть $(-\rho, \theta)$. Точка P' может быть также определена и координатами (ρ, θ_2), как это показано на рис 309, где $\theta_2 = \theta + 180^\circ$.

Можно приобрести бумагу, на которой нанесена сетка. Бумага с углами, указанными в градусах и радианах, весьма удобна для изображения графиков функций, зависящих от величин углов.

652. Полярный график функции $\rho = a \cos \theta$ [311]. Если отрезок a, лежащий на неподвижной стороне угла θ, проектируется на подвижную сторону, то длина проекции равна ρ.

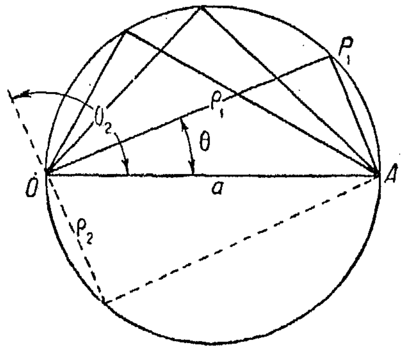


Рис. 310.

Геометрическое место точек P при изменении угла θ является окружностью, ибо при получении каждой проекции образуется прямоугольный треугольник с вершиной прямого угла в P и гипотенузой a. Как известно из геометрии (см. n° 540), в этом случае кривая AP_1O есть полуокружность (рис. 310).

Для угла θ_2, лежащего во II квадранте и имеющего отрицательный косинус, отрезок ρ_2 откладывается на продолжении подвижной стороны, как это показано на рис. 310.

Угол при вершине P_2 также прямой и при изменении θ в пределах II квадранта точка P_2 описывает полуокружность OP_2A.

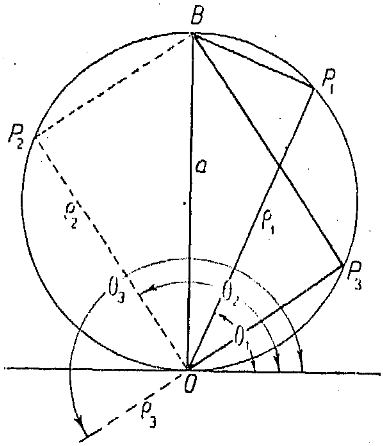


Рис. 311.

Если подвижная сторона угла θ поворачивается на 360°, то окружность описывается дважды.

Полярные координаты обладают по сравнению с прямоугольными тем преимуществом, что отрезок OP имеет и величину и направление.

Такие отрезки называются *векторами.*

653. Полярный график функции $\rho = a \sin \theta$ [312]. Так как $\rho = a \sin\theta$, то радиус-вектор равняется стороне, лежащей против угла θ в прямоугольном треугольнике с гипотенузой a. Поэтому отрезок a следует откладывать не на OA, а на перпендикулярной к ней OB.

Проекция указанного отрезка на подвижную сторону угла θ, как это было доказано в предыдущем n°, является катетом прямоугольного треугольника, у которого вершина прямого угла лежит в P_1.

При переходе угла θ во II квадрант точка P_2 описывает полуокружность BP_2O.

В III и IV квадрантах $\sin\theta$ отрицателен, так что ρ следует откладывать на продолжении подвижной стороны.

654. Вращение полярных графиков. Так как пользование полярными графиками синусов и косинусов весьма удобно, то необходимо знать, как следует преобразовать график $\rho = \cos\theta$, чтобы получить из него какой-нибудь другой, например график $\rho = \cos(\theta \pm 15°)$.

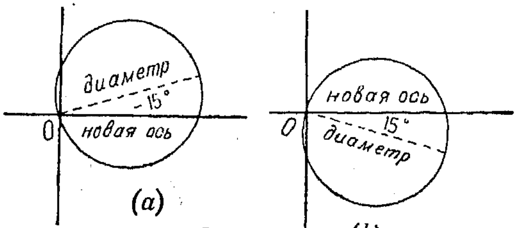


Рис. 312.

Начертим окружность, соответствующую уравнению $\rho = \cos\theta$, и повернем ось на второй из углов, стоящих в скобках, в направлении, указанном знаком (рис. 312).

Если же повернуть не ось, а самый график, то направление вращения должно быть противоположно указанному знаком.

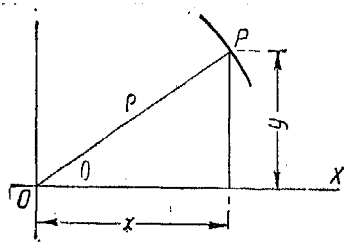


Рис. 313.

Полученное положение окружности и будет выражать графически функцию $\rho = \cos(\theta \pm 15°)$.

Как и ранее, мы начинаем построение графика основной функции и избегаем возможности ошибиться, принимая во внимание при вращении оси знак, стоящий при постоянной.

655. Соотношение между полярными и прямоугольными координатами. Из рис. 313, где полярные координаты точки P суть (ρ, θ), а прямоугольные — $(x, и\ y)$, имеем:

[313] $$x = \rho\cos\theta$$

[314] $$y = \rho\sin\theta.$$

Пользуясь этими формулами, можно преобразовать любое уравнение, заданное в прямоугольных координатах, в уравнение, выражающее ту же функцию в полярной системе.

Так например, уравнение прямой линии $x=5$ принимаст вид

$$\rho\cos\theta=5.$$

Уравнение

$$2x+y=4$$

обращается в

$$2\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=4.$$

Уравнение окружности $x^2+y^2=a^2$ после преобразования обращается в такое:

$$\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta=a^2$$

или

$$\rho^2\ (\cos^2\theta+\sin^2\theta)=a^2,$$

откуда

$$\rho^2=a^2 \text{ или } \rho=a.$$

Для перехода от *полярных* координат к *прямоугольным* имеем следующие формулы:

[315] $$\theta=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

[316] $$\rho=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Из формулы [315] можем получить следующие соотношения, удобные в практических приложениях:

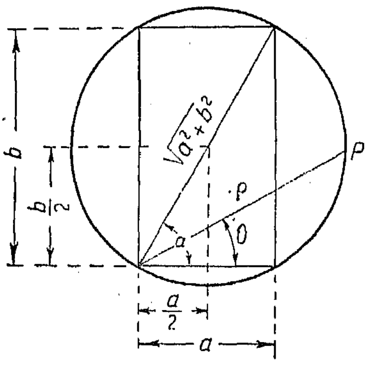


Рис. 314.

$$\theta=\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\ \theta=$$
$$=\arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ и } \cos\theta=$$
$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

656. График функции $\rho=a\cos\theta+b\sin\theta$ [317]. Предположим, что мы имеем прямоугольник со сторонами a и b, изображенный на рис. 314. Опишем вокруг него окружность.

Диагональ прямоугольника будет являться диаметром окружности и равна

$$\sqrt{a^2+b^2}.$$

Очевидно, радиус окружности будет равняться

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}.$$

Уравнение окружности в прямоугольных координатах, начало которых расположено в нижней левой вершине прямоугольника, будет иметь вид

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\right)^2.$$

Раскрывая в полученном уравнении скобки, имеем:

$$x^2-ax+\frac{a^2}{4}+y^2-by+\frac{b^2}{4}=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}.$$

Приводя подобные члены и сокращая, получим:

$$x^2+y^2=ax+by.$$

Выразим теперь это уравнение в полярных координатах. Для этого вспомним, что

$$x^2+y^2=\rho^2;\ x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta.$$

Тогда

$$\rho^2=a\rho\cos\theta+b\rho\sin\theta.$$

Разделив на ρ, имеем:

$$\rho=a\cos\theta+b\sin\theta$$

или

$$\rho=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta\right).$$

Положим теперь

$$\alpha=\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

тогда найдем из предыдущего

$$\rho=\sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\alpha\cos\theta+\sin\alpha\sin\theta)=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\alpha).$$

Это уравнение, как уже было доказано в n^0 654, выражает окружность $\rho=\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta$, повернутую на угол α.

Таким образом график функции

$$\rho = a\cos\theta + b\sin\theta$$

есть окружность радиуса $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$, описанная вокруг прямоугольника со сторонами a и b.

Если ρ' есть радиус-вектор кривой $a\cos\theta$, а ρ'' — радиус-вектор кривой $b\sin\theta$, то

$$\rho = \rho' + \rho''.$$

График (c) на рис. 315 получен посредством сложения соответствующих радиусов-векторов из графиков (a) и (b)

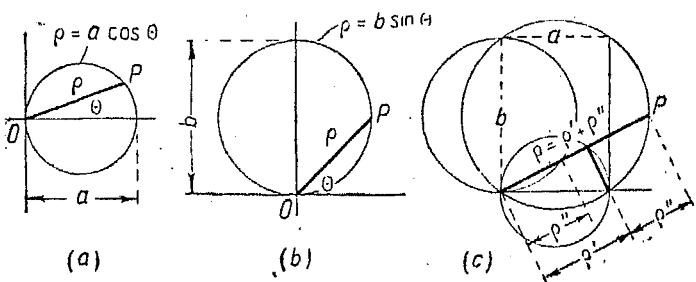


Рис. 315.

Пользуясь циркулем, можно сложить два или несколько радиусов-векторов и получить таким образом точки искомого графика.

657. Элемент времени в полярных графиках синуса и косинуса. Полярные координаты весьма полезны при изучении графиков синуса и косинуса, рассмотренных в n⁰ 614 и следующих. Их можно с удобством применять для изучения вращательного движения.

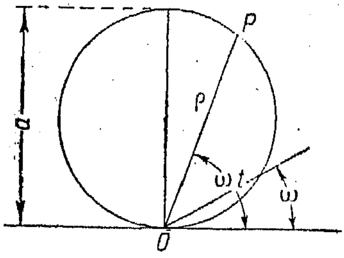


Рис. 316.

В настоящем n⁰ рассмотрим только график синуса.

Пусть ω — угол в радианах, описанный подвижной стороной (например кривошипом или арматурой электродвигателя) в 1 сек. при равномерном вращении.

Через t сек. эта сторона повернется на угол $\theta = \omega t$ радианов, следовательно

$$\rho = a\sin\omega t \text{ (рис. 316).}$$

658. Если угловая скорость равна 0,6981 радианов в секунду, то

$$\rho = a \sin\ (0{,}6981\, t),$$

причем a представляет собой длину кривошипа.

Период графика равен числу секунд, нужному для одного оборота.

На рис. 317 показан график вращательного движения, имеющего период 10 сек. Это значит, что один оборот совершается в течение 10 сек.

В случае очень быстрого вращения приходится строить графики для весьма малых промежутков времени, например десятых и даже сотых частей секунды (см. n⁰ 614, где для этой же цели применены прямоугольные координаты).

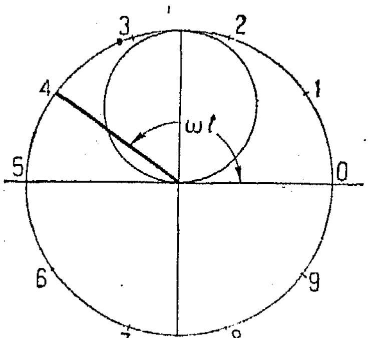


Рис. 317.

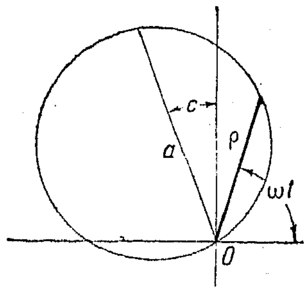


Рис. 318.

Если измерять углы не от горизонтальной оси, а от какой-нибудь другой, лежащей под некоторым углом к горизонтали, тогда

$$\rho = a \sin\ (\omega t - c),$$

и наш график примет вид, показанный на рис 318.

Следует помнить, что полярные координаты суть не (ρ, t), а (ρ, θ), где $\theta = \omega t$.

Так например, выражение

$$\rho = a \sin\ (0{,}6981 t)$$

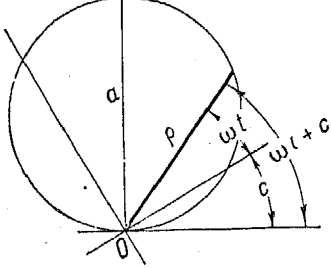


Рис. 319. $\rho = a \sin (\omega t + c)$.

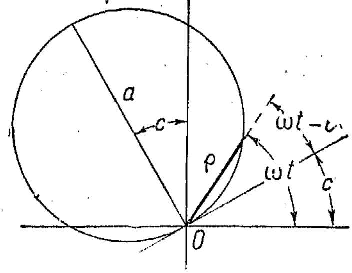


Рис. 320. $\rho = a \sin (\omega t - c)$.

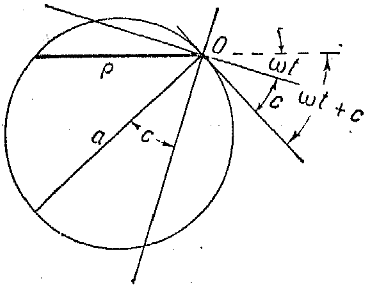


Рис. 321. $\rho = -a \sin (\omega t + o$

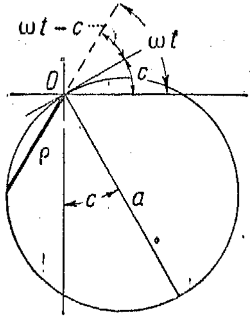


Рис. 322. $\rho = -a \sin (\omega t - c)$.

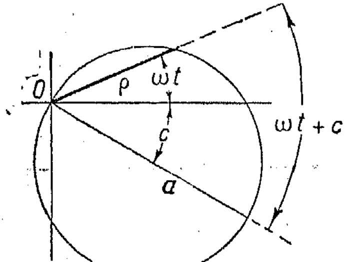


Рис. 323. $\rho = a \cos (\omega t + c)$.

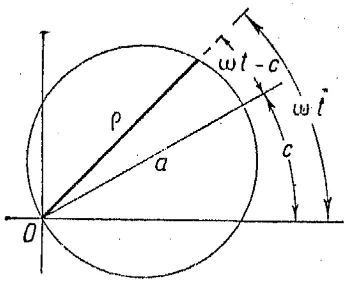


Рис. 324. $\rho = a \cos (\omega t - c)$.

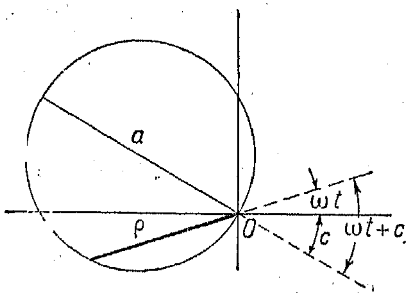


Рис. 325. $\rho = -a \cos (\omega t + c)$.

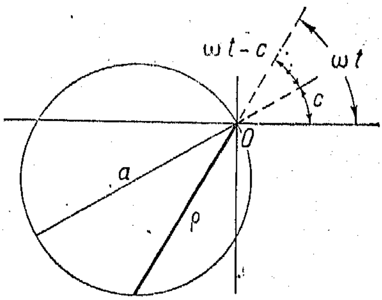


Рис. 326. $\rho = -a \cos (\omega t - c)$.

совсем не уравнение в полярных координатах, но

$$\begin{cases} \rho = a \sin\ (0{,}6981\, t) \\ \theta = 0{,}6981\, t \end{cases}$$

является парой полярных уравнений в параметрической форме.

Можно вычертить кривую $\rho = \sin\ \omega t$, употребляя вместо координаты θ — время t, так же как это мы делали с x в случае прямоугольных координат, однако это даст нам не окружность, а более сложные кривые.

659. Полярные графики функций синуса и косинуса рис. 319—326).

Глава XXVII.

ВЕКТОРЫ, МНИМЫЕ И КОМПЛЕКСНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ.

Векторы.

660. Вектором называется отрезок прямой, имеющий определенное направление. Если какое-нибудь количество обладает последним свойством (т. е. определенностью направления), то вектор может служить весьма удобным средством для графического изображения этого количества.

Выражение, представляемое вектором, должно обладать как величиной, так и направлением, так что длина вектора характеризует величину, а направление его соответствует направлению данного количества.

Два вектора равны между собой, если они имеют одинаковую величину и направление. Из каждой точки, принятой за начальную, на данной плоскости можно провести вектор, равный другому, лежащему в той же плоскости.

661. Сложение векторов. Если имеется два вектора AB и BC (рис. 327а), то первый из них можно рассматривать как символ, изображающий движение от точки A к точке B, а второй — от B к C. В результате этих движений получается перемещение тела из A в C.

Сумма векторов AB и BC есть вектор суммы AC, иначе говоря

$$AB + BC = AC;$$

Сумма двух указанных векторов есть вектор, соединяющий начало первого с концом второго (предполагая, что начало второго вектора совпадает с концом первого).

Если два вектора имеют общее начало, то их сумму можно представить в виде диагонали параллелограмма, сторонами которого являются эти векторы (рис. 327b).

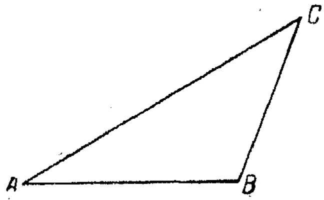


Рис. 327а.

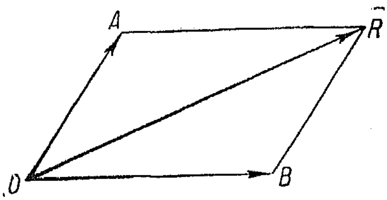


Рис. 327b.

Проекции вектора на координатные оси называются его составляющими или компонентами. Так, на рис. 328 M_1M_2 есть горизонтальная составляющая вектора AB, а N_1N_2 — вертикальная.

Таким образом

$$\text{вектор } AB = \text{вектору } M_1M_2 + \text{вектор } N_1N_2.$$

Если все векторы параллельны, то результирующий вектор по величине равен алгебраической сумме их длин и имеет одинаковое с ними направление.

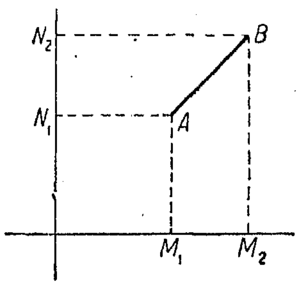


Рис. 328.

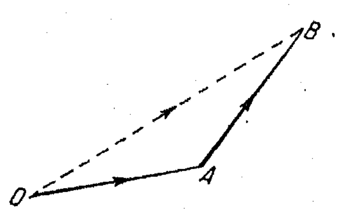


Рис. 329.

Векторы, не параллельные между собой, как например AO и OB на рис. 329, также могут быть сложены. Для этого конец одного вектора, безразлично которого, совмещается с началом второго. Вектор, соединяющий начало первого с концом второго, представляет собой их сумму.

Первый вектор характеризует перемещение из точки O в точку A, второй — из точки A в B. В результате получается перемещение из O в B, которое и выражается одним вектором OB.

Пример 1. Рассмотрим движение лодки, пересекающей реку, скорость течения которой равна 3 *км/час*. Лодка может пройти в спокойной воде 4 *км/час*.

Пусть AB — направление скорости лодки (рис. 330); BC — направление скорости течения. Через 15 минут после начала движения, если бы оно происходило в спокойной воде, лодка пришла бы в точку D. Но так как за это время течение отнесло ее на расстояние DE, то положение лодки в конце указанного промежутка времени определится точкой E, причем длина $DE = \frac{3}{4}$ *км*.

Через 30 минут после отправления, лодка прошла бы в спокойной воде 2 *км*, но течение снесло ее на расстояние $1^1/_2$ *км*. Таким образом конечное положение определится точкой G.

Проследив за движением лодки до конца ее пути, видим, что направление его определяется линией AC.

Так как изображенные на рисунке отрезки являются векторами скорости, то вектор AC характеризует по величине и направлению скорость лодки по отношению к наблюдателю, стоящему на берегу.

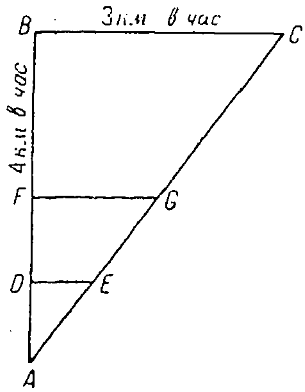


Рис. 330.

Решая задачу аналитически, получим:

$$AC = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ км/час}.$$

Пример 2. Велосипедист движется на север со скоростью 15 *км/час*. Ветер дует с северо-запада и имеет скорость 10 *км/час*. Чему равна его скорость по отношению к велосипедисту?

Рис. 331.

Движение со скоростью 15 *км/час* при отсутствии ветра создает эффект ветра со скоростью 15 *км/час*.

Добавляя сюда скорость ветра, дующего с северо-запада, равную 10 *км/час*, найдем результирующую скорость 23,2 *км/час*.

Пример 3. Цапфа кривошипа паровой машины движется со скоростью 3 *м/сек*. Какую скорость имеет ползун, если в рассматриваемый момент кривошип образует с горизонталью угол 45°?

Длина кривошипа — 30 *см*, длина шатуна — 1,2 *м*.

Нарисуем схему механизма (рис. 332) и проведем в точке B касательную BC к окружности. Отложим на этой касательной отрезок длиной в 3 единицы. Далее проведем прямую BE, перпендикулярную к AB. Отрезок BE будет изображать скорость вращения точки B вокруг A, которая не влияет на скорость ползуна.

Проводя CD параллельно BE и горизонтальную прямую BD, найдем точку D пересечения этих линий. Отрезок BD выражает по величине и направлению скорость ползуна.

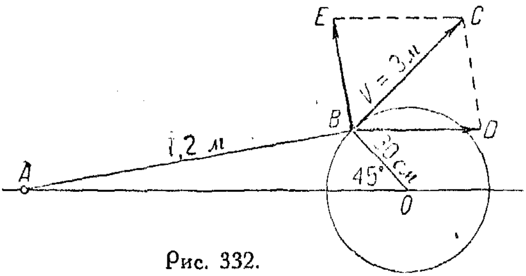


Рис. 332.

Пример 4. Рассмотрим колесо радиуса r, катящееся с угловой скоростью ω; скорость движения центра положим равной v_1.

Скорость любой точки обода по отношению к центру равна $r\omega = v_1$.

Абсолютная скорость любой точки есть вектор суммы скорости по отношению к центру и абсолютной скорости самого центра, как это показано на рис. 333 для точки B.

Для нахождения величины и направления скорости точки B в положении, указанном на рисунке, начертим $BA = v_1$ параллельно v_1 (т. е. горизонтально), и скорость $r\omega$, касательную к окружности в точке B. Замыкая треугольник, получим вектор V, изображающий искомую абсолютную скорость точки B.

Очевидно, v перпендикулярна к BC, так как B и C находятся на колесе, которое является твердым телом [1].

Скорость точки C равна нулю.

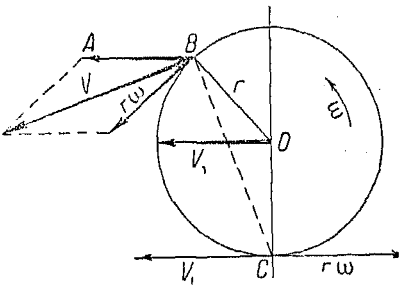


Рис. 333.

Мнимые и комплексные величины.

662. Если такое уравнение как $x^2+1=0$ вообще имеет решение, то должно существовать число, квадрат которого

---

[1]) Перпендикулярность вектора скорости к направлению BC вытекает из следующих соображений.

Угол при вершине A в параллелограмме скоростей равняется углу BOC. Действительно, линия AB перпендикулярна к OC и направление скорости $r\omega$ перпендикулярно к BO. Так как стороны углов взаимно перпендикулярны, то углы равны. Сравнивая $\triangle\, BCO$ с треугольниками, образующими параллелограмм скоростей, видно, что угол между направлением скоростей v и $r\omega$ равен углу OBC.

Угол между направлением скорости $r\omega$ и BO прямой.

Из отмеченного только что равенства углов следует, что направление скорости v перпендикулярно к BC.

Прим. ред.

равен (-1). Обозначим это число буквой i, тогда по определению имеем:

$$i^2 = -1.$$

Предположим, что это число i может входить наравне с другими числами в алгебраические выражения и что над ним можно производить обычные алгебраические действия (т. е. сложение, вычитание и т. д.).

663. График мнимой единицы. Если мы желаем изобразить графически положительную величину a, то можем отложить на линии OA (рис. 334) соответствующий отрезок вправо от точки O, т. е. в положительном направлении.

Умножая a на (-1), получим $(-a)$. Эту величину придется отложить налево от точки O, т. е. в отрицательном направлении.

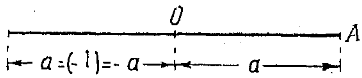


Рис. 334.

Таким образом, умножение числа a на (-1) в геометрическом смысле равносильно вращению отрезка, изображающего эту величину, на два прямых угла, вокруг точки O. Величина $(-a)$ изображается отрезком, равным отрезку a, но направленным в другую сторону от точки O.

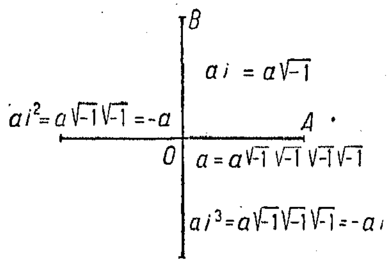


Рис. 335.

Как было сказано ранее, i есть число, квадрат которого равен (-1):

$$i^2 = -1,$$

следовательно наши предыдущие действия свелись к умножению a на i^2 или $i \cdot i$.

Умножение a на i равносильно действию, которое, будучи повторено дважды, соответствует повороту вокруг точки O на два прямых угла. Иначе говоря, умножение на i геометрически равносильно повороту на один прямой угол.

В таком случае величину ai естественно изобразить отрезком OB, равным по величине OA, но образующим с последним угол $90°$ (рис. 335).

Точно также при умножении a на $i \cdot i \cdot i$ угол поворота равен трем прямым, так как $i \cdot i \cdot i = i^3 = -i$.

Умножение на $i \cdot i \cdot i \cdot i = i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$ можно представить себе как вращение на четыре прямых угла, т. е. возврат в исходное положение.

Из сказанного видно, что все четные степени i равны $(+1)$ или (-1), а нечетные — $(+i)$ и $(-i)$.

Так как $(-i)$ означает $i \cdot (-1)$, то $(-i)^2 = (-1)^2 i^2 = 1 \cdot (-1)$.

Следовательно имеем еще одно число $(-i)$, квадрат которого равен (-1).

Если мы отметим, что знак $\sqrt{-1}$ выражает определенный квадратный корень из (-1) и назовем его i, то $-\sqrt{-1}$ или $(-i)$ выражает другой квадратный корень из (-1).

Величина i называется *мнимой единицей*, а величина ai — *мнимым числом*, причем a — число действительное, отличное от нуля.

Выражение $a + bi$ называется *комплексным количеством*, причем в нем a и b суть любые действительные числа.

664. Сложение и вычитание мнимых количеств. Из предыдущего n⁰ следует, что

$$0 \cdot i = 0$$

$$1 \cdot i = i$$

$$i + i = 2i$$

$$i + i + i + \ldots + i \,(n \text{ членов}) = ni \qquad (1)$$

$$a\sqrt{-1} = ai$$

$$\pm\sqrt{-a^2} = \pm\sqrt{a^2 \cdot (-1)} = \pm\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{-1} =$$

$$= \pm a\sqrt{-1} = \pm ai \qquad (2)$$

$$ai + bi = (a + b)\, i. \qquad (3)$$

665. Формула (1) n⁰ 664 показывает, чему равно произведение действительного числа на мнимое

$$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = i \cdot i = i^2 = -1,$$

отсюда

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\, i \cdot i = \sqrt{ab} \cdot (-1) = -\sqrt{ab}\,.$$

Правило. *Произведение двух мнимых колич ств с одинаковыми знаками перед радикалами есть действительное* *отрицательное количество. Произведение мнимых величин с разными знаками есть количество положительное.*

При действиях над мнимыми количествами выражения вида $\sqrt{-a}$ всегда следует писать в виде $\sqrt{a}\cdot i$. Причины этого ясны из следующего примера:

$$\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}=\frac{\sqrt{a}i}{\sqrt{b}i}=\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

666. Значение комплексных количеств. Всякое действительное число или выражение, содержащее только действительные числа, можно рассматривать как определяющее некоторую точку на линии.

Пусть имеем выражение $5+3$ и точку O на прямой OB, соответствующую нулю.

Отрезок OA содержит 5 единиц, отрезок AB — 3 единицы (рис. 336):

$$OA+AB=OB=5+3.$$

Таким образом OB есть графическое изображение величин $5+3$.

Аналогичными рассуждениями можно убедиться в том, что выражение вида $a+bi$, называемое *комплексным* количеством, может также рассматриваться как определяющее точку на плоскости.

Действительная часть комплексного выражения измеряется отрезком на горизонтальной прямой, а мнимую следует отложить на вертикальной оси (см. n⁰ 663). Так например, точка P (рис. 337), соответствующая выражению $a+bi$, имеет абсциссу a и ординату b.

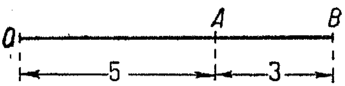


Рис. 336.

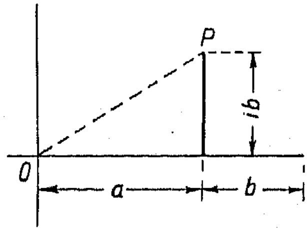


Рис. 337.

Соответственно этому указанные оси носят название *оси действительных чисел* и *оси мнимых чисел.*

Расстояние OP называется *модулем* числа $a+bi$, и как это легко доказать, равно $\sqrt{a^2+b^2}$.

667. Комплексные количества часто получаются в качестве корней уравнений степени выше первой и введение их в математику сделало возможным решение таких уравнений.

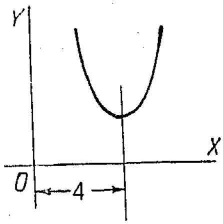


Рис. 338.

Положим, имеется квадратное уравнение

$$x^2 - 8x + 18 = 0,$$

имеющее корни

$$x = 4 + 1{,}41\sqrt{-1}$$

$$x = 4 - 1{,}41\sqrt{-1}.$$

Если построить график данного уравнения, то увидим, что кривая не пересечет оси X и уравнение не имеет действительных корней (рис. 338).

При решении квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом следует разлагать их корни на действительные числа и мнимые, соединенные между собой знаком плюс или минус.

668. Векторное изображение. Если изобразить величину a горизонтальным отрезком (отложенным направо от нуля, если a — положительно, и налево, если a — отрицательно), а мнимое число bi — вертикальным отрезком (вверх, если b — положительно и вниз, если оно отрицательно), то это дает возможность представлять комплексные количества в виде отрезков, имеющих направления на плоскости.

669. Комплексное количество $x+yi$. Если x — действительное число, а yi — мнимое, то вектор OP выражает сумму этих двух составляющих.

Обратно, всякое выражение вида $x+yi$ определяет некоторый вектор на плоскости.

Если начало такого вектора лежит в точке O, т. е. в начале координат, то конец его есть точка (x, y).

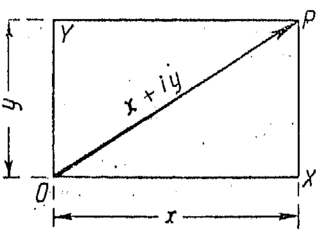


Рис. 339.

Поэтому мы можем выразить положение точки на плоскости посредством комплексного количества, иначе говоря, выражение $x+yi$ определяет точку, координаты которой суть x и y (рис. 339).

Такое представление выражения $x+yi$ совпадает с уже описанным в n° 666.

Пример сложения. Представить в виде векторов выражения $2+2i$ и $1+6i$, а также найти их сумму.

Вектор OA изображает комплексное количество $2+2i$ (рис. 340).
Вектор OB изображает комплексное количество $1+6i$.
Сумма этих векторов есть вектор OC.

Пример вычитания (рис. 341). Найти вектор, изображающий выражение $(1+i)-(2-3i)$.

Так как вычитаемое плюс разность равно уменьшаемому, то здесь можно поступать по предыдущему, считая вектор $(2-3i)$ и искомый — сторонами параллелограмма, а вектор $(1+i)$ — диагональю.

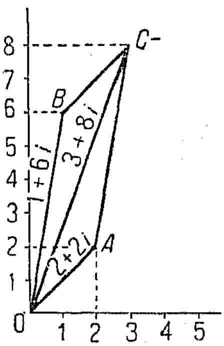


Рис. 340.

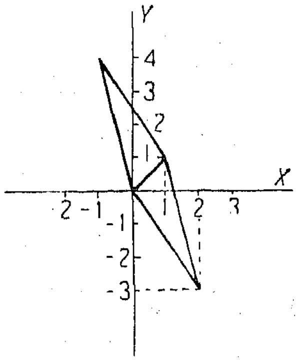


Рис. 341.

Так как комплексное число определяло, в приведенных примерах, конец вектора, т.е. определенную точку, то два комплексных выражения равны между собой только в том случае, если они соответствуют одной и той же точке, а это возможно лишь в том случае, если их действительные и мнимые части соответственно равны, т. е. обе абсциссы и обе ординаты равны между собой.

Кроме того, если $x+yi=0$, то $x=0$ и $y=0$.

670. Сопряженные комплексные количества. Два комплексные количества называются *сопряженными*, если они различаются только знаками, стоящими перед членами, содержащими i.

Сумма и произведение сопряженных количеств есть действительное количество.

В самом деле,

$$(x+yi)+(x-yi)=x+yi+x-yi=2x$$

$$(x+yi)(x-yi)=x^2-y^2i^2=x^2+y^2.$$

Произведение двух сопряженных количеств всегда положительно и представляет собой сумму двух квадратов.

Сумма, произведение или частное двух комплексных выражений всегда представляет собой также комплексное выражение, имеющее вид $a + bi$ [1]).

Пример.

$$(x + yi) + (u + vi) = x + u + (y + v)i$$
$$(x + yi)(u + vi) = (xu - yv) + (xv + yu)i.$$

671. Если комплексное количество равно нулю, то его действительная и мнимая части порознь равны нулю.

Если же два комплексных количества равны между собой, то мнимые и действительные части их соответственно равны.

Пример. Если $x + yi = u + vi$, то $x = u$, $y = v$.

Действия над комплексными выражениями производятся по тем же алгебраическим правилам, что и над действительными.

672. Умножение комплексных количеств. Умножение производится по тем же правилам алгебры, что и умножение действительных чисел.

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + iy_1x_2 + iy_2x_1 + i^2y_1y_2 =$$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i.$$

673. Деление комплексных количеств. Выражение $\dfrac{x_1 + y_1i}{x_2 + y_2i}$ может быть упрощено путем умножения числителя и знаменателя на $x_2 - y_2i$, сопряженное со знаменателем.

---

1) Интересно отметить, что при замене комплексных количеств, над которыми производятся определенные действия, сопряженными результат заменяется сопряженным числом

Это видно из равенств

$$1. \begin{cases} (a + bi) \pm (c + di) = a \pm c + (b \pm d)\, i \\ (a - bi) \pm (c - di) = a \pm c - (b \pm d)\, i \end{cases}$$

$$2, \begin{cases} (a + bi)(c + di) = ab - bd + (ad + bc)\, i \\ (a - bi)(c - di) = ac - bd - (ad + bc)\, i \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \dfrac{a + bi}{c + di} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}\, i \end{cases}$$
$$\dfrac{a - bi}{c - di} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} - \dfrac{bc - ad}{c^2 - d^2}\, i$$

В первых равенствах сопоставлены результаты действия сложения или вычитания, произведенные над комплексными количествами и затем над величинами, с ними сопряженными.

В равенствах вторых и третьих сопоставлены результаты умножения и деления. *Прим. ред.*

Этим последний обращается в действительное количество.

$$\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{x_1x_2+iy_1x_2-ix_1y_2-i^2y_1y_2}{(x_2)^2+(y_2)^2}=$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{(x_2)^2+(y_2)^2}-i\,\frac{x_1y_2-x_2y_1}{(x_2)^2+(y_2)^2}.$$

674. Комплексные выражения в полярных координатах. Точка $P\ (x,\ y)$ в прямоугольных координатах с началом в O выражает комплексное количество $x+iy$.

Если обозначить полярные координаты точки P через $(\rho,\ \theta)$, где $\rho \geqq 0$, и принять за начало координат точку O, а OX — за полярную ось, то

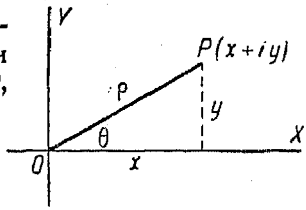


Рис. 342.

$$x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$$

или

[318] $$x+yi=\rho\ (\cos\theta+i\sin\theta),$$

где $\rho \geqq 0$.

Выражение, стоящее в последнем уравнении с правой стороны от знака равенства, называется тригонометрической или полярной формой комплексного количества. Угол θ называется аргументом или амплитудой, а ρ — модулем или абсолютной величиной комплексного выражения.

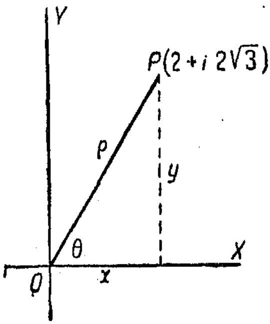


Рис. 343.

Пример. Найти аргумент, абсолютную величину и выразить в полярной форме выражение $2+i\cdot 2\sqrt{3}$.

Сравнивая данные с общей формой комплексного выражения $x+iy$, видим, что здесь

$$x=2,\qquad y=2\sqrt{3},$$

поэтому

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{4+12}=4.$$

Далее

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3},\ \text{ т. е. }\ \theta=60^\circ.$$

Таким образом заданное выражение примет в полярной форме следующий вид (рис. 343):

$$4\ (\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ).$$

675. Выражение $\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ в полярных координатах представляет собой комплексное количество в зависимости от его модуля и амплитуды.

Множитель $(\cos\theta+i\sin\theta)$, зависящий только от θ, указывает на величину поворота по отношению к оси X отрезка, длина которого равна единице, и называется *версором* или *степенью вращения* θ. (Версор часто сокращенно обозначают символом $\operatorname{cis}\theta$.)

Множитель ρ называется *тензором*.

Тензор указывает на то, что отрезок, длина которого равна единице, должен быть увеличен в ρ раз.

В результате поворота единичного вектора и умножения его на ρ точка P приводится в положение, определяемое радиусом-вектором ρ и углом θ, который образует ρ с полярной осью.

Из сказанного видно, что выражение

$$(\cos\theta+i\sin\theta)$$

есть просто более общая форма числа i. Действительно, i соответствует повороту отрезка длиной в единицу на прямой угол, а $(\cos\theta+i\sin\theta)$ — на угол θ. Если угол θ равен 90°, то версор обращается в i.

Так как

$$3-4i=5\left(\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i\right),$$

то точка, определяемая выражением $3-4i$, может быть найдена вращением единичного отрезка на угол

$$\theta=\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)=\arccos\left(\frac{3}{5}\right)$$

и увеличением единичного вектора в 5 раз.

676. Умножение комплексных количеств, заданных в полярной форме. Если два комплексных выражения заданы в полярной форме

$$x_1+iy_1=\rho_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$$
$$x_2+iy_2=\rho_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2),$$

то, перемножая члены, стоящие в правых частях, получим:

$$\rho_1\rho_2[\cos\theta_1\cos\theta_2+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)-\sin\theta_1\sin\theta_2]=$$
$$=\rho_1\rho_2[(\cos\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$ (см. формулы [**306**] и [**308**]).

Поэтому абсолютная величина произведения двух комплексных количеств равна произведению абсолютных величин сомножителей, а угол поворота равен сумме их углов поворота.

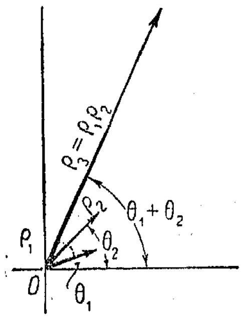


Рис. 344.

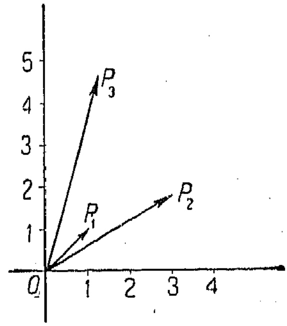


Рис. 345.

Пример. Найти произведение $(1+i)(3+i\sqrt{3})$. Приводя к полярной форме (см. n^0 674), имеем:

$$\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)\cdot 2\sqrt{3}(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ).$$

Отсюда

$$\theta_1=45^\circ,\quad \theta_2=30^\circ,\quad \rho_1=\sqrt{2},\quad \rho_2=2\sqrt{3}.$$

Следовательно искомое произведение равно

$$2\sqrt{6}(\cos 75^\circ + i\sin 75^\circ).$$

Умножение показано графически на фиг. 345 в прямоугольных координатах, причем

P_1 выражает $1+i$

P_2 выражает $3+i\sqrt{3}$

P_3 выражает $(1+i)(3+i\sqrt{3})=(3-\sqrt{3})+i(3+\sqrt{3})=$

$$=(3-1{,}73)+i\,(3+1{,}73)=1{,}27+4{,}73\,i.$$

Итак, в прямоугольных координатах

$$x+yi=1{,}27+4{,}73\,i.$$

В полярных же координатах

$$\rho(\cos\theta + i\sin\theta) = 2\sqrt{6}(\cos 75^\circ + i\sin 75^\circ) = 4{,}898\cdot 0{,}2588 + {}$$
$$+ i\cdot 4{,}898\cdot 0{,}9659 = 1{,}27 + 4{,}73\,i.$$

Совпадение результатов показывает правильность применения обоих способов.

677. Деление комплексных количеств, выраженных в полярной форме. Если нужно разделить одно комплексное количество на другое, то, выразив их в полярной форме, находим:

$$\frac{\rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{\rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} = \frac{\rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{\rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)} =$$
$$= \frac{\rho_1[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]}{\rho_2(\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + {}$$
$$+ i\sin(\theta_1-\theta_2)].$$

Поэтому абсолютная величина частного двух комплексных выражений равна частному их абсолютных величин, а угол поворота частного равен разности углов поворота делимого и делителя.

Пример. Найти аналитически и графически частное

$$\frac{3+i\sqrt{3}}{1+i}.$$

Имеем:

$$\frac{3+i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{3+i\sqrt{3}}{1+i}\,\frac{1-i}{1-i} = \frac{(3+\sqrt{3}) - i(3-\sqrt{3})}{2} =$$
$$= \frac{3+\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{3-\sqrt{3}}{2} = \frac{3+1{,}732}{2} - \frac{3-1{,}732}{2}\,i =$$
$$= 2{,}366 - 0{,}634\,i.$$

Переписывая полученное выражение в полярной форме, получим:

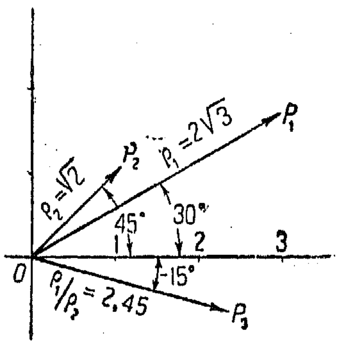


Рис. 346.

$$\rho_1 = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3};$$

$$\rho_2 = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ т. е. } \theta_1 =$$
$$= 30^\circ;\quad \operatorname{tg}\theta_2 = \frac{1}{1} = 1, \text{ т. е. } \theta_2 = 45^\circ;$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 2{,}45;$$

$$\theta_1 - \theta_2 = 30^\circ - 45^\circ = 15^\circ,$$

следовательно

$$\frac{3+i\sqrt{3}}{1+i} = 2{,}45\,[\cos(-15^\circ) + i\sin(-15^\circ)] = 2{,}45\cdot 0{,}9659 - $$
$$- 2{,}45\cdot 0{,}2588\,i = 2{,}366 - 0{,}634i,$$

что подтверждает правильность полученного выше результата.

Графическое решение показано на рис. 346, где

P_1 соответствует выражению $3+i\sqrt{3}$,

P_2 соответствует $1+i$,

P_3 соответствует частному $\dfrac{3+i\sqrt{3}}{1+i}$.

678. Теорема Моавра. По теореме Моавра

$$[319] \qquad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta,$$

где n может быть любым положительным, отрицательным, целым или дробным числом.

Согласно теореме, доказанной в n⁰ 676 относительно произведения двух комплексных количеств, можем утверждать, что

1) абсолютная величина произведения какого угодно числа комплексных количеств равна произведению абсолютных величин этих количеств;

2) угол поворота произведения какого угодно числа комплексных количеств равен сумме углов поворота сомножителей.

Отсюда

$$[\rho(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

Полагая $\rho = 1$, найдем

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta,$$

что и выражает теорему Моавра.

Точно также

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-1} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-p} = \cos(-p\theta) + i\sin(-p\theta)$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{1}{q}} = \cos\left(\frac{\theta}{q}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{q}\right)$$

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^{\frac{p}{q}}=\cos\left(\frac{p\theta}{q}\right)+i\sin\left(\frac{p\theta}{q}\right)^{1)}.$$

Наиболее общая формулировка задачи извлечения корня n-ой степени из выражения $z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$, будет:

[320] $$z^{\frac{1}{n}}=\rho^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta+k\,360^\circ}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+k\cdot 360^\circ}{n}\right)\right]$$

n значений для k, а именно $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots(n-1)$, дает n значений для z^n.

Других значений у корня быть не может.

---

1) Относительно дробных значений n следует иметь в виду, что выражение $(\cos\theta+i\sin\theta)^n$ имеет несколько значений, одно из которых стоит в правой части равен ства (319).

Формула Моавра для отрицательных и дробных значений выводится следующим образом: $(\cos\theta+i\sin\theta)^{-1}=\dfrac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}=\cos\theta-i\sin\theta=$

$$=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$$

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^{-p}=\{(\cos\theta+i\sin\theta)^{-1}\}^p=[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]^p=$$
$$=\cos(-p\theta)+i\sin(-p\theta),$$

Из равенства

$$\left(\cos\frac{\theta}{q}+i\sin\frac{\theta}{q}\right)^q=\cos\theta+i\sin\theta \qquad (*)$$

следует, что

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^{\frac{1}{q}}=\cos\frac{\theta}{q}+i\sin\frac{\theta}{q}.$$

Однако, нужно иметь в виду, что на ряду с равенством (*) имеет место равенство

$$\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{q}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{q}\right)^q=\cos\theta+i\sin\theta, \qquad (**)$$

где k—любое целое число.

Из равенства (**) видно, что

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^{\frac{1}{q}}=\cos\frac{\theta+2k\pi}{q}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{q}.$$

Корень q-ой степени комплексного числа имеет несколько значений. Число этих различных значений равно показателю корня q.

Комплексное количество

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^{\frac{p}{q}}=\left\{(\cos\theta+i\sin\theta)^{\frac{1}{q}}\right\}^p=\left(\cos\frac{\theta}{q}+i\sin\frac{\theta}{q}\right)^p=$$
$$=\cos\frac{p\theta}{q}+i\sin\frac{p\theta}{q}.$$

Относительно последнего равенства надо иметь в виду ту же оговорку, что и относительно равенства (*). *Прим. ред.*

Пример. Найти корень 5-й степени из $(2+2i)$.
Имеем:

$$(2+2i)=2\sqrt{2}\,[\cos(15^\circ+k\cdot 360^\circ)+i\sin(45^\circ+k\cdot 360^\circ)]$$

$$(2+2i)^{\frac{1}{5}}=(2\sqrt{2})^{\frac{1}{5}}[\cos(9^\circ+k\cdot 72^\circ)+i\sin(9+k\cdot 72^\circ)].$$

Для $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$, получим 5 значений корня:

$$(2\sqrt{2})^{\frac{1}{5}}(\cos 9^\circ+i\sin 9^\circ)$$

$$(2\sqrt{2})^{\frac{1}{5}}(\cos 81^\circ+i\sin 81^\circ)$$

$$(2\sqrt{2})^{\frac{1}{5}}(\cos 153^\circ+i\sin 153^\circ)$$

$$(2\sqrt{2})^{\frac{1}{5}}(\cos 225^\circ+i\sin 225^\circ)$$

$$(2\sqrt{2})^{\frac{1}{5}}(\cos 297^\circ+i\sin 297^\circ)$$

Все эти 5 корней—неодинаковы. Величины их можно найти, пользуясь таблицами натуральных тригонометрических величин.

679. Приложения теоремы Моавра в тригонометрии. Случай 1. Пусть требуется выразить $\cos n\theta$ и $\sin n\theta$ через $\cos\theta$ и $\sin\theta$, причем n — целое положительное число.

По теореме Моавра имеем:

$$\cos n\theta+i\sin n\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos^n\theta+$$
$$+ni\cos^{n-1}\theta\sin\theta+\frac{n-1}{1\cdot 2}i^2\cdot\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta+\ \dots$$

Отбирая действительные и мнимые члены уравнения, получим искомые выражения.

Пример. Выразить $\cos(6\theta)$ и $\sin(6\theta)$ через $\cos\theta$ и $\sin\theta$.
Имеем:

$$\cos 6\theta+i\sin 6\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^6=\cos^6\theta+6i\cos^5\theta\sin\theta+$$
$$+(-15)\cos^4\theta\sin^2\theta+(-20)i\cos^3\theta\sin^3\theta+15\cos^2\theta\sin^4\theta+$$
$$+6i\cos\theta\sin^5\theta-\sin^6\theta.$$

Объединяя действительные члены, получаем

$$\cos 6\theta=\cos^6\theta-15\cos^4\theta\sin^2\theta+15\cos^2\theta\sin^4\theta-\sin^6\theta.$$

Объединяя мнимые члены, после деления на i получим:

$$\sin 6\theta=6\cos^5\theta\sin\theta-20\cos^3\theta\sin^3\theta+6\cos\theta\sin^5\theta.$$

Случай 2. Пусть требуется выразить $\cos^n\theta$ и $\sin^n\theta$ через синусы и косинусы кратных θ углов.

Полагая $u=\cos\theta+i\sin\theta$, получим:

$$u^k=\cos k\theta+i\sin k\theta$$

$$u^{-k}=\cos(-k\theta)+i\sin(-k\theta)=\cos k\theta-i\sin k\theta.$$

Складывая и вычитая полученные выражения, находим:

$$u^k+u^{-k}=2\cos k\theta$$

$$u^k-u^{-k}=2i\sin k\theta,$$

где k — любое целое число.

Если $k=1$, то

$$2\cos\theta=u+u^{-1}$$

$$2i\sin\theta=u-u^{-1},$$

следовательно

$$2^n\cos^n\theta=(u+u^{-1})^n=u^n+nu^{n-2}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{n-4}+\ldots$$

$$\ldots+nu^{-(n-2)}+u^{-n}.$$

Коэффициенты членов разложения попарно равны, а потому могут быть сгруппированы таким образом:

$$2^n\cos^n\theta=(u^n+u^{-n})+n(u^{n-2}+u^{-(n-2)})+\ldots$$

Члены, заключенные в скобках, соответственно равны следующим выражениям:

$$2\cos n\theta,\qquad 2\cos(n-2)\theta\ \ldots\ \text{и т. д.}$$

Пример. Выразить $\cos^4\theta$ через косинусы углов, кратных θ.

Имеем:

$$2^4\cdot\cos^4\theta=(u+u^{-1})^4=u^4+4u^2+6+4u^{-2}+u^{-4}=u^4+u^{-4}+$$
$$+4(u^2+u^{-2})+6=2\cos 4\theta+4\cdot 2\cdot\cos 2\theta+6.$$

Деля обе части уравнения на 2^4, найдем:

$$\cos^4\theta=\frac{1}{8}(\cos 4\theta+4\cos 2\theta+3).$$

Пример. Выразить $\sin^5\theta$ через синусы углов кратных θ.

Имеем:

$$2^5 i^5\sin^5\theta=(u-u^{-1})^5$$

или

$$32i\sin^5\theta=u^5-5u^3+10u-10u^{-1}+5u^{-3}-u^{-5}=$$
$$=(u^5-u^{-5})-5(u^3-u^{-3})+10(u-u^{-1})=$$
$$=2i\sin 5\theta-5\cdot 2i\sin 3\theta+10\,2i\sin\theta,$$

откуда

$$\sin^5\theta=\frac{1}{16}(\sin 5\theta-5\sin 3\theta+10\sin\theta).$$

680. Разложение в ряд $\sin n\theta$ и $\cos n\theta$ посредством теоремы Моавра и формулы бинома.

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n =$$

$$= \cos^n\theta + ni\cos^{n-1}\theta\sin\theta - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos^{n-2}\theta\cdot\sin^2\theta -$$

$$- \frac{in(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{n-3}\theta\cdot\sin^3\theta +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta +$$

$$+ \frac{in(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cos^{n-5}\theta\cdot\sin^5\theta + \ldots$$

Отбирая и складывая действительные члены уравнения, получим:

$$\cos n\theta = \cos^n\theta - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta - \ldots$$

Положим $\alpha = n\theta$, тогда $\theta = \frac{\alpha}{n}$ и $n = \frac{\alpha}{\theta}$, причем α должно оставаться постоянным, тогда как n и θ изменяются. Подставляя полученные для α, θ и n значения в выражение для $\cos n\theta$, получим:

$$\cos\alpha = \cos^n\theta - \frac{\frac{\alpha}{\theta}\left(\frac{\alpha}{\theta} - 1\right)}{1\cdot 2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta +$$

$$+ \frac{\frac{\alpha}{\theta}\left(\frac{\alpha}{\theta}-1\right)\left(\frac{\alpha}{\theta}-2\right)\left(\frac{\alpha}{\theta}-3\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cos^{n-4}\theta\cdot\sin^4\theta - \ldots =$$

$$= \cos^n\theta - \frac{\alpha(\alpha-\theta)}{2}\cos^{n-2}\theta\cdot\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2 +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-\theta)(\alpha-2\theta)(\alpha-3\theta)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cos^{n-4}\theta\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^4 - \ldots$$

Если n обращается в бесконечность, $\frac{\alpha}{n}$ приближается к ну лю, $\cos\theta \to 1$, $\frac{\sin\theta}{\theta} \to 1$, $\alpha - \theta \to \alpha$.

Поэтому

[321] $$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \ldots$$

где α выражен в радианах.

Отбирая коэффициенты с мнимыми частями, имеем:

$$\sin n\theta = n\cos^{n-1}\theta\sin\theta - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta +$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta - \ldots$$

Производя те же подстановки α, n и θ, что и в предыдущем случае, будем иметь

$$\sin\alpha = \alpha\cos^{n-1}\theta\cdot\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right) -$$
$$- \frac{\alpha(\alpha-\theta)(\alpha-2\theta)}{3!}\cos^{n-3}\theta\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3 +$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-\theta)(\alpha-2\theta)(\alpha-3\theta)(\alpha-4\theta)}{5!}\cos^{n-5}\theta\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^5 + \ldots$$

Находя предел при n, равном бесконечности, получим

[322] $$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \ldots,$$

где α выражен в радианах.

Приведенные формулы для разложения в ряд синуса и косинуса применяются при составлении таблиц этих функций (см. n⁰ 980).

681. Показательные выражения $\sin\theta$, $\cos\theta$ и $\operatorname{tg}\theta$. Из алгебры (n⁰ 462) известно, что

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \qquad (1)$$

Если вместо x подставить $i\theta$, где $i = \sqrt{-1}$, то получим

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \ldots =$$
$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!}\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \ldots\right).$$

Однако, из предыдущего n⁰ нам известно, что выражения, заключенные в скобках, равны, соответственно, $\cos\theta$ и $\sin\theta$, иначе говоря,

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta. \qquad (2)$$

Подставляя вместо x величину $(-i\theta)$, получим:

$$e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta. \qquad (3)$$

Вычитая (3) из (2),

$$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}. \qquad (4)$$

Прибавляя (2) к (3):

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}. \qquad (5)$$

Наконец, деля (4) на (5), найдем:

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{i(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}.$$

682. Показательные формы комплексных количеств. Из предыдущего n⁰ имеем:

$$\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta},$$

поэтому,

$$x+iy=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)=\rho e^{i\theta},$$

где θ выражен в радианах.

Аналогично, если

$$x_1+iy_1=\rho_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)=\rho_1 e^{i\theta_1}$$
$$x_2+iy_2=\rho_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=\rho_2 e^{i\theta_2},$$

тогда

$$(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=\rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

Глава XXVIII.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ.

683. Гиперболические функции. Некоторые формы суммы и разности двух показательных функций вида e^u+e^{-u} и e^u-e^{-u} встречаются в математике так часто, что им дали особое название — *гиперболические функции.*

Выражение $\frac{e^u - e^{-u}}{2}$ называется гиперболическим синусом и обозначается символом $\operatorname{sh} u$.

[323] $$\operatorname{sh} u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}.$$

Выражение $\frac{e^u + e^{-u}}{2}$ называется гиперболическим косинусом и обозначается символом $\operatorname{ch} u$.

[324] $$\operatorname{ch} u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}.$$

Подобным же образом

[325] $$\operatorname{tgh} u = \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u} = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$$

[326] $$\operatorname{ctgh} u = \frac{\operatorname{ch} u}{\operatorname{sh} u} = \frac{e^u + e^{-u}}{e^u - e^{-u}}$$

[327] $$\operatorname{sech} u = \frac{1}{\operatorname{ch} u} = \frac{2}{e^u + e^{-u}}$$

[328] $$\operatorname{cosech} u = \frac{1}{\operatorname{sh} u} = \frac{2}{e^u - e^{-u}}$$

684. Приведенные выражения дают возможность установить соотношения между гиперболическими функциями, причем получаются следующие формулы, аналогичные таковым для круговых функций:

[329] $$\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1,$$

так как

$$\left(\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2u} + 2 + e^{-2u}}{4} - \frac{e^{2u} - 2 + e^{-2u}}{4} = 1.$$

Точно также можно найти, что:

[330] $$\operatorname{sech}^2 u + \operatorname{tgh}^2 u = 1$$

[331] $$\operatorname{ctgh}^2 u - \operatorname{cosech}^2 u = 1.$$

[332] $$\operatorname{sh} u = \sqrt{\operatorname{ch}^2 u - 1} = \frac{\operatorname{tgh} u}{\sqrt{1 - \operatorname{tgh}^2 u}} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ctgh}^2 u - 1}} = \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sech}^2 u}}{\operatorname{sech} u} = \frac{1}{\operatorname{cosech} u}.$$

[333] $$\operatorname{ch} u = \sqrt{\operatorname{sh}^2 u + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{tgh}^2 u}} = \frac{\operatorname{ctgh} u}{\sqrt{\operatorname{ctgh}^2 u - 1}} = \frac{\sqrt{\operatorname{cosech}^2 u + 1}}{\operatorname{cosech} u} = \frac{1}{\operatorname{sech} u}.$$

[334] $$\operatorname{tgh} u = \frac{\operatorname{sh} u}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 u + 1}} = \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 u - 1}}{\operatorname{ch} u} = \sqrt{1 - \operatorname{sech}^2 u} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosech}^2 u + 1}} = \frac{1}{\operatorname{ctgh} u}.$$

[335] $$\operatorname{sh}(u \pm v) = \frac{e^{u \pm v} - e^{-(u \pm v)}}{2} = \operatorname{sh} u \operatorname{ch} v \pm \operatorname{ch} u \operatorname{sh} v.$$

[336] $$\operatorname{ch}(u \pm v) = \frac{e^{u \pm v} + e^{-(u \pm v)}}{2} = \operatorname{ch} u \cdot \operatorname{ch} v \pm \operatorname{sh} u \operatorname{sh} v.$$

[337] $$\operatorname{tgh}(u \pm v) = \frac{e^{u \pm v} - e^{-(u \pm v)}}{e^{u \pm v} + e^{-(u \pm v)}} = \frac{\operatorname{tgh} u \pm \operatorname{tgh} v}{1 \pm \operatorname{tgh} u \operatorname{tgh} v}.$$

[338] $$\operatorname{sh} 2u = 2 \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u.$$

[339] $$\operatorname{ch} 2u = \operatorname{ch}^2 u + \operatorname{sh}^2 u.$$

[340] $$\operatorname{tgh} 2u = \frac{2 \operatorname{tgh} u}{1 + \operatorname{tgh}^2 u}.$$

685. Если $x = a \operatorname{ch} u$ и $y = a \operatorname{sh} u$, то разность их квадратов равна

$$x^2 - y^2 = a^2 (\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u),$$

но из [329] имеем:

$$\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1,$$

поэтому

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Из этого следует, что гиперболические функции, написанные в форме параметрических уравнений

$$x = a \operatorname{ch} u \quad \text{и} \quad y = a \operatorname{sh} u,$$

выражают равнобочную гиперболу точно таким же образом, как параметрические уравнения (см. n⁰ 805)

$$x = \cos\theta \quad \text{и} \quad y = \sin\theta$$

выражают окружность. Указанным свойством гиперболических функций объясняется их название.

686. Если $\operatorname{ch} u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$ [324] прибавить к $\operatorname{sh} u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$ [323], т. е.

$$\operatorname{ch} u + \operatorname{sh} u = \frac{e^u + e^{-u}}{2} + \frac{e^u - e^{-u}}{2},$$

то получим:

[341] $$e^u = \operatorname{ch} u + \operatorname{sh} u.$$

Вычитая $\operatorname{sh} u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$ [323] из $\operatorname{ch} u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$ [324], найдем:

[342] $$e^{-u} = \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u.$$

687. Соотношение между гиперболическими и тригонометрическими функциями. Если в выражение (4) n⁰ 681 подставить вместо θ величину $i\theta$, то будем иметь:

$$i \sin i\theta = \frac{1}{2}[e^{i(i\theta)} - e^{-i(i\theta)}] = \frac{1}{2}(e^{-\theta} - e^{+\theta}) = -\operatorname{sh}\theta.$$

[343] $$\sin i\theta = i \operatorname{sh}\theta.$$

Точно также подставляя в выражение (5) n⁰ 681 вместо θ величину $i\theta$, получим:

$$\cos i\theta = \frac{1}{2}[e^{i(i\theta)} + e^{-i(i\theta)}] = \frac{1}{2}(e^{\theta} - e^{-\theta}) = \operatorname{ch}\theta$$

[344] $\cos i\theta = \operatorname{ch}\theta.$

Деля [343] на [344], найдем:

[345] $\operatorname{tg} i\theta = i \operatorname{tgh}\theta.$

688. Разложение $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ в ряд. Из формул

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \ [323]$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots,$$

имеем:

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}\left[\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)\right] = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

[346] $$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

Подобным же образом найдем:

[347] $$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

Приведенные ряды $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ являются сходящимися для всех действительных значений x и могут применяться для вычисления его гиперболических функций.

689. Графики гиперболических функций (рис. 347 и 348).

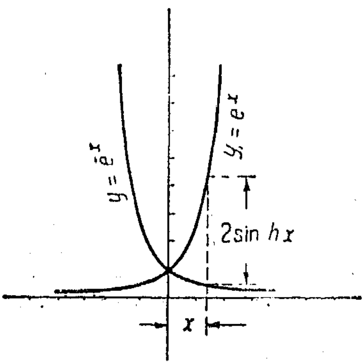


Рис. 347.

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

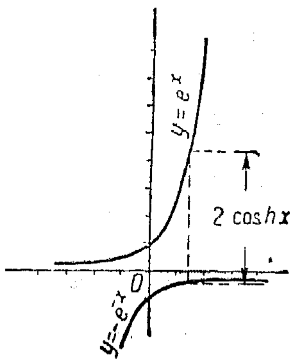


Рис. 348.

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Глава XXIX.

РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.

690. Решение тригонометрических уравнений может быть разделено на три части:

1. Выражаем все тригонометрические соотношения, встречающиеся в данном уравнении, через какую-нибудь функцию целого угла.

2. Решаем полученное ур-ние (1) как алгебраическое.

3. Определяем все углы, соответствующие полученным из (2) значениям функции.

Пример. Дано $\operatorname{tg} 2\theta = \frac{24}{7}$, найти θ.

Имеем:

$$\frac{2 \operatorname{tg} \theta}{1 - \operatorname{tg}^2 \theta} = \frac{24}{7}$$

или

$$12 \operatorname{tg}^2 \theta + 7 \operatorname{tg} \theta - 12 = 0.$$

Решая полученное квадратное уравнение, найдем:

$$\operatorname{tg} \theta = -\frac{4}{3} \text{ или } \frac{3}{4} = -1{,}33 \text{ или } 0{,}75,$$

откуда

$$\theta = 126{,}9^\circ \text{ или } \theta = 36{,}9^\circ \text{ [1]}.$$

Пример. Дано: $\cos \theta + \sin \theta = 1.25$. Найти θ.

Выразим $\cos \theta$ через $\sin \theta$, пользуясь формулой [273]:

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta}.$$

Подставляя, имеем:

$$\sin \theta + \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = 1{,}25 \text{ или } \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = 1{,}25 - \sin \theta.$$

Возвышая обе части уравнения в квадрат

$$1 - \sin^2 \theta = 1{,}562 - 2{,}5 \sin \theta + \sin^2 \theta$$

$$2 \sin^2 \theta - 2{,}5 \sin \theta + 0{,}562 = 0$$

$$\sin^2 \theta - 1{,}25 \sin \theta + 0{,}281 = 0.$$

---

[1]) Следует помнить, что по данному тангенсу находится бесчисленное множество дуг. Все такие дуги различаются друг от друга на 180°. Общее решение поставленной задачи имеет вид

$$\theta = 126{,}9^\circ + 180^\circ k$$

$$\theta = 36{,}9^\circ + 180^\circ k,$$

где k—любое целое положительное или отрицательное число.

Прим. ред.

Решая последнее квадратное уравнение, найдем:

$$\sin\theta = 0{,}95 \text{ или } \sin\theta = 0{,}294.$$

$$\theta = 72°53' \text{ или } 17°7'\ [1]).$$

Пример. Дано уравнение

$$\operatorname{tg}\theta \cdot \operatorname{tg} 2\theta + \operatorname{ctg}\theta + 2 = 0. \text{ Найти } \theta.$$

Имеем:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\operatorname{tg}\theta}{1 - \operatorname{tg}^2\theta}\ [292] \text{ и } \operatorname{ctg}\theta = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta}\ [275].$$

Подставляя в данное уравнение, найдем:

$$\operatorname{tg}^2 - 2\operatorname{tg}\theta - 1 = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\theta = 1 \pm \sqrt{2} = 2{,}4142 \text{ или } -0{,}4142,$$

следовательно

$$\theta = 67°30' \text{ или } -22°30'.$$

Пример. Дано уравнение

$$\operatorname{arc\,tg}(x+1) + \operatorname{arc\,tg}(x-1) = \operatorname{arc\,tg} 2$$

Для нахождения x поступаем так:

Положим $\theta = \operatorname{arc\,tg}(x+1)$, тогда $\operatorname{tg}\theta = x+1$
и $\beta = \operatorname{arc\,tg}(x-1)$, тогда $\operatorname{tg}\beta = x-1$.

Из формулы [**280**] имеем:

$$\operatorname{tg}(\theta+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\theta + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\beta}$$

или

$$\operatorname{tg}(\theta+\beta) = \frac{x+1+x-1}{1-(x+1)(x-1)} = \frac{2x}{2-x^2},$$

отсюда

$$\theta + \beta = \operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{2-x^2} = \operatorname{arc\,tg} 2$$

или

$$\frac{2x}{2-x^2} = 2,$$

следовательно

$$x^2 + x - 2 = 0 \text{ и } x = -2 \text{ или } 1.$$

---

[1]) Следует иметь в виду, что в тексте приведены лишь простейшие решения задачи.

Прим. ред.

691. Уравнения вида $\sin(x+B) = c\sin x$. Если угол B и постоянная c — известны, то данное уравнение можно привести к виду

$$\operatorname{tg}\left(x+\frac{B}{2}\right)=\frac{c+1}{c-1}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\ ^{1)}.$$

692. Уравнения вида $\operatorname{tg}(x+B)=c\operatorname{tg}x$, где B и c — постоянные, приводятся к виду

$$\sin(2x+B)=\frac{c+1}{c-1}\sin B\ ^{2)},$$

откуда можно найти $\sin(2x+B)$, а затем самое x.

---

1) Напишем пропорцию

$$\frac{\sin(x+B)}{\sin x}=\frac{c}{1}.$$

Возьмем производную пропорцию

$$\frac{\sin(x+B)+\sin x}{\sin(x+B)-\sin x}=\frac{c+1}{c-1}.$$

Представляя числитель и знаменатель дроби, стоящей в левой части равенства, в логарифмическом виде, получим

$$\frac{2\sin\left(x+\frac{1}{2}B\right)\cos\frac{1}{2}B}{2\cos\left(x+\frac{1}{2}B\right)\sin\frac{1}{2}B}=\frac{c+1}{c-1},$$

откуда следует, что

$$\operatorname{tg}\left(x+\frac{1}{2}B\right)=\frac{c+1}{c-1}\operatorname{tg}\frac{1}{2}B.$$

Прим. ред.

2) Из равенства

$$\frac{\operatorname{tg}(x+B)}{\operatorname{tg}x}=\frac{c}{1}$$

следует, что

$$\frac{\operatorname{tg}(x+B)+\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}(x+B)-\operatorname{tg}x}=\frac{c+1}{c-1}$$

После приведения к логарифмическому виду числителя и знаменателя дроби, в левой части равенства получим

$$\frac{\sin(2x+B)}{\sin B}=\frac{c+1}{c-1}$$

или

$$\sin(2x+B)=\frac{c+1}{c-1}\sin B$$

Прим. ред.

693. Уравнения вида $a\cos n\theta + b\sin n\theta = c$ [1]), приводятся к виду

$$\theta = \frac{1}{n}\left[-\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b} + \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right],$$

предполагая, что $|c| \leqq \sqrt{a^2+b^2}$.

---

[1]) Решая уравнения

$$a\cos n\theta + b\sin n\theta = c \qquad b > 0$$

подберем величины r и φ так, чтобы имели место равенства

$$a = r\sin\varphi, \qquad b = r\cos\varphi.$$

Величины r и φ определяются по формулам

$$r = \sqrt{a^2+b^2} \qquad \varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b},$$

где под $\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}$ понимается простейшее значение этой функции. Заменяя a и b их выражениями через r и φ, представим уравнение в виде

$$\sin\varphi\cos n\theta + \cos\varphi\sin n\theta = \frac{c}{r}$$

или

$$\sin(n\theta + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Уравнение имеет решение лишь при условии

$$|c| \leqq \sqrt{a^2+b^2}.$$

При этом условии получаем

$$n\theta + \varphi = \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\theta = \frac{1}{n}\left\{-\varphi + \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\}$$

или

$$\theta = \frac{1}{n}\left\{-\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b} + \arcsin n\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\},$$

где под $\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}$ понимается простейшее, а под $\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ любое значение этой функции.

В случае, когда $b < 0$, решение уравнения приводится к разобранному случаю, если умножить обе части равенства на -1.

Прим. ред.

694. Графическое решение тригонометрических уравнений.

Пример. Дано уравнение $2\cos x = x$. Найти значения x (в радианах), удовлетворяющие этому уравнению.

Начертим кривые $y = 2\cos x$ и $y = x$, тогда абсциссы точек их пересечения дадут корни уравнения (рис. 349).

695. Уравнение $R\sin(x + c) = a\cos x + b\sin x$ обращается в тождество при некоторых значениях c и R.

Начертим произвольный угол $x = XON$ (рис. 350), находящийся в I квадранте, и постоянный угол $c = NOP$, причем $OP = R$, а NP перпендикулярна к ON.

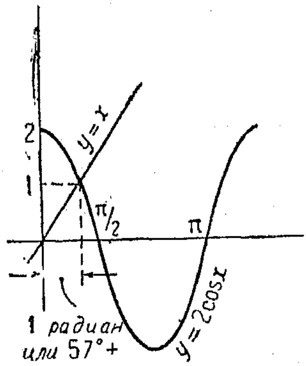


Рис 349.

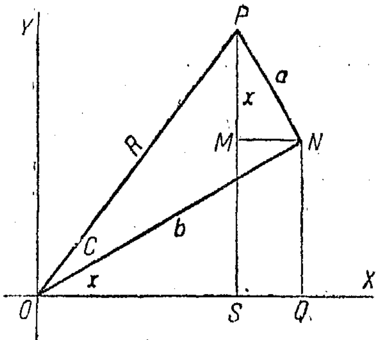


Рис. 350.

Положим $PN = a$ и $NO = b$. Проведем PS и NQ параллельно оси Y и MN параллельно оси X, тогда

$$PM = a\cos x; \qquad MS = NQ = b\sin x$$

$$PM + MS = PS = R\sin(x + c) = a\cos x + b\sin x.$$

Таким же способом можно доказать что равенство сохраняется, когда x находится в другом квадранте, и вообще при любом значении x из рисунка видно, что

$$\operatorname{tg} c = \frac{a}{b} \quad \text{или} \quad c = \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}.$$

Кроме того

$$R = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

696. Графики для уравнений вида $y = a\cos x + b\sin x$ можно получить, находя c и R по полученным выше формулам и вычерчивая график функции $y = R\sin(x + c)$, как это сделано в n⁰ 619.

Такой способ гораздо проще, чем непосредственное вычерчивание кривой $y = a\cos x + b\sin x$.

Пример. Начертить график функции

$$y = \cos x - \sqrt{3}\sin x + 1.$$

Имеем:

$$a = 1, \quad b = -\sqrt{3}, \ \operatorname{tg} c = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad c = -30^\circ = -\frac{\pi}{6}$$

$$R = \sqrt{1+3} = 2.$$

Поэтому начертим график $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$ или, пайдя график $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, перемещаем начало координат на 1.

697. *Пример 1.* Начертить график функции

$$y = \sin 2x + \sin x + \frac{1}{2}.$$

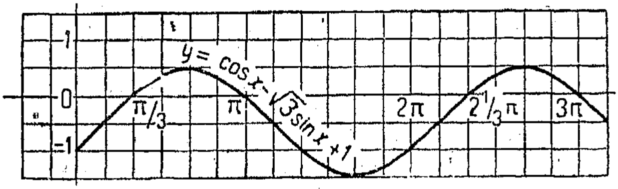


Рис. 351.

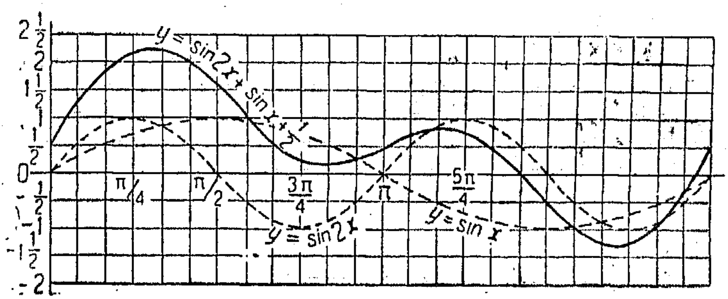


Рис. 352.

Чертим графики $y = \sin 2x$ и $y = \sin x$ на одной и той же оси (x выражено в радианах) и к сумме ординат этих кривых прибавляем $\frac{1}{2}$. Полученная кривая (рис. 352) будет выражать данное уравнение.

Пример 2. Начертить график функции

$$y = \sin 5x - \sin 3x + \sin x\ .$$

Чертим на одной и той же оси графики функций $y_1 = \sin 5x$, $y_2 = \sin 3x$, $y_3 = \sin x$ (x выражено в радианах). Для получения ординат искомой кривой складываем алгебраически ординаты построенных графиков. Построение показано на рис. 353.

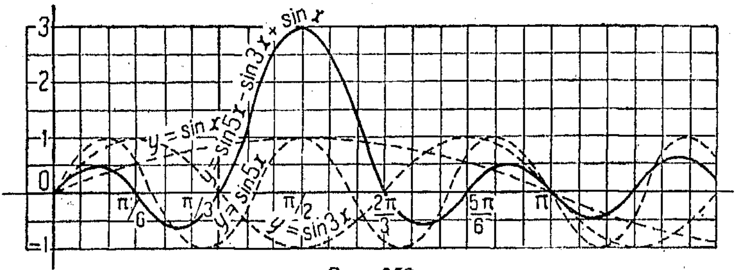


Рис. 353.

698. Системы тригонометрических уравнений. Приведем несколько примеров графического решения системы тригонометрических уравнений

Пример 1. Решить графически систему

$$\begin{cases} y = 1 - \cos x \\ y = 1 + \sin x. \end{cases}$$

Корни, удовлетворяющие этим уравнениям, найдутся как координаты точек пересечения соответствующих кривых (рис. 354).

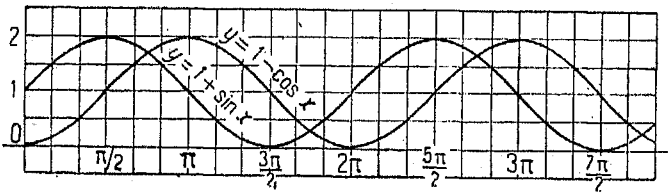


Рис. 354.

Величина x равна

$$x = n\pi + \frac{3}{4}\pi,$$

где n—любое целое число.

Пример 2. Решить графически систему

$$\begin{cases} y = 3\sin\theta + 2\cos\theta & (1) \\ y = 3\cos\theta + 2\sin\theta. & (2) \end{cases}$$

Из пп[0] 695, 696 известно, что эти уравнения можно привести к виду

$$y = R\sin(\theta + c).$$

В ур-нии (1) $a = 2$; $b = 3$; $\operatorname{tg} c = \frac{2}{3}$; $c = 33{,}7^\circ$.

$$R = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13} = 3{,}6.$$

Ур-ние (1) принимает вид

$$y = 3{,}6 \sin(\theta + 33{,}7^\circ).$$

Точно также в ур-нии (2) $a = 3$; $b = 2$; $\operatorname{tg} c = \frac{3}{2}$; $c = 56{,}3^\circ$.

$$R = \sqrt{13} = 3{,}6.$$

Таким образом имеем из (2)

$$y = 3{,}6 \sin(\theta + 56{,}3^\circ).$$

Откуда следует, что

$$\theta = n\pi + \frac{\pi}{4},$$

где n — любое число.

Тот же результат получается из графика рис. 355.

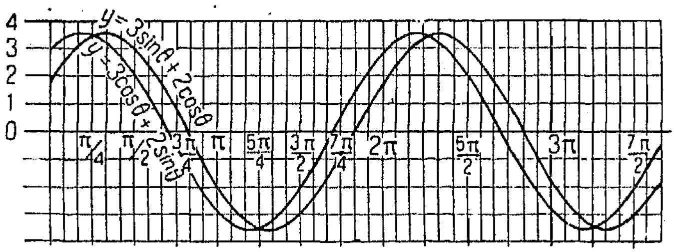


Рис. 355.

699. Во многих случаях решения тригонометрических уравнений графический способ является единственно практически целесообразным. Это видно из следующего примера.

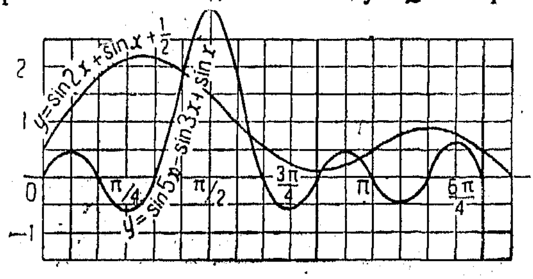


Рис. 356.

Пример. Решить графически систему

$$y = \sin 2x + \sin x + \frac{1}{2}$$

$$y = \sin 5x - \sin 3x + \sin x.$$

Построение соответствующих графиков производится, как это было указано в n⁰ 607. Пересечение кривых дает координаты, соответствующие искомым корням (рис. 356).

Глава XXX.

ПРОСТЕЙШИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ КООРДИНАТ.

700. Применение алгебраических методов к решению геометрических и тригонометрических задач называется *аналитической геометрией.*

701. Величины отрезков. Длина линии определяется числом единиц, пройденных точкой, образующей эту линию.

Отрезок прямой в одном направлении считается положительным, а в противоположном — отрицательным (рис. 357). Так например,

Рис. 357.

$$P_1P_2 = -P_2P_1,$$

откуда

$$P_1P_2 + P_2P_1 = 0.$$

Законы сложения и вычитания отрезков прямой аналогичны законам сложения и вычитания алгебраических количеств.

Для удобства, за положительное направление отрезков будем считать направление вправо по горизонтальной прямой, за отрицательное — направление влево по ней.

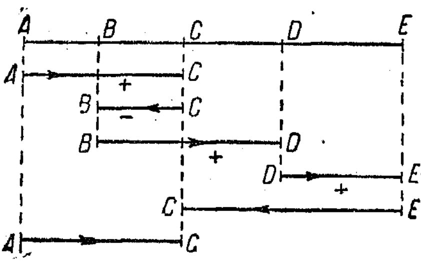


Рис. 358.

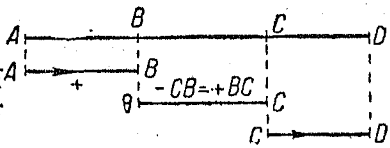


Рис. 359.

Отрезок прямой между данными начальной и конечной точками определяет сумму положительных и отрицательных отрезков. На рис. 358 слагаемые отрезки, во избежание ошибки, отложены не на самой линии AE, а на параллельных ей.

Таким образом

$$AC + CB + BD + DE + EC = AC.$$

Пример. $AB - CB + CD = AD$ (рис. 359). Величина суммы отрезков равна AD, так как AD есть длина отрезка от начальной до конечной точки.

702. Геометрия одного измерения ограничивается рассмотрением прямой. Здесь точка является основным элементом, причем положение ее на линии определяется значением одной переменной.

Всякое алгебраическое уравнение, содержащее эту переменную, соответствует одной или нескольким точкам линии.

703. Геометрия двух измерений. Здесь за основной элемент также может быть принята точка. Положение ее определяется значениями двух переменных, относящихся к двум неподвижным линиям, расположенным на плоскости и называемым осями координат.

Каждое алгебраическое уравнение между переменными соответствует кривой (геометрическому месту), которую описывает точка, двигаясь на плоскости по определенному закону.

704. Координаты. В аналитической геометрии применяются, главным образом, прямоугольные координаты, хотя

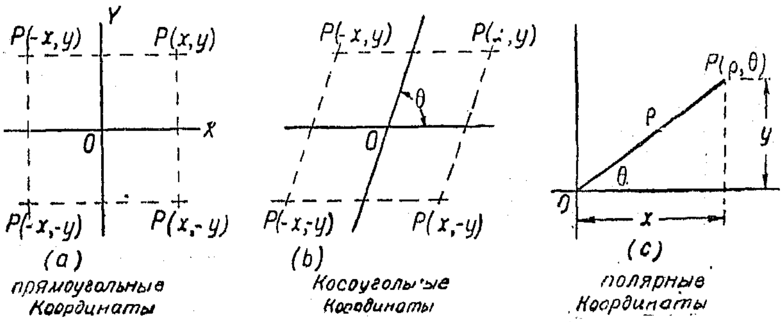


Рис. 360.

часто приходится пользоваться косоугольными или полярными.

Соотношение между прямоугольными координатами (x, y) и полярными (ρ, θ) было указано ранее (см. n° 655).

$$x = \rho \cos \theta \quad [313]$$

$$y = \rho \sin \theta \quad [314]$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad [315]$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad [316]$$

Полярная форма уравнения дает положение точки кривой с такой же определенностью, как и прямоугольная, причем координатами в ней являются расстояние от начала (полюса), называемое *радиусом-вектором* ρ, и угол θ, образуемый радиусом-вектором с полярной осью (*угол* θ *называется векториальным углом или амплитудой).*

Мы видели, что можно легко перейти от прямоугольных координат к полярным, для этого следует подставить в уравнение вместо x величину $\rho \cos \theta$, а вместо y — величину $\rho \sin \theta$.

Если требуется перейти от полярных координат к прямоугольным, то в полярное уравнение кривой следует подставить вместо $\rho \cos \theta$ и $\rho \sin \theta$ соответственно величины x и y.

Кроме того, иногда удобно пользоваться подстановкой в полярное уравнение кривой $\sqrt{x^2+y^2}$ вместо ρ и $\frac{y}{x}$ вместо $\operatorname{tg} \theta$.

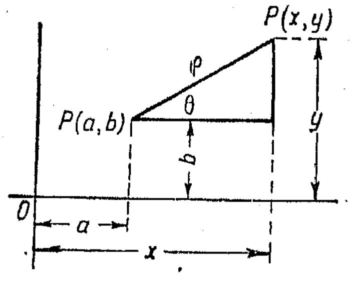


Рис. 361.

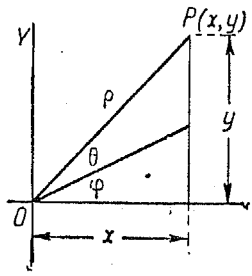


Рис. 362.

705. Если начала координат расположены в различных точках, то имеем

$$x = a + \rho \cos \theta \quad [323]$$

$$y = b + \rho \sin \theta. \quad [324]$$

706. Если полярная ось образует с осью X угол φ, причем начала координат совпадают, то

[325] $$x = \rho \cos(\theta + \varphi)$$

[326] $$y = \rho \sin(\theta + \varphi).$$

707. Если в предыдущем случае начало перенесено в точку (a, b), то

[327] $$x = a + \rho \cos(\theta + \varphi)$$

[328] $$y = b + \rho \sin(\theta + \varphi).$$

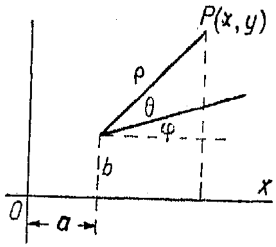


Рис. 363.

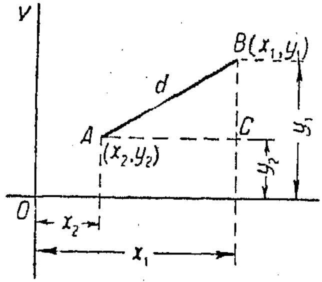


Рис. 364.

708. Расстояние между двумя точками, например $A(x_2, y_2)$ и $B(x_1, y_1)$ (рис. 364).

Из $\triangle\ ABC$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2.$$

Выражая это геометрическое соотношение через координаты, найдем

[329] $$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_x)^2},$$

где d — расстояние между точками A и B.

709. Расстояние между двумя точками в косоугольных координатах (рис. 365).

Пользуясь законом косинусов (n⁰ 642), имеем:

[330] $$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Поэтому

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos(180° - \varphi).$$

Но $\cos(180° - \varphi) = -\cos\varphi$.

Выражая тригонометрические соотношения в координатах, получим

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)\cos\varphi$$

или

[331] $$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)\cos\varphi}.$$

710. Употребляя полярные координаты для точек $A(\rho_1, \theta_1)$ и $B(\rho_2, \theta_2)$ (рис. 366), найдем из предыдущей формулы

[332] $$d = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}.$$

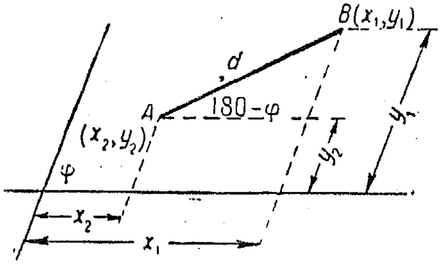


Рис. 365.

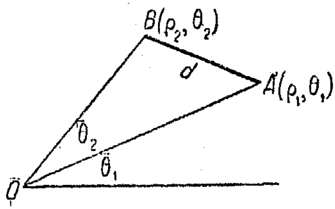


Рис. 366.

Пример. Найти расстояние между точками (4, — 5) и (— 3, 6) в прямоугольной системе координат.

Подставляя в формулу [331], имеем:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{[4 - (-3)]^2 + [-5 - (+6)]^2} =$$
$$= \sqrt{7^2 + (-11)^2} = \sqrt{170}.$$

Пример 2. Найти длину стороны треугольника l, пользуясь методом аналитической геометрии и употребляя косоугольные координаты.

Дано. Сторона $OA = 3$; сторона $OB = 5$ (рис. 367).

Угол между ними $\theta = 53^\circ\ 2'$.

Принимая две стороны за координатные оси и применяя формулу

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)\cos\theta},$$

имеем:

$$d = \sqrt{(5-0)^2 + (0-3)^2 + 2(5-0)(0-3)\,0{,}6} =$$
$$= \sqrt{25 + 9 - 18} = \sqrt{16} = 4.$$

711. Измерение углов между прямыми. За положительное направление при измерении угла между двумя прямыми принимается направление против часовой стрелки.

На рис. 368 прямая B и прямая A образуют угол, начинающийся у B и измеряемый от нее в сторону, противоположную вращению часовой стрелки.

Точно также угол между A и B измеряется от A в указанном выше направлении (рис. 369).

Последний угол является пополнительным первого до 180°.

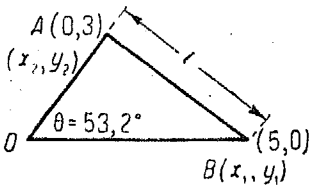


Рис. 367.

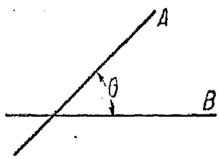


Рис. 368.

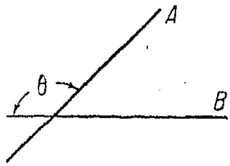


Рис. 369.

712. Наклон прямых (рис. 370 и 371). В прямоугольных координатах наклон, или градиент прямой есть отношение изменения ординаты к соответствующему изменению абсциссы при движении точки по этой прямой.

Наклон будет положительным, если с увеличением абсциссы увеличивается и ордината, и отрицательным, если при увеличении абсциссы ордината уменьшается.

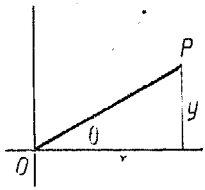


Рис. 370.

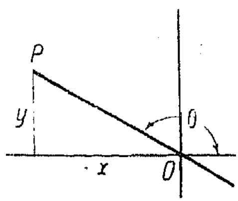


Рис. 371.

Так как наклон есть отношение изменения ординаты к соответствующему изменению абсциссы, то он измеряется $\operatorname{tg} \theta$, где θ — угол, образуемый прямой с осью абсцисс.

Обозначая наклон буквой m, имеем:

$$m = \operatorname{tg} \theta$$ [1]).

713. Наклон прямой, проходящей через точки P_1 (x_1, y_1) и P_2 (x_2, y_2), выраженный через координаты этих точек (рис. 372).

---

1) В русской литературе величина m обычно называется угловым коэффициентом. *Прим. ред.*

Если m — наклон прямой, то

[333] $$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

Заметим, что наклон выражен здесь посредством координат двух точек, через которые проходит прямая.

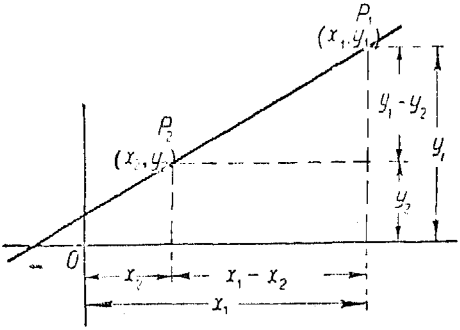


Рис. 372.

В случае, когда линия параллельна оси Y, мы не можем говорить об ее наклоне, так как изменение ординаты при изменении абсциссы не имеет здесь никакого смысла.

Выражение

$$m = \infty$$

просто означает, что прямая параллельна оси Y и ее наклон не определяется конечной величиной.

714. Параллельные прямые (рис. 373). Если две линии параллельны, то θ_1 и θ_2 равны между собой и наклоны линий одинаковы, иначе говоря

$$m_1 = m_2.$$

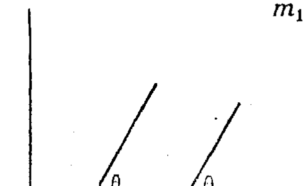


Рис. 373.

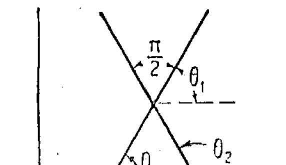


Рис. 374.

715. Перпендикулярные прямые (рис. 374). Пусть имеются две перпендикулярные прямые. В этом случае

$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{2},$$

отсюда

[334] $$\operatorname{tg} \theta_2 = -\operatorname{ctg} \theta_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \theta_1}$$

или

[335]
$$m_2 = -\frac{1}{m_1}.$$

Две прямые перпендикулярны друг к другу, если их наклоны являются величинами, обратными и противоположными по знаку.

716. Угол между прямыми. Пусть β есть угол между прямыми l_1 и l_2 тогда

$$\theta_2 = \theta_1 + \beta \text{ или } \beta = \theta_2 - \theta_1.$$

Пользуясь формулой для тангенса разности двух углов [280] (глава XXIII), имеем:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\theta_2 - \operatorname{tg}\theta_1}{1 + \operatorname{tg}\theta_1 \operatorname{tg}\theta_2} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1},$$

откуда

[336]
$$\beta = \operatorname{arc\,tg}\frac{m_2 - m_1}{1 + n_2 m_1}.$$

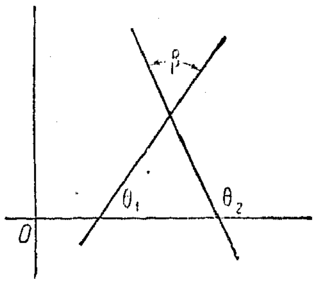


Рис. 375.

Если же угол, образуемый прямыми l_1 и l_2, равен β', то

$$\beta' = 180^\circ - \beta \text{ и } \operatorname{tg}\beta' = -\operatorname{tg}\beta \ (\text{n}^0\,603),$$

откуда

$$\operatorname{tg}\beta' = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}.$$

Пример. Найти угол между прямыми, соединяющими точки (5, 0) $(6, \sqrt{3})$ и (0, 0) $(-\sqrt{3}, -5)$.

Обозначим наклон первой прямой через m_1, тогда по формуле [333]

$$m_1 = \frac{0 - \sqrt{3}}{5 - 6} = \sqrt{3}.$$

Наклон второй прямой равен:

$$m_2 = \frac{0 + 5}{0 + \sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}.$$

Подставляя в найденную выше формулу, имеем

$$\beta = \operatorname{arc\,tg}\frac{\frac{5}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}}{1 + \frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{1}} = \operatorname{arc\,tg}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{6}{1}} = 10^\circ 50'.$$

717. Деление отрезка в данном отношении. Пусть P_1 и P_2 — две заданные точки, лежащие на прямой (рис. 376).

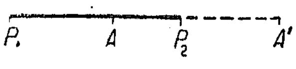


Рис. 376.

Точка A делит отрезок *внутренним* образом, если она лежит между P_1 и P_2, и *внешним* образом, если она лежит за точками P_1 и P_2.

Положение точки деления зависит от отношения ее расстояний до точек P_1 и P_2.

Если прямая имеет положительное направление, то весьма удобно считать, что точка A делит отрезок на части P_1A и AP_2, причем их отношение равно $\frac{P_1A}{AP_2}$.

При внутреннем делении оба эти отрезка читаются в том же направлении, что и P_1P_2, т. е.

$$\begin{array}{c} P_1 \longrightarrow P_2 \\ P_1 \longrightarrow A \longrightarrow P_2. \end{array}$$

В случае же внешнего деления отношение во всех случаях равно $\frac{P_1A'}{A'P_2}$.

Таким образом здесь либо P_1A' положительно, а $A'P_2$ — отрицательно, либо P_1A' — отрицательно, а $A'P_2$ — положительно. Следовательно отношение этих отрезков в обоих случаях есть величина отрицательная

$$\begin{array}{lr} & P_1 \longrightarrow P_2 \\ P_1 & \longrightarrow \text{———} A' \\ & P_2 \longleftarrow A' \end{array} \qquad \begin{array}{lr} & P_1 \longrightarrow P_2 \\ A' \longleftarrow P_1 & \\ A' & \longrightarrow \text{———} P_2 \end{array}$$

Если P_1A' положительно, а $A'P_2$ отрицательно, то

$$\left|\frac{P_1A'}{A'P_2}\right| > 1.$$

Если P_1A' отрицательно, а $A'P_2$ положительно, то

$$\left|\frac{P_1A'}{A'P_2}\right| < 1.$$

718. Деление прямой, соединяющей точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) в данном отношении r. Пусть даны точки $A\ (x_1, y_1)$ и $B\ (x_2, y_2)$ и пусть $C\ (x, y)$ — искомая точка, делящая отрезок в данном отношении (рис. 377).

Из подобия треугольников имеем:

$$\frac{AE}{CD}=\frac{AC}{CB}=r,$$

откуда

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=r \text{ или } x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}.$$

Аналогично найдем:

$$\frac{EC}{DB}=r=\frac{y-y_1}{y_2-y} \text{ или } y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}.$$

Если $C(x, y)$ лежит между A и B, то r может иметь любое положительное значение.

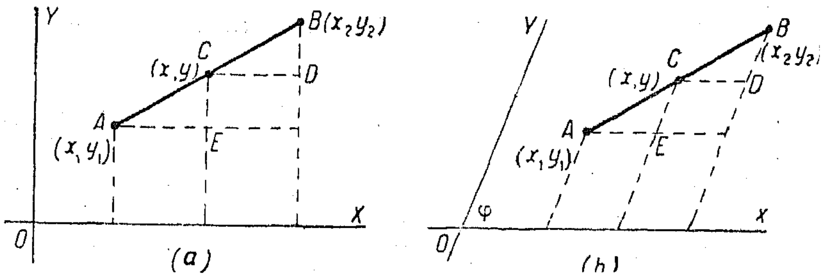


Рис. 377.

Если C лежит на продолжении прямой за точкой A, то r — отрицательно и по абсолютной величине меньше единицы.

Если же C лежит на продолжении прямой за точкой B, то r — отрицательно и по абсолютной величине больше единицы.

Независимо от того, будет ли отрезок делиться внешним или внутренним образом, координаты делящей точки будут

$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r} \text{ и } y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}.$$

Для нахождения середины отрезка полагаем $r=1$, тогда предыдущие формулы примут вид:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2} \text{ и } y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

719. Площадь треугольника (рис. 378). Площадь $\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle BCD + \triangle ADC$.

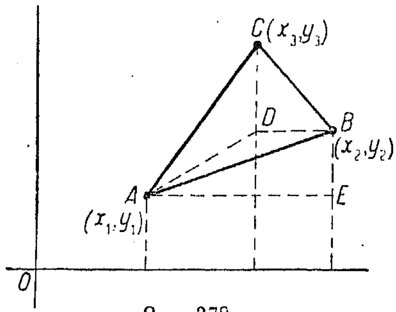


Рис. 378.

Так как площадь каждого треугольника равна половине произведения основания на высоту, то

$$\text{Пл. } \triangle ABD = \frac{BD \times BE}{2} = \frac{1}{2}(x_2 - x_3)(y_2 - y_1)$$

$$\text{Пл. } \triangle BCD = \frac{BD \times CD}{2} = \frac{1}{2}(x_2 - x_3)(y_3 - y_2)$$

$$\text{Пл. } \triangle ADC = \frac{AF \times CD}{2} = \frac{1}{2}(x_3 - x_1)(y_3 - y_2)$$

Таким образом

$$\text{Пл. } \triangle ABC = \frac{1}{2}[(x_2 - x_3)(y_2 - y_1) + (x_2 - x_3)(y_3 - y_2) + (x_3 - x_1)(y_3 - y_2)].$$

Упрощая полученное выражение, имеем:

$$[337]\quad \triangle ABC = \frac{1}{2}[x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - y_1 x_2 - y_2 x_3 - y_3 x_1].$$

720. Правила для вычисления площади треугольника. Весьма удобно поступать по следующему правилу: выписывают в столбец абсциссы вершин в направлении против часовой стрелки.

Второй столбец нужно начать с ординаты второй вершины, затем перейти к третьей и наконец к первой.

Перед каждым произведением следует ставить знак плюс.

$$\begin{array}{l} +x_1 y_2 - y_1 x_2 \\ +x_2 y_3 - y_2 x_3 \\ +x_3 y_1 - y_3 x_1 \end{array}$$

Переходим к третьему столбцу. Начинаем его с ординаты первой вершины и продолжаем писать их в том же порядке, как и абсциссы первого столбца.

Четвертый столбец состоит из абсцисс, начиная со второй, после которой идет третья и первая (как во втором столбце).

Перед произведениями третьего и четвертого столбцов ставится знак минус.

Складывая все эти произведения, имеем:

$$x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-y_1x_2-y_2x_3-y_3x_1.$$

721. Выражение для площади треугольника в виде определителя. Предполагая, что вершины суть точки с координатами (x_1, y_1) (x_2, y_2) (x_3, y_3), можно написать определитель:

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Разлагаем его на сумму трех произведений из элементов, расположенных на линиях, у которых стрелки направлены влево (рис. 379), и, вычитая сумму трех произведений из элементов, указанных линиями со стрелками, направленными вправо, находим:

$$x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-y_1x_2-y_2x_3-y_3x_1.$$

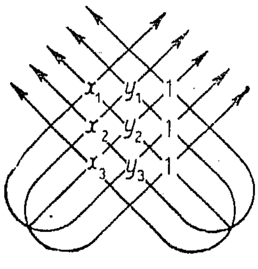


Рис. 379.

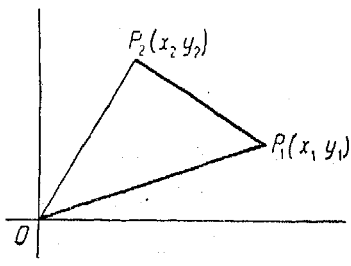


Рис. 380.

722. Если начало координат расположено в одной из вершин треугольника, например (x_3, y_3), то в таком случае (x_3, y_3) обращаются в $(0, 0)$ (рис. 380).

Подставляя указанные значения координат в [337], имеем:

$$[338]\quad A=\frac{1}{2}[x_1y_2+0+0-y_1x_2-0-0]=\frac{1}{2}[x_1y_2-y_1x_2].$$

Определитель этого выражения легко запомнить, так как $x_1y_2 - y_1x_2$ можно написать так:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \text{ откуда } \quad A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Пример. Найти площадь треугольника, у которого одна вершина лежит в начале координат, а две другие имеют координаты (4, 3) и (2, 5).

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(4 \cdot 5 - 2 \cdot 3) = 7.$$

723. Площадь многоугольника. Если заданы прямоугольные координаты вершин многоугольника, то его можно разбить диагоналями на треугольники, а затем найти его площадь по той же схеме, которая применялась для нахождения площади треугольника.

Следует рассматривать последовательно вершины в направлении против часовой стрелки, например P_1 (x_1, y_1),

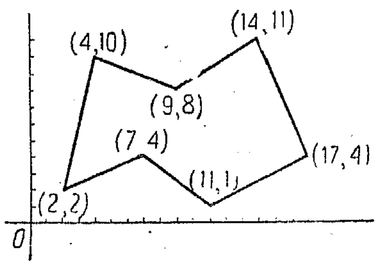


Рис. 381.

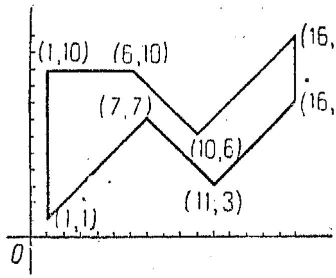


Рис. 382.

P_2 (x_2, y_2), P_3 (x_3, y_3) и т. д., а затем применять способ, указанный в предыдущих n^0 для треугольников.

Таким образом в случае шестиугольника получим:

$$\begin{array}{l} +x_1y_2 - y_1x_2 \\ +x_2y_3 - y_2x_3 \\ +x_3y_4 - y_3x_4 \\ +x_4y_5 - y_4x_5 \\ +x_5y_1 - y_5x_1 \end{array}$$

$$A = \frac{1}{2}\,[x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_5 + x_5y_1 - \\ - y_1x_2 - y_2x_3 - y_3x_4 - y_4x_5 - y_5x_1].$$

Пример 1. Найти площадь многоугольника, изображенного на рис. 381.

$+\ 2\cdot 4 = 8$	$-\ 2\cdot 7 = 14$
$+\ 7\cdot 1 = 7$	$-\ 4\cdot 11 = 44$
$+11\cdot 4 = 44$	$-\ 1\cdot 17 = 17$
$+17\cdot 11 = 187$	$-\ 4\cdot 14 = 56$
$+14\cdot 8 = 112$	$-11\cdot 9 = 99$
$+\ 9\cdot 10 = 90$	$-\ 8\cdot 4 = 32$
$+\ 4\cdot 2 = 8$	$-10\cdot 2 = 20$
$+456$	-282

$$\text{Площадь} = \frac{1}{2}\,[456 - 282] = 87.$$

Пример 2. Найти площадь многоугольника, показанного на рис. 382.

724. Составление уравнений. Иногда задачи даются в форме геометрических или тригонометрических соотношений, и для того чтобы решить их в общем виде мы выражаем указанные соотношения в форме уравнения.

Разберем для примера несколько задач.

Задача 1. Точка движется на плоскости таким образом, что расстояние ее от точек P_1 (4, — 3) и P_2 (— 3,6) — одинаковы (рис. 383).

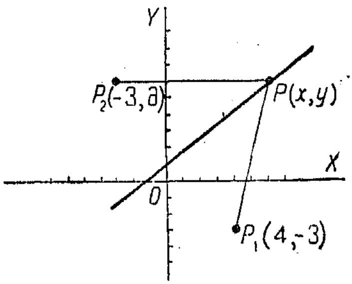


Рис. 383.

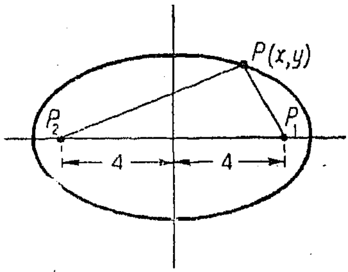


Рис. 384.

Найти уравнение кривой, которую чертит данная точка, или, иначе говоря, геометрическое место точек, удовлетворяющих поставленному условию.

Нам нужно выразить данное соотношение в виде некоторого соотношения между x и y, т. е. между координатами точки.

Из условия имеем

$$P_1P = P_2P.$$

Из n⁰ 708 мы знаем, что расстояние между двумя точками, например P_1P, выражается формулой

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y+3)^2}.$$

Точно также

$$P_2P = \sqrt{(x+3)^2 + (y-6)^2},$$

Итак
$$\sqrt{(x-4)^2+(y+3)^2}=\sqrt{(x+3)^2+(y-6)^2}.$$

Возвышая обе части в квадрат, имеем:
$$x^2-8x+16+y^2+6y+9=x^2+6x+9+y^2-12y+36,$$
откуда
$$7x-9y+10=0.$$

Задача 2. Расстояние между двумя точками равно 8 *см*. Точка движется так, что сумма расстояний ее от данных точек всегда равна 10 *см*.

Проведем через данные две точки ось X. Ось Y направим посредине между ними, как это показано на рис. 384.

Из условия задачи имеем:
$$P_2P+P_1P=10.$$

Напишем это соотношение в зависимости от координат x и y, применяя для этого формулу [329], дающую расстояние между точками
$$\sqrt{(x-4)^2+y^2}+\sqrt{(x+4)^2+y^2}=10,$$
откуда
$$9x^2+25y^2=225.$$

Как известно из n^0 200, полученное уравнение соответствует эллипсу.

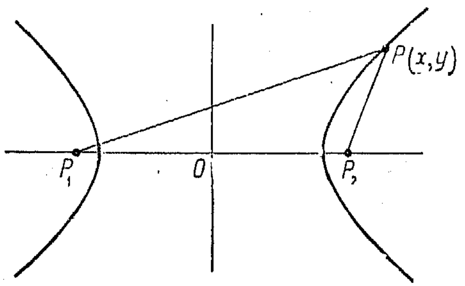


Рис. 385.

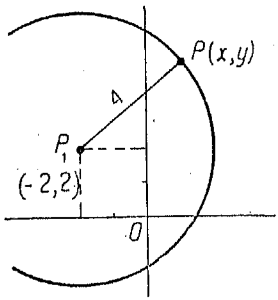


Рис. 386.

Задача 3. Найти уравнение кривой, по которой движется точка, если разность ее расстояний от двух других точек P_2 (5, 0) и P_1 (—5, 0) равна 8.

Из условия задачи (рис. 385)
$$P_1P-P_2P=8,$$
отсюда
$$\sqrt{(x+5)^2+y^2}-\sqrt{(x-5)^2+y^2}=8$$
или
$$9x^2-16y^2=144.$$

Задача 4. Найти уравнение геометрического места точек, расстояние которых от P_1 (—2, 2) всегда равно 4.

Пусть $P(x, y)$ — произвольная точка искомой кривой.
Из условия задачи

$$P_1P = 4.$$

$$P_1P = \sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} = 4.$$

Возвысим обе части уравн ния в квадрат, тогда получим

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = 16,$$

или

$$x^2 + y^2 + 4x - 4y = 8.$$

Это и есть уравнение искомого геометрического места, являющегося, как это видно из определения, окружностью.

Глава XXXI.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ПРЯМАЯ ЛИНИЯ.

725. Всякое уравнение первой степени относительно x и y выражает прямую линию (n^0 145).

Для того чтобы определить положение прямой и написать ее уравнение, необходимо определить две постоянные.

726. Уравнение прямой, проходящей через данную точку. Положение прямой вполне определяется, если задан ее наклон и координаты какой-либо лежащей на ней точки.

Из n^0 713 имеем:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad [333]$$

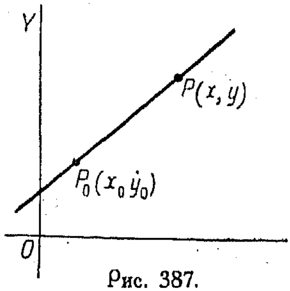


Рис. 387.

Пусть даны координаты некоторой определенной точки $P_0(x_0, y_0)$ и пусть кроме того $P(x, y)$ — произвольная точка на прямой, тогда

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}.$$

Освобождая правую часть от знаменателя, имеем:

[339] $$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Это и есть уравнение прямой, проходящей через данную точку, в системе прямоугольных координат.

Пример 1. Написать уравнение прямой, проходящей через точку (4, 4) и имеющую наклон, равный 2.

В данном случае $x_0 = 4$, $y_0 = 4$, $m = 2$.

Подставляя в уравнение

$$y - y_0 = m(x - x_0), \quad [339]$$

имеем:

$$y - 4 = 2(x - 4) \text{ или } y = 2x - 4.$$

Последнее выражение и является уравнением искомой прямой.

Пример 2. Увеличение скорости тела, падающего под действием силы тяжести, пропорционально времени. Если скорость тела в некоторый определенный момент t_0 равна v_0, а в любой произвольный момент t она равна v, то

$$v - v_0 = k(t - t_0).$$

Если v и v_0 заданы в метрах в секунду, а t и t_0 — в секундах, то k — коэффициент пропорциональности, равный постоянной $g = 9{,}81$ *м/сек*^{2}.

Пример 3. Расширение стального стержня почти пропорционально повышению температуры. Если длина этого стержня при некоторой температуре t_0 равна l_0, а l — его длина при некоторой температуре t, то

$$l - l_0 = k(t - t_0).$$

727. Уравнение прямой с угловым коэффициентом (наклоном).

Если заданы наклон прямой и длина отрезка, отсекаемого ею на оси Y, то можно написать уравнение этой прямой в явном виде.

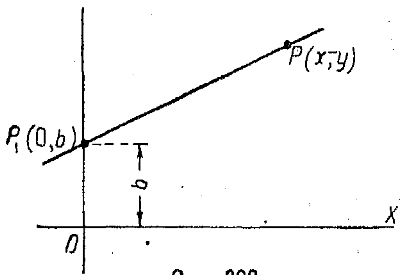


Рис. 388.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку (n^0 726),

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Так как координаты заданной точки в данном случае суть $(0, b)$, то, подставляя в предыдущее уравнение $x_0 = 0$ и $y_0 = b$, получим:

$$y - b = m(x - 0)$$

или

$$y = mx + b, \text{ (n}^0\text{ 128)},$$

которое и является уравнением прямой в явном виде, определяющем наклон ее и пересечение с осью Y (рис. 388).

Пример 1. Написать уравнение прямой, пересекающей ось Y в точке -3, если наклон прямой равен 3.

Здесь $b = -3$, $m = 3$.

Подставляя в уравнение

$$y = mx + b,$$

имеем:

$$y = 3x - 3.$$

Это и есть искомое уравнение (см. n^0 128)

Пример 2. По закону Гука удлинение упругой нити прямо пропорционально растягивающему усилию. Если длина этой нити при нагрузке, равной нулю, есть l_0, а длина при действии нагрузки t есть l, то

$$l = kt + l_0.$$

Пример 3. Если в момент $t = 0$ скорость падающего тела равна v_0 *м/сек*, причем эта скорость пропорциональна времени, то

$$v = kt + v_0.$$

Так как степень изменения скорости по отношению к времени обозначается обычно буквой g, то

$$v = gt + v_0.$$

В предыдущей главе (n^0 145) были приведены рассуждения относительно общего уравнения первой степени $Ax + By + C = 0$. Это было сделано с целью выяснить соотношения, существующие между уравнением и его графиком. В настоящем отделе мы повторим некоторую часть упомянутых рассуждений с тем, чтобы продолжить их далее.

Если $B \neq 0$, то, решая уравнение относительно y, получим:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Сравнивая с явной формой уравнения прямой

$$y = mx + b,$$

видим, что

$$m = -\frac{A}{B}, \text{ а } b = -\frac{C}{B}.$$

Представив общее уравнение в таком виде, можно сразу определить длину отрезка, который данная прямая отсекает на оси Y.

728. Прямые, параллельные осям. Если прямая параллельна оси X, то ее наклон m равен нулю.

Подставив это значение m в выражение $y = mx + b$, имеем:

$$y = 0 \cdot x + b \text{ или } y = b.$$

Отсюда видно, что все точки прямой имеют одинаковые ординаты, равные b.

В случае линии, параллельной оси Y, уравнение ее нельзя представить в виде $y = mx + b$, так как для такой прямой m не имеет определенной конечной величины. Поэтому поставим

x и y одно на место другого Тогда независимой переменной явится y, причем будем иметь

$$x = my + b.$$

Но по отношению к оси Y $m = 0$, отсюда

$$x = 0 \cdot y + b \text{ или } x = b.$$

Если в этих уравнениях $b = 0$, то $y = 0$ и $x = 0$. Эти уравнения выражают ось X и ось Y — соответственно.

729. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Если даны координаты двух точек, лежащих на прямой, то этим определяется ее положение, а также и вид уравнения.

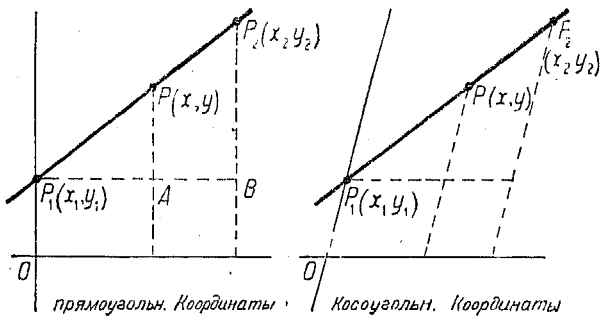


Рис. 389.

Пусть $P(x, y)$ — произвольная точка на прямой.

Проведем ординаты и линии, параллельные оси X, как это показано на рис. 389.

Из подобия треугольников имеем:

$$\frac{PA}{AP_1} = \frac{P_2B}{P_1B}$$

или

[340] $$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

или же

[341] $$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Последние уравнения называются *уравнениями прямой, проходящей через точки* $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$.

Пример. Написать уравнение прямой, проходящей через точки (2,3) и (6, 6).

Положим $P_2(x_2, y_2) = (6, 6)$, тогда $x_2 = 6$, $y_2 = 6$; $P_1(x_1, y_1) = (2, 3)$, тогда $x_1 = 2$, $y_1 = 3$.

Подставляя в уравнение

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

имеем:

$$\frac{y-3}{x-2} = \frac{6-3}{6-2} \quad \text{или} \quad 4y - 12 = 3x - 6,$$

откуда

$$4y - 3x = 6.$$

Это и есть уравнение искомой прямой.

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2, (x_2, y_2)$, написанное в форме определителя, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Это выражение можно легко запомнить.

Как известно из предыдущего (гл. XIX),

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = xy_1 + x_1y_2 + x_2y - y_1x_2 - y_2x - x_1y.$$

Прибавим и вычтем x_1y_1, что не изменит величину выражения, тогда

$$xy_1 + x_1y_2 + x_2y - y_1x_2 - y_2x - x_1y + x_1y_1 - x_1y_1 = 0.$$

Приводя подобные члены, находим:

$$x_2(y - y_1) - x_1(y - y_1) + x(y_1 - y_2) - x_1(y_1 - y_2) = 0$$

$$(x_2 - x_1)(y - y_1) + (x - x_1)(y_1 - y_2) = 0$$

или

$$(x_2 - x_1)(y - y_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1).$$

Разделив обе части на $(x_2 - x_1)(x - x_1)$ и сокращая одинаковые члены, получим

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Полученное уравнение одинаково с уравнением прямой, проходящей через две данные точки [340].

730. Уравнение прямой в отрезках. Если даны точки пересечения прямой с осями X и Y, то, пользуясь формулами, приведенными в n⁰ 729, можно написать уравнение прямой, проходящей через две указанных точки. Обозначим последние через $(a, 0)$ и $(0, b)$, где a — абсцисса точки пересечения прямой с осью X, а b — ордината точки пересечения с осью Y.

Итак, точка пересечения с осью X: $P_2 = (a, 0)$,

$$x_2 = a, \quad y_2 = 0,$$

а точка пересечения с осью Y: $P_1 = (0, b)$

$$x_1 = 0 \text{ и } y_1 = b.$$

Подставляя в уравнение прямой, проходящей через две точки (n⁰ 729), имеем:

$$\frac{y-b}{x-0} = \frac{0-b}{a-0} = -\frac{b}{a}.$$

$$a(y-b) = -bx \text{ или } bx + ay = ab.$$

Разделив на ab, получим

[342] $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Так как величина a равна длине отрезка, отсекаемого прямой на оси Y (от начала координат до точки пересече-

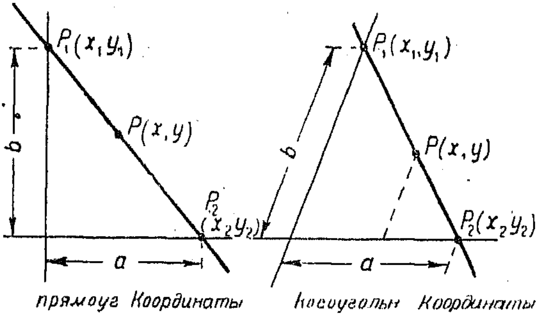


Рис. 390.

ния), а b равно отрезку, отсекаемому на оси Y, то полученное уравнение называется *уравнением прямой в отрезках на осях* (рис. 390).

Пример. Прямая пересекает ось X в расстоянии 8 от начала координат, а ось Y — в расстоянии (-10) от начала. Найти уравнение этой прямой По условиям задачи $a = 8$, $b = -10$.

Подстановка в формулу $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ дает:

$$\frac{x}{8} - \frac{y}{10} = 1 \text{ или } 10x - 8y = 80,$$

откуда

$$5x - 4y = 40.$$

Это и есть искомое уравнение.

731. Нормальный вид уравнения прямой. Если известны длина и направление перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, то последняя этим вполне определяется.

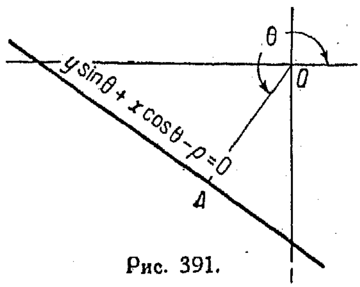


Рис. 391.

Пусть расстояние прямой от начала равно p, а угол, образуемый перпендикуляром, равен θ и пусть необходимо выразить координаты точек прямой через p и θ, вместо x и y (рис. 391).

Если A — основание перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, то координаты этой точки, выраженные через p и θ, будут:

$$x = p\cos\theta \text{ и } y = p\sin\theta.$$

Наклон прямой OA равен $\operatorname{tg}\theta$, но так как данная прямая перпендикулярна к OA, то наклон ее есть $(-\operatorname{ctg}\theta)$, т. е. $m = -\operatorname{ctg}\theta$.

Производя соответствующую подстановку в уравнении прямой, проходящей через данную точку,

$$y - y_0 = m\,(x - x_0),$$

имеем:

$$y - p\sin\theta = -\operatorname{ctg}\theta\,(x - p\cos\theta).$$

Подставляя $\operatorname{ctg}\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ и умножая обе части уравнения на $\sin\theta$, получим:

$$y\sin\theta - p\sin^2\theta = -x\cos\theta + p\cos^2\theta.$$

Перенося члены в левую часть и вынося p за скобки, находим:

$$y \sin\theta + x\cos\theta - p\ (\sin^2\theta + \cos^2\theta) = 0.$$

Но $(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = 1$, следовательно

[343] $$y \sin\theta + x\cos\theta - p = 0.$$

Полученное уравнение, где координаты выражены в зависимости от p и θ, называется *нормальным видом* уравнения прямой.

Пример. Найти нормальную форму уравнения прямой линии, для которой $p = 10$, а $\theta = 35^0$.

Подставляя в [343], имеем:

$$x\cos 35^\circ + y\sin 35^\circ - 10 = 0.$$

732. Приведение общего уравнения прямой к форме в отрезках. Если ни одно из количеств A, B и C в общем уравнении прямой $Ax + By + C = 0$ не равно нулю, то, перенося свободный член C в правую часть, можем представить общее уравнение прямой в форме

$$Ax + By = -C.$$

Деля на $-C$, получим

[344] $$\frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y = 1$$

или

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1.$$

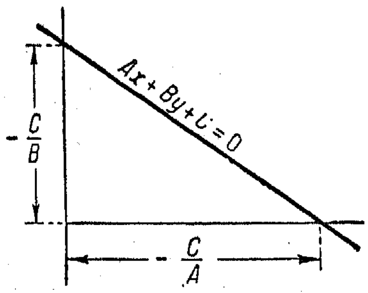


Рис. 392.

Сравнивая полученное уравнение с уравнением $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (n^0 730), видим, что

$a = -\frac{C}{A}$ — длина отрезка, отсекаемого прямой на оси X;

$b = -\frac{C}{B}$ — длина отрезка, отсекаемого прямой на оси Y.

Если $C = 0$, то оба отрезка равны нулю.

Если A или B равно нулю, то линия параллельна соответствующей координатной оси.

733. Приведение общего уравнения прямой к нормальному виду (рис. 393). Координаты x и y основания перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, суть: $x = p\cos\theta$ и $y = p\sin\theta$ (n^0 731).

Подставляя эти значения их в общее уравнение прямой, получим:

$$Ap\cos\theta + Bp\sin\theta + C = 0.$$

Наклон перпендикуляра (n^0 715) есть величина, обратная и имеющая противоположный знак по сравнению с наклоном данной прямой. Но из n^0 731 наклон прямой, выражаемой общим уравнением, равен

$$m = -\frac{A}{B},$$

поэтому наклон перпендикуляра равен $\frac{B}{A}$, т. е.

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{B}{A}.$$

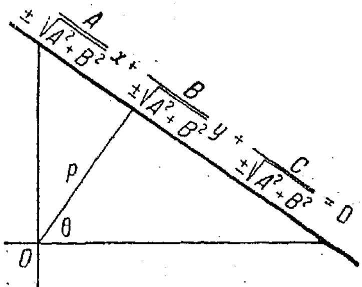


Рис. 393.

Из тригонометрии известно, что

$$\cos\theta = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}}. \quad [273]$$

Подставляя, имеем:

$$\cos\theta = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{B}{A}\right)^2}} = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Кроме того

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}. \quad [274]$$

Подставляя сюда значение косинуса, находим:

$$\frac{\sin\theta}{\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}} = \frac{B}{A},$$

откуда

$$\sin\theta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Теперь подставим полученные значения $\sin\theta$ и $\cos\theta$ в уравнение

$$Ap\cos\theta + Bp\sin\theta + C = 0.$$

Тогда получим:

$$\frac{A^2p}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{B^2p}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = -C.$$

Разделим обе части на $\pm\sqrt{A^2+B^2}$. Тогда

$$\frac{A^2p}{A^2+B^2} + \frac{B^2p}{A^2+B^2} = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$\frac{p(A^2+B^2)}{A^2+B^2} = -\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$-p = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Подставляя значения $\sin\theta$, $\cos\theta$ и p в нормальное уравнение прямой, имеем окончательно

$$[345]\quad \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0.$$

Таким образом общее уравнение приводится к нормальному виду путем деления всех его членов на корень квадратный из суммы квадратов коэффициентов при x и y. Знак радикала следует брать противоположным знаку при C, т. е. таким образом, чтобы знак при p был минус [1]).

734. Уравнение прямой, проходящей через точку (x_0, y_0) перпендикулярно к линии $Ax+By+C=0$ (рис. 394). Известно, что уравнение прямой должно быть представлено в виде

$$y - y_0 = m'(x - x_0).$$

Наклон линии $Ax+By+C=0$ равен $-\frac{A}{B}$.

---

[1]) Величина p, как длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, положительна. По этой причине знак радикала $\sqrt{A^2+B^2}$ выбирается так, чтобы величина

$$\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = p$$

оказалась отрицательной. *Прим. ред.*

Так как искомая прямая перпендикулярна к указанной выше линии, то ее наклон есть величина, обратная и противоположная по знаку по отношению к m.

Поэтому

$$m' = \frac{B}{A}$$

и уравнение искомой линии будет иметь вид

$$[346] \qquad y - y_0 = \frac{B}{A}(x - x_0),$$

где x_0 и y_0 — координаты данной точки.

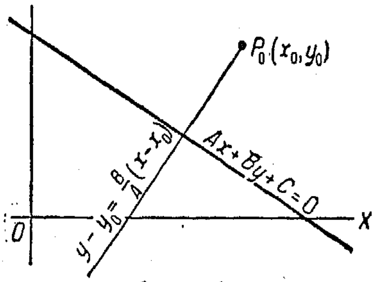


Рис. 394.

735. Расстояние от данной точки P (x_0, y_0) до прямой $Ax + By + C = 0$. Перенесем начало координат в данную

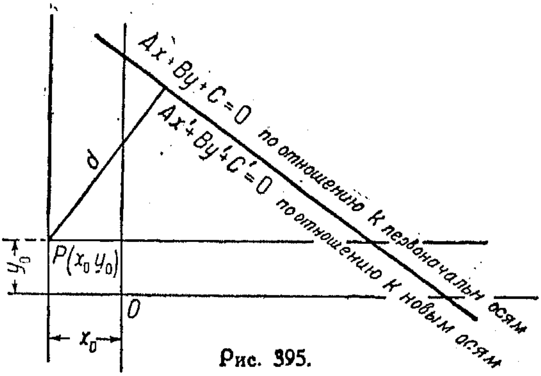


Рис. 395.

точку P (x_0, y_0) и напишем новое уравнение прямой (см. nn⁰ 172, 205, 236, 262 и 270):

$$x = x_0 + x', \quad y = y_0 + y'.$$

Подставляя в уравнение прямой, получим:

$$A(x' + x_0) + B(y' + y_0) + C = 0.$$

Раскрывая скобки, имеем:

$$Ax' + By' + Ax_0 + By_0 + C = 0,$$

где x' и y' — переменные координаты, а $Ax_0 + By_0 + C$ — постоянный член.

Согласно n⁰ 733, расстояние от начала координат до данной прямой равно постоянному члену, деленному на $\pm\sqrt{A^2+B^2}$.

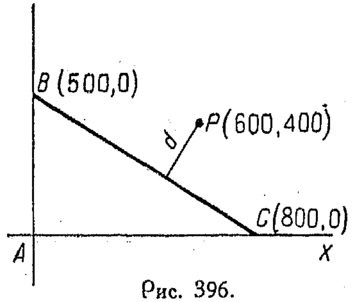


Рис. 396.

Поэтому

$$[347] \quad d=\frac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},$$

где x_0 и y_0 — координаты данной точки.

Пример. Гавань B расположена в 500 *км* прямо к северу от гавани A, а гавань C — в 800 *км* к востоку от A. Военный корабль стоит в 600 *км* к востоку и в 400 *км* к северу от A, а торговое судно идет из B в C. Как близко подойдет судно к кораблю?

Начертим график, как показано на рис. 396. Из рисунка видно, что данные задачи позволяют легко написать уравнение прямой в отрезках, отсекаемых ею на осях координат. Для этого следует подставить $a=800$ и $b=500$ в уравнение

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Таким образом имеем:

$$\frac{x}{800}+\frac{y}{500}=1,$$

откуда

$$5x+8y-4000=0.$$

Сравнивая это с уравнением $Ax+By+C=0$, видим, что здесь

$$A=5,\ B=8,\ C=-4000.$$

Координаты точки P суть (600, 400),

т. е.

$$x_0=600, y_0=400$$

Подставляя эти значения в формулу

$$d=\frac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \quad [347]$$

имеем:

$$d=\frac{5\cdot600+8\cdot400-4000}{\pm\sqrt{25+64}}=\frac{2200}{\sqrt{89}},$$

$$\lg d=\lg 2200-\frac{1}{2}\lg 89,$$

откуда

$$d=233,2.$$

736. Уравнение прямой, проходящей через данную точку $P(x_0\ y_0)$ и образующую угол θ с линией $Ax+By+C=0$. Пусть наклон данной линии равен m, а наклон искомой есть m'.

Так как согласно n° 726 мы можем написать уравнение линии, проходящей через точку P и имеющей наклон m', для чего нужно подставить значение m' в

$$y - y_0 = m' \ (x - x_0),$$

то остается определить только m'.

Из n° 716 имеем:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{m - m'}{1 + m \ m'} \text{ или } \frac{m' - m}{1 + m \ m'},$$

где θ — угол между двумя прямыми, имеющими наклоны m и m'.

Помня, что определенному значению $\operatorname{tg} \theta$ соответствуют два угла, и решая относительно m', имеем:

$$m' = \frac{m \pm \operatorname{tg} \theta}{1 \mp m \operatorname{tg} \theta}.$$

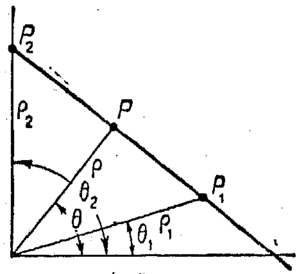


Рис. 397.

Из n° 727

$$m = -\frac{A}{B},$$

откуда

$$m' = \frac{-\frac{A}{B} \pm \operatorname{tg} \theta}{1 \pm \frac{A}{B} \operatorname{tg} \theta}.$$

Подставим полученное значение m' в уравнение прямой, проходящей через данную точку, получим:

$$[348] \qquad y - y_0 = \frac{-\frac{A}{B} \pm \operatorname{tg} \theta}{1 \pm \frac{A}{B} \operatorname{tg} \theta} (x - x_0).$$

737. Полярное уравнение прямой, проходящей через две точки, например P_1 (ρ_1, θ_1) и P_2 (ρ_2, θ_2), имеет вид (рис. 397).

$$[349] \qquad \rho\rho_1 \sin (\theta - \theta_1) + \rho_1\rho_2 \sin (\theta_1 - \theta_2) + \\ + \rho\rho_2 \sin (\theta_2 - \theta) = 0,$$

где (ρ, θ) — переменные координаты любой точки на прямой[1]).

---

[1]) Уравнение прямой линии, проходящей через две данные точки P_1 (x_1, y_1) и P_2 (x_2, y_2), в прямоугольных координатах имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

738. Системы прямых линий. Рассмотрим уравнение

[350] $$y - mx = k.$$

Если левая часть уравнения остается неизменной, а постоянному члену k дают различные произвольные значения, то графики уравнений образуют ряд прямых, параллельных друг другу, так как все они имеют одинаковый наклон.

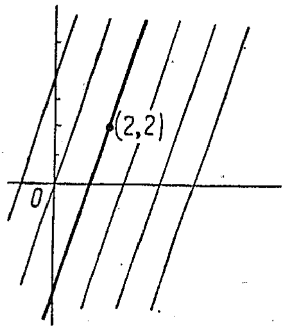


Рис. 398.

Величина k является постоянной для каждой из этих линий, но имеет различные значения при переходе от одной линии рассматриваемого ряда к другой. Эта величина называется *параметром*, а совокупность указанных линий — системой параллельных прямых.

Если необходимо определить какую-нибудь из линий системы, например прямую, проходящую через точку (2, 2) и параллельную к $y - 3x = 2$, то, сохраняя уравнение в форме $y - 3x = k$, мы сохраним и условия параллельности, а находя соответствующее значение k, определим положение искомой прямой.

Если прямая проходит через некоторую точку, то координаты последней должны удовлетворять уравнению данной линии.

Подставляя значения (2, 2) в уравнение

$$y - 3x = k,$$

имеем:

$$2 - 6 = k \text{ или } k = -4.$$

или, если освободиться от знаменателей,

$$xy_2 - yx_2 + x_2y_1 - y_2x_1 + x_1y - y_1x = 0.$$

Заменяя прямоугольные координаты полярными, получим:

$$\rho\rho_2 (\cos\theta \sin\theta_2 - \sin\theta \cos\theta_2) + \rho\rho_1 (\cos\theta_2 \sin\theta_1 - \sin\theta_2 \cos\theta_1) + \\ + \rho\rho_1 (\cos\theta_1 \sin\theta - \sin\theta_1 \cos\theta) = 0.$$

Уравнение после преобразований примет вид

$$\rho\rho_2 \sin(\theta_2 - \theta) + \rho_2\rho_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \rho\rho_1 \sin(\theta - \theta_1) = 0$$

Прим. ред.

Таким образом, отрезок, отсекаемый прямой на оси Y, равен (—4). Подставляя это значение вместо k в уравнение системы, найдем

$$y-3x=-4 \text{ или } y-3x+4=0,$$

которое и является уравнением искомой прямой.

739. Системы прямых, перпендикулярных к линии $y-mx=k$ (рис. 399). Сравнивая уравнения

$$y-mx=k$$
$$my+x=k,$$

видим, что наклон прямой в первом уравнении есть величина, противоположная по знаку и обратная по величине по отношению к наклону во втором. Согласно n° 715 это указывает на то, что линия, представляемая вторым уравнением, перпендикулярна к линии, соответствующей первому.

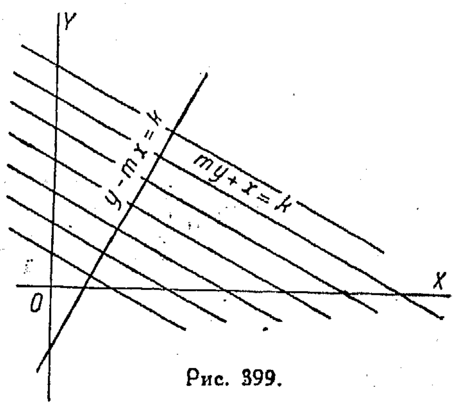


Рис. 399.

Если в этих двух уравнениях придавать k различные значения, то получим две системы прямых, перпендикулярных одна к другой. Если нам требуется написать уравнение одной линии, перпендикулярной к другой и проходящей через некоторую точку, то мы можем сделать это, поставив коэффициенты при x и y один на место другого и изменив знак члена, содержащего y.

Такое преобразование соответствует перемене знака наклона и замене его величины на обратную.

Пусть имеется уравнение

$$2x+3y-4=0,$$

тогда общий вид уравнения системы прямых, перпендикулярных к данной, будет:

$$3x-2y=k.$$

Если требуется написать уравнение линии, перпендикулярной к прямой $2x+3y-4=0$ и проходящей через точку

$(3, -2)$, то посредством подстановки значений координат в общее уравнение $3x-2y=k$ определим постоянную k.

Заметим, что указанную подстановку не следует производить в уравнении $2x+3y-4=0$, ибо точка $(3, -2)$ лежит не на этой прямой.

Имеем:

$$3 \cdot 3-2(-2)=k$$

$$9+4=k$$

$$k=13.$$

Подставляя в общее уравнение, получим

$$3x-2y=13.$$

Это и есть уравнение прямой, перпендикулярной к $2x+3y-4=0$ и проходящей через точку $(3, -2)$.

740. Системы прямых, проходящих через данную точку. Рассмотрим уравнение

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

и пусть координаты данной точки (x_0, y) будут $(3, -3)$, тогда уравнение примет вид

$$y+3=m(x-3).$$

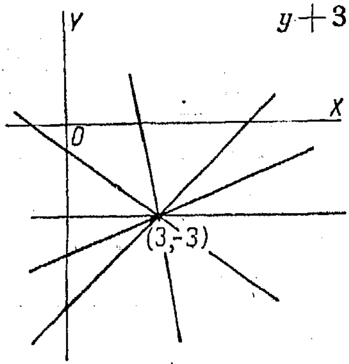


Рис. 400.

Придавая m различные значения, получим систему линий, которые все будут проходить через данную точку $(3, -3)$. Если требуется найти уравнение прямой, имеющей наклон 2 и проходящей через точку $(2, 2)$, то можем сразу написать

$$y-2=2(x-2)$$

или

$$y-2x+2=0.$$

Аналогичным образом можно найти уравнение прямой, проходящей через две точки, например $(2, 2)$ и $(-3, 3)$.

Напишем уравнение системы прямых, проходящих через точку $(2, 2)$.

Имеем:

$$y-2=m(x-2).$$

Подставим сюда вместо x и y координаты —3 и 3, тогда

$$3-2=m(-3-2),$$

откуда

$$m=-\frac{1}{5}.$$

Уравнение прямой принимает вид:

$$y-2=-\frac{1}{5}(x-2)$$

или

$$5y-10=-x+2$$

$$x+5y-12=0.$$

Для проверки сравним полученный результат с тем, который дает подстановка в уравнение прямой, проходящей через две точки (n⁰ 729):

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$

$$\frac{y-2}{x-2}=\frac{2-3}{2+3}=-\frac{1}{5}$$

$$-5y+10=x-2$$

$$x+5y-12=0.$$

741. Системы прямых, проходящих через точку пересечения двух данных линий. Если уравнения

$$Ax+By+C=0$$

$$A'x+B'y+C'=0$$

соответствуют двум прямым, то уравнение

[351] $$Ax+By+C+k\,(A'x+B'y+C')=0$$

соответствует системе прямых, проходящих через точку пересечения данных линий.

Для удобства положим

$$f(x,\,y)=Ax+By+C$$

$$g(x,\,y)=A'x+B'y+C',$$

тогда, согласно сказанному выше, выражение

$$f(x,\,y)+k[g(x,\,y)]=0$$

определяет систему прямых с параметром k.

Пусть точкой пересечения данных линий является $P(a, b)$. Тогда оба уравнения, т. е. $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ удовлетворяются значениями $x = a$ и $y = b$, так как $P(a, b)$ лежат на обеих линиях.

Если

$$f(a, b) = 0 \text{ и } g(a, b) = 0, \text{ то}$$
$$f(a, b) + k\,[g(a, b)] = 0$$

для всех значений k. Таким образом каждая линия системы $f(x, y) + k[g(x, y)]$ проходит через точку $P(a, b)$, так как координаты ее удовлетворяют уравнению.

Преимущества описанного способа видны из нижеследующих примеров.

Пример 1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения линий

$$2x + y - 4 = 0 \text{ и } x + 3y - 3 = 0$$

и точку $P(3, 3)$.

Напишем уравнение системы прямых, проходящих через точку пересечения двух данных линий. Имеем:

$$2x + y - 4 + k(x + 3y - 3) = 0.$$

Так как искомая прямая проходит через точку $P(3, 3)$, то координаты последней удовлетворяют уравнению указанной прямой.

Подставляя $x = 3$, $y = 3$ в уравнение системы, получим:

$$6 + 3 - 4 + k(3 + 9 - 3) = 0,$$

откуда

$$5 + 9k = 0; \quad k = -\frac{5}{9}.$$

Таким образом

$$2x + y - 4 - \frac{5}{9}(x + 3y - 3) = 0$$

или

$$13x - 6y - 21 = 0.$$

Это и есть уравнение искомой прямой.

Пример 2. Найти уравнение прямой, проходящей через пересечение линий

$$2x + y + 2 = 0 \text{ и } x - 2y + 2 = 0$$

и параллельной прямой

$$3x - 4y - 5 = 0.$$

Уравнение системы прямых, проходящих через пересечение данных, имеет вид

$$2x + y + 2 + k(x - 2y + 2) = 0$$

или

$$(2 + k)x + (1 - 2k)y + 2(1 + k) = 0.$$

Наклон этой линии равен

$$-\frac{2 + k}{1 - 2k}.$$

Этот наклон должен быть равен наклону прямой $3x - 4y - 5 = 0$, т. е. $\frac{3}{4}$, поэтому

$$-\frac{2+k}{1-2k} = \frac{3}{4} \text{ или } k = \frac{11}{2}.$$

Подставляя, имеем:

$$2x + y + 2 + \frac{11}{2}(x - 2y + 2) = 0.$$

Упрощая, находим:

$$15x - 20y + 26 = 0$$

$$3x - 4y + \frac{26}{5} = 0.$$

Полученная прямая параллельна данной, так как коэффициенты при x и y в их уравнениях одинаковы.

Изложенный метод применим к любому уравнению вида

$$f(x, y) = 0$$

точно таким же образом, как и к уравнению прямой, поэтому в дальнейшем мы воспользуемся им.

Главное преимущество этого метода заключается в том, что нам не нужно знать координаты точки пересечения двух данных линий, хотя они и могут быть легко найдены (как это показано на примерах), если решить уравнения совместно. Если же координаты точки пересечения найти трудно, то данный метод особенно удобен.

742. Уравнение $x \cos k + y \sin k - p = 0$ [352].

Очевидно, это нормальный вид уравнения прямой, причем, придавая k различные значения, получим систему прямых. Расстояние каждой из них от начала координат равно p.

Если линия, определяемая уравнением

$$x \cos k + y \sin k - 2 = 0,$$

проходит через точку (4, 0), то

$$4 \cos k = 2, \text{ откуда } \cos k = \frac{1}{2}$$

$$\sin k = \pm\sqrt{1 - \cos^2 k} = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

В таком случае уравнение

$$x \cos k + y \sin k - 2 = 0$$

обращается в такое:

$$\frac{x}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} y - 2 = 0 \text{ или } x \pm \sqrt{3}\, y - 4 = 0.$$

Каждая из форм уравнения прямой заключает в себе две постоянных. Если одной из них придать определенное численное значение, а другую оставить неопределенной, то получим систему прямых линий.

Из предыдущих рассуждений видно удобство пользования общим уравнением системы прямых в тех случаях, когда необходимо найти линию, удовлетворяющую двум условиям. При этом общее уравнение можно написать в такой форме, чтобы удовлетворялось одно условие, а затем подобрать параметр соответственно второму условию.

743. Произведение двух линейных уравнений.

Если каждое из уравнений

$$Ax+By+C=0$$
$$A'x+B'y+C'=0$$

соответствует прямой линии, то уравнение

$$(Ax+By+C)(A'x+B'y+C')=0$$

соответствует совокупности этих линий.

Действительно, если, точка $P(a, b)$ лежит на линии $Ax+By+C=0$ (или на $A'x+B'y+C'=0$), то координаты ее удовлетворяют уравнению, иначе говоря, при значениях $x=a$ и $y=b$ левая часть уравнения обращается в нуль. Значения координат $P(a, b)$, удовлетворяющие одному из уравнений данных линий, удовлетворяют и их произведению, а это значит, что любая точка, лежащая на линии $Ax+By+C=0$ или $A'x+B'y+C'=0$, лежит на линии, выражаемой уравнением

$$(Ax+By+C)(A'x+B'y+C')=0.$$

Пример.

$$x+2y=0$$
$$x-2y-1=0.$$

Произведение равно $x^2-4y^2-x-2y=0$.

Координаты любой точки, например (2,—1) лежащей на линии $x+2y=0$, обращают левую часть в нуль, так как $2-2=0$, а следовательно произведение этого множителя на другой равно нулю. Таким образом все точки, лежащие на прямой $x+2y=0$, лежат на линии $x^2-4y^2-x-2y=0$. Сказанное справедливо и относительно прямой $x-2y-1=0$.

744. Уравнения второй степени, выражающие прямые линии. Уравнение, правая часть которого равна нулю, а левая часть может быть разложена на два множителя первой степени, выражает прямые линии.

Пример.

$$3x^2+10xy+8y^2=0$$

соответствует двум прямым линиям, так как левую часть его можно разложить на линейные множители

$$(3x+4y)\ (x+2y)=0.$$

Уравнения прямых суть:

$$3x+4y=0$$
$$x+2y=0.$$

Координаты всех точек этих линий удовлетворяют данному уравнению (см. n⁰ 443).

Необязательно, чтобы эти линии пересекались—они могут быть и параллельными. Так, уравнение

$$x^2+y^2+2xy+3x+3y+2=0$$

соответствует параллельным прямым

$$x+y+1=0$$
$$x+y+2=0.$$

Глава XXXII.

УРАВНЕНИЯ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ. КОНИЧЕСКИЕ СЕЧЕНИЯ. ПАРАБОЛА.

Конические сечения

745. Геометрическое место точки, движущейся так, что ее расстояние от некоторой неподвижной точки находится в постоянном отношении к расстоянию до неподвижной прямой, называется *коническим сечением.*

Неподвижная точка называется *фокусом*, а неподвижная прямая — *директрисой*. Постоянное отношение указанных выше расстояний называется *эксцентриситетом* и обозначается буквой e.

Конические сечения подразделяются на три класса:

Если $e=1$, то кривая является *параболой*.

Если $e<1$, то кривая есть *эллипс*.

Если $e>1$, то кривая есть *гипербола*.

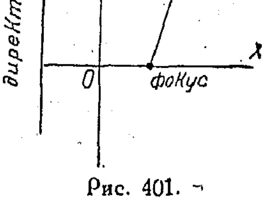


Рис. 401.

Эти кривые названы коническими сечениями по той причине, что они получаются при пересечении конуса плоскостями.

746. Уравнение любого конического сечения в прямоугольных координатах. Пусть директрисой служит ось Y, а фокусом — неподвижная точка $(p, 0)$, расположенная на оси X, и пусть $P(x, y)$ произвольная точка на кривой (рис: 402).

Согласно определению конического сечения, имеем:

$$\frac{FP}{PN} = e.$$

Пользуясь формулой [329], имеем:

$$FP = \sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$$

$$PN = x.$$

Тогда

$$e = \frac{\sqrt{(x-p)^2 + y^2}}{x}.$$

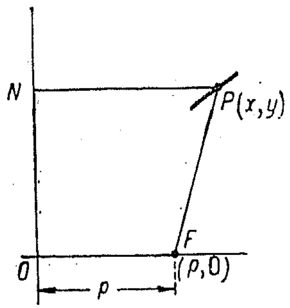


Рис. 402.

Возвышая это выражение в квадрат, получим

$$e^2 = \frac{(x-p)^2 + y^2}{x^2}.$$

[353] $$(1 - e^2)\, x^2 + y^2 - 2px + p^2 = 0.$$

Это и есть уравнение конического сечения. Чтобы найти точки пересечения кривой с осью X, положим $y = 0$, тогда

$$(1 - e^2)\, x^2 + 0 - 2px + p^2 = 0$$

или

$$x = \frac{p}{1 \pm e}.$$

747. Уравнение конического сечения в полярных координатах. На рис. 403 полюс расположен в фокусе, а ось OX является полярной осью.

Пусть $P(\rho, \theta)$ — произвольная точка, лежащая на кривой. Согласно определению конического сечения

$$OP = e \cdot PN \tag{1}$$

$$OP = \rho$$

$$PN = p + OM = p + \rho \cos \theta.$$

Подставляя значения OP и PN в ур-ние (1), имеем:

$$\rho = e\,(p + \rho\cos\theta) = ep + e\rho\cos\theta$$

$$\rho - e\rho\cos\theta = ep,$$

откуда

[354] $$\rho = \frac{ep}{1 - e\cos\theta}.$$

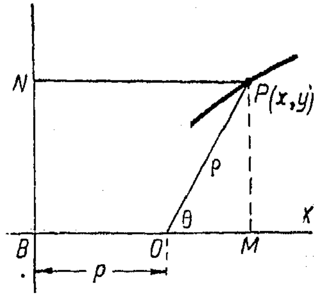


Рис. 403.

Как будет показано ниже, некоторые конические сечения имеют два фокуса и две директрисы. Уравнение, отнесенное к другому фокусу и директрисе, есть

$$\rho = \frac{ep}{1 + e\cos\theta}.$$

Парабола.

748. Уравнение параболы. Для параболы $e = 1$ поэтому кривая является геометрическим местом точек, расположенных на одинаковом расстоянии от фокуса и от директрисы.

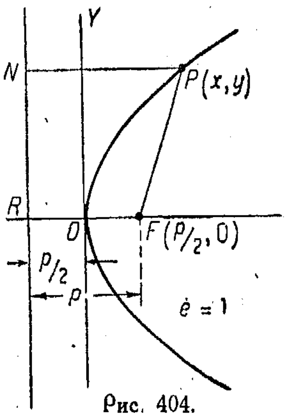


Рис. 404.

Из определения следует, что посредине между фокусом и директрисой имеется точка, в которой кривая пересекает ось X. Эта точка называется *вершиной* параболы (рис. 404).

Весьма удобно помещать начало координат в вершине, ибо уравнение кривой в этом случае принимает более простой вид.

Таким образом координатами фокуса являются

$$\left(\frac{p}{2},\ 0\right),$$

а уравнение директрисы

$$x = -\frac{p}{2},$$

где p — расстояние RF (фиг. 404).

Пусть $P(x, y)$ — произвольная точка на кривой. Согласно определению

$$FP = PN.$$

По формуле [329], дающей расстояние между двумя точками, имеем:

$$FP = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

$$PN = x + \frac{p}{2}.$$

Поэтому

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}.$$

Возвышая в квадрат и упрощая, получим

[355] $$y^2 = 2px.$$

Уравнение директрисы

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Фокус находится в точке $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

Ур-ние [355] показывает, что кривая симметрична относительно оси X и что последняя пересекается кривой только в вершине.

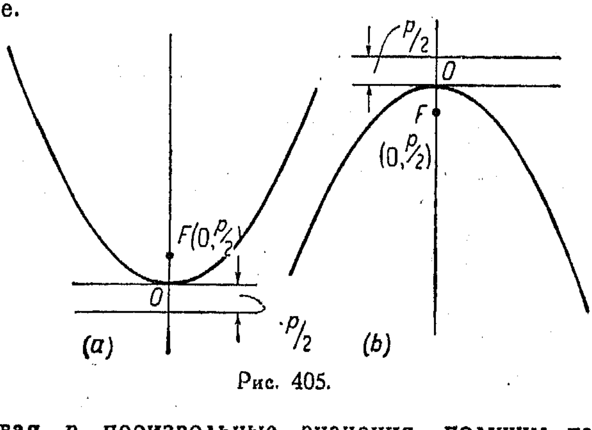


Рис. 405.

Придавая p произвольные значения, получим параболы различного вида.

Уравнение параболы, осью которой является ось Y, а вершина находится в начале координат, имеет вид (рис. 405a)

[356] $$x^2 = 2py.$$

Уравнение директрисы имеет вид:

$$y = -\frac{p}{2}.$$

Фокус находится в точке $\left(0, \frac{p}{2}\right)$.

Если p — отрицательно, то кривая обращена выпуклостью вверх (рис. 405*b*).

749. Упрощение общего уравнения конического сечения. Уравнение параболы. Уравнение конического сечения [353]

$$(1-e^2)x^2 + y^2 - 2px + p^2 = 0$$

в случае, когда $e=1$, т. е. когда кривая есть парабола, обращается в следующее:

$$y^2 = 2px - p^2$$

или, иначе,

$$y^2 = 2p\left(x - \frac{p}{2}\right).$$

Перенесем начало координат в точку $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, тогда

$$x = x' + \frac{p}{2}, \quad y = y'.$$

Подставляя в полученное выше уравнение, имеем:

$$y'^2 = 2p\left(x' + \frac{p}{2}\right) - p^2$$

$$y'^2 = 2px'.$$

Опуская значки, имеем окончательно

$$y^2 = 2px, \quad [355]$$

которое и является уравнением параболы.

750. Latus rectum. Хорда LL_1 (рис. 406), проведенная через фокус и параллельная директрисе, называется *Latus rectum*.

Из определения параболы следует, что расстояния L от фокуса и от директрисы равны между собой и в данном случае равны p. Общая длина *Latus rectum* равна $2p$.

751. Парабола и квадратное уравнение. В отделе алгебры (n^0 169 и след.) очень большое внимание уделялось коническим сечениям вообще, а особенно параболе. Ее отношение к функциям второй и высших степеней уже рассматривалось в указанных n⁰. Поэтому рекомендуется, прежде чем переходить к дальнейшему, вновь просмотреть их.

Особенно важное значение имеет n⁰, где рассматривается перенесение осей и начала координат, так как сказанное там приложимо и ко всем коническим сечениям.

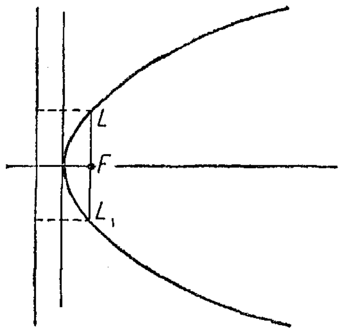


Рис. 406.

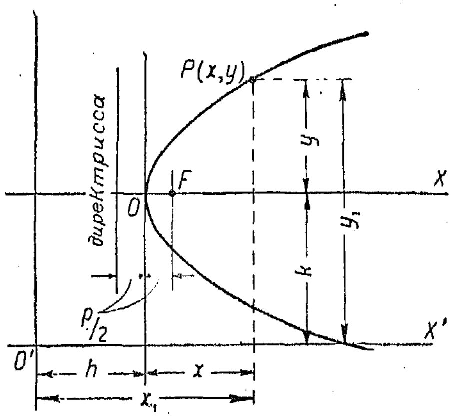


Рис. 407.

Сравнивая степенную функцию $y = ax^2$ (n⁰ 170) с уравнением $x^2 = 2py$, мы видим, что форма их одинакова, и постоянная a равна $\frac{1}{2p}$.

Перенесение осей параболы. Преобразуем уравнение $y^2 = 2px$ соответственно положению начала в точке $O'(-h-k)$ (см. n⁰ 171). Тогда

$$x = x_1 - h$$
$$y = y_1 - k.$$

Подставляя эти значения в

$$y^2 = 2px,$$

имеем:

$$(y_1 - k)^2 = 2p(x_1 - h).$$

Опуская значки, получим (рис. 407):

[357] $$(y - k)^2 = 2p(x - h).$$

Примечание. Начало координат может быть перенесено также в точку (h, k), тогда [357] будет иметь вид

$$(y + k)^2 = 2p(x + h).$$

Фокус расположен в точке $\left(h+\frac{p}{2},\ k\right)$.

Уравнение директрисы $x=h-\frac{p}{2}$ [1]).

752. Общее уравнение параболы с осью, параллельной оси X или оси Y.

Уравнения вида

$$y^2+Dx+Ey+F=0, \text{ где } D\neq 0 \quad (1)$$

$$x^2+Dx+Ey+F=0, \text{ где } E\neq 0 \quad (2)$$

соответствуют параболам, причем в случае (1) ось кривой параллельна оси X, а в случае (2) — оси Y.

Для доказательства дополним (1) до квадрата, тогда имеем:

$$y^2+Ey+\frac{E^2}{4}=-Dx+\frac{E^2}{4}-F$$

или

[358] $$\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=-D\left(x-\frac{E^2-4F}{4D}\right).$$

Полученное уравнение сходно с [357], причем

$$h=\frac{E^2-4F}{4D}, \quad k=-\frac{E}{2}, \ 2p=-D$$

или

$$p=-\frac{D}{2}.$$

Исследуя подобным же образом (2), имеем:

[359] $$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2=-E\left(y-\frac{D^2-4F}{4E}\right),$$

---

[1]) Координаты фокуса и уравнение директрисы относятся к ур-нию [357]. Они выводятся из соответствующего уравнения директрисы

$$x=-\frac{p}{2}$$

и координат $\left(0,\ \frac{p}{2}\right)$ фокуса параболы

$$y^2=2px$$

с помощью преобразования

$$x=x_1-h$$
$$y=y_1-k.$$

Прим. ред.

так что

$$k = \frac{D^2 - 4F}{4E}, \quad h = -\frac{D}{2}, \; 2p = -E.$$

Расстояние от фокуса до директрисы

$$p = -\frac{E}{2}.$$

753. Функция второй степени $y = ax^2 + bx + c$ [3]. Это уравнение можно привести к виду [357]. В самом деле,

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

или

[360] $$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(y + \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right).$$

Здесь, очевидно

$$h = -\frac{b}{2a}, \quad k = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Полученное уравнение соответствует параболе, так как приводится к виду [357].

Вершина кривой лежит в точке (h, k) или

$$\left(-\frac{b}{2a}, \; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right).$$

Указанный вид уравнения уже рассматривался в отделе алгебры (n^0 171 и след.). Там же обсуждался вопрос о перенесении начала координат. Таким образом повторный просмотр указанных nn^0 будет способствовать большей ясности и даст возможность в этом месте избежать ненужных повторений. Трактовка всего вопроса в алгебре мотивировалась желанием уяснить графические соотношения.

754. Уравнение параболы в полярных координатах (рис. 408). Для параболы $e = 1$, так что, подставляя это значение e в уравнение

$$\rho = \frac{ep}{1 - e\cos\theta}, \quad [354]$$

получим

[361] $$\rho = \frac{p}{1 - \cos\theta}.$$

755. Построение параболы. Приведем доказательство правильности метода построения параболы, указанного в n⁰ 180.

На рис. 409

$$x = M'P;\quad y = OM'$$
$$AB = 2a;\quad OH = h.$$

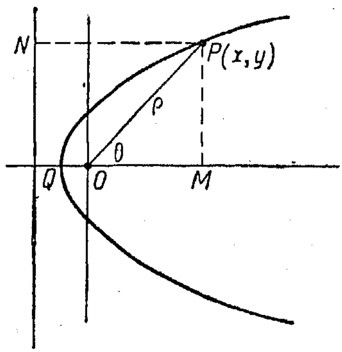


Рис. 408.

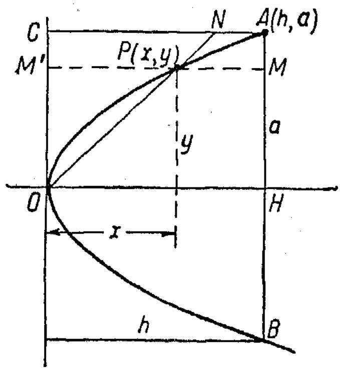


Рис. 409.

По построению NC и MH суть равные части AC и AH, соответственно.

Поэтому

$$\frac{NC}{AC} = \frac{MH}{AH} \quad \text{или} \quad \frac{NC}{h} = \frac{y}{a}. \tag{1}$$

Из подобия треугольников

$$\frac{x}{y} = \frac{NC}{OC} = \frac{NC}{a}. \tag{2}$$

Но из (1) $NC = \frac{hy}{a}$. Подставляя это выражение в (2), имеем:

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{hy}{a}}{\frac{a}{1}} \quad \text{или } y^2 = \frac{a^2}{h}\,x.$$

Это уравнение есть уравнение параболы.

756. Траектория снаряда. Рассмотрим движение снаряда, выпущенного из начала координат с начальной скоростью V *м/сек*, под углом α к горизонту (рис. 410).

Если бы на снаряд не действовали никакие другие силы, например давление ветра или сила тяжести, то он двигался бы с первоначальной скоростью в ее направлении.

В конце промежутка времени t секунд снаряд должен был бы находиться в положении, определяемом координатами

$$x = tV\cos\alpha$$

$$y = tV\sin\alpha.$$

Если же принять во внимание силу тяжести, то y будет уменьшаться на величину $\frac{1}{2}gt^2$ (за t секунд).

Таким образом координаты снаряда в конце t секунд будут:

$$x = tV\cos\alpha \tag{1}$$

$$y = tV\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2. \tag{2}$$

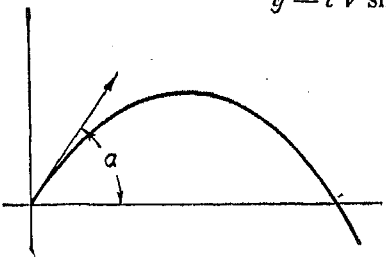


Рис. 410.

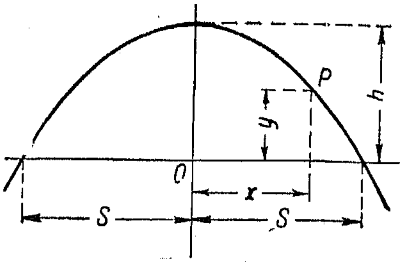


Рис. 411.

Исключая из этих уравнений время t путем подстановки его величины из (1)

$$t = \frac{x}{V\cos\alpha}$$

в ур-ние (2), имеем:

$$y = \frac{x}{V\cos\alpha}\,V\sin\alpha - \frac{g}{2}\cdot\frac{x^2}{V^2\cos^2\alpha}.$$

Упрощая, находим:

$$y = (\operatorname{tg}\alpha)\,x - \frac{g}{2V^2\cos^2\alpha}\,x^2.$$

Последнее уравнение соответствует параболе рассмотренного в n^0 752 (2) вида.

757. Параболический свод. Уравнение параболы вида, изображенного на рис. 411, с началом координат, помещенном в вершине кривой, будет

$$x^2 = -2py.$$

Так как высоты свода удобнее измерять, как показано на рисунке, то перенесем начало координат в точку O.

Тогда

$$y = y' - h.$$

Подставляя в предыдущее уравнение и опуская значки, имеем

$$x^2 = -2p(y - h),$$

если $x = s$, то $y = 0$, следовательно

$$s^2 = -2p(0 - h)$$

$$s^2 = 2ph$$

$$p = \frac{s^2}{2h}.$$

Взяв определенные значения для h и s и подставив их в полученное уравнение, можем определить значения и для различных значений x. Таким образом уравнение кривой свода будет иметь вид

$$x^2 = -\frac{s^2}{h}(y - h)$$

или

$$y = h - \frac{hx^2}{s^2}.$$

Графический метод построения см. n⁰ 180.

Глава XXXIII.

ОКРУЖНОСТЬ И ЭЛЛИПС.

758. Окружность. Окружностью называется геометрическое место точек, равноотстоящих от некоторой постоянной точки, называемой центром.

Обозначим координаты центра через (h, k), а радиус — через r.

Расстояние между двумя точками находится по формуле [329], поэтому (рис. 412)

$$CP = r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}.$$

Возвышая обе части равенства в квадрат, получим:

[362] $$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2.$$

Это и есть уравнение окружности.

Если $h=0$ и $k=0$, т. е. начало координат расположено в центре, то

$$(x-0)^2+(y-0)^2=r^2$$

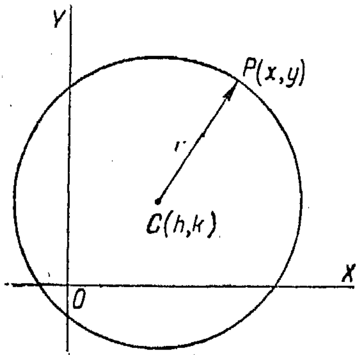


Рис. 412.

или

$$x^2+y^2=r^2. \quad [19]$$

Полученное уравнение является уравнением окружности, центр которой расположен в начале координат.

Раскрывая скобки в выражении $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, имеем:

$$x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+ \\ +k^2-r^2=0.$$

Сравнивая полученное с общим уравнением второй степени

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$

замечаем, что член, содержащий xy, в нем отсутствует, а коэффициенты при x^2 и y^2 равны между собой.

Таким образом, *общее уравнение* окружности имеет вид:

[363] $$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$$

Координаты центра и радиус определяются из

$$h=-\frac{D}{2},\quad k=-\frac{E}{2},\quad r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}.$$

Если $D^2+E^2-4F>0$, то уравнение соответствует окружности.

Если же $D^2+E^2-4F=0$, то радиус равен нулю, так что уравнению соответствует точка.

В случае, когда $D^2+E^2-4F<0$, радиус — величина мнимая, окружность также мнимая.

Если $D=0$, то $h=0$, т. е. центр лежит на оси Y.

Если $E=0$, то $k=0$ и центр лежит на оси X.

Если $D=0$ и $E=0$, то центр лежит в начале координат.

Если $F=0$, то $h^2+k^2=r^2$, т. е. начало координат лежит на окружности.

759. Определение окружности. В каждом из уравнений [362] и [363] имеются три произвольных постоянных, а именно: h, k и r в первом случае и D, E и F во втором. Таким образом, чтобы написать уравнение окружности, необходимо иметь три различных условия, определяющие указанные постоянные. Эти условия могут иметь либо геометрический характер, либо могут быть выражены в алгебраической форме, причем тогда из [362] и [363] получим систему уравнений, посредством которых удается выяснить значения искомых постоянных.

Пример 1. Найти уравнение окружности, проходящей через точки (1, 7), (8, 6) и (7, —1).

Каждая пара координат должна удовлетворять уравнению окружности [362], поэтому имеем:

$$(1-h)^2+(7-k)^2=r^2$$
$$(8-h)^2+(6-k)^2=r^2$$
$$(7-h)^2+(-1-k)^2=r^2.$$

Решая эти уравнения совместно, находим:

$$h=4,\ k=3,\ r=5.$$

Отсюда видно, что искомое уравнение будет иметь вид

$$(x-4^2)+(y-3)^2=5^2$$

или

$$x^2+y^2-8x-6y=0.$$

Пользуясь общей формой уравнения окружности [363] и подставляя в него координаты данных точек, найдем:

$$1+49-D+7E+F=0$$
$$64+36+8D+6E+F=0$$
$$49+1+7D-E+F=0.$$

Решая эти уравнения совместно, получим:

$$D=-8,\ E=-6,\ F=0.$$

Подставляем в [363]

$$x^2+y^2-8x-6y=0,$$

как и ранее.

Пример 2. Найти уравнение окружности, центр которой лежит на линии $2x+3y=0$ и проходящей через точки P_1 (0, —4) и P_2 (4, 0).

Пусть искомое уравнение имеет вид

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$$

Так как точки P_1 и P_2 принадлежат кривой, то их координаты должны удовлетворять ее уравнению.

Имеем:

$$0+16+0-4E+F=0$$
$$16+0+4D-0+F=0.$$

Центр окружности имеет координаты $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ и лежит на прямой $2x+3y=0$. Подставляя в это уравнение указанные координаты центра, получим:

$$2\left(-\frac{D}{2}\right)+3\left(-\frac{E}{2}\right)=0 \text{ или } 2D+3E=0.$$

Решаем совместно уравнения

$$16-4E+F=0$$
$$16+4D+F=0$$
$$2D+3E\qquad=0,$$

откуда

$$E=0,\ F=-16,\ D=0$$

и ур-ние [363] обращается в следующее:

$$x^2+y^2=16.$$

Здесь радиус равен 4, а центр лежит в начале координат.

760. Уравнение окружности в полярных координатах (рис. 413). Пусть OA — полярная ось, O — полюс и пусть центр C имеет координаты (ρ_1, θ_1).

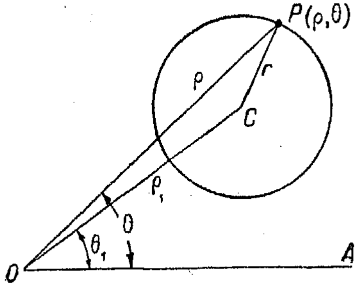


Рис. 413.

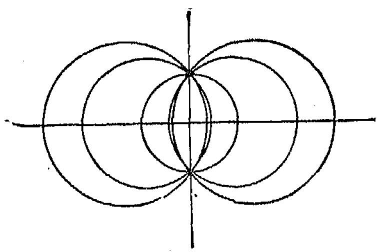


Рис. 414.

В этом случае уравнение окружности будет:

[364] $$\rho^2-2\rho\rho_1\cos(\theta-\theta_1)+\rho_1^2-r^2=0\ ^{1)}.$$

Если центр лежит на полярной оси, то имеем:

[365] $$\rho^2-2\rho\rho_1\cos\theta+\rho_1^2-r^2=0.$$

1) Ур-ние [364] получается из рассмотрения $\triangle\ OPC$ (рис. 413). Выражая сторону PC через стороны PO и OC, по известной тригонометрической формуле получаем

$$r^2=\rho^2+\rho_1^2-2\rho\rho_1\cos(\theta-\theta_1).$$

Прим. ред.

Если полюс лежит на окружности, то

[366] $$\rho - 2r\cos(\theta - \theta_1) = 0.$$

Если полюс лежит на окружности, а полярная ось является диаметром, то найдем

[367] $$\rho - 2r\cos\theta = 0.$$

Наконец, если центр лежит в полюсе, то

$$\rho = r.$$

761. Системы окружностей (рис. 414). Если $f(x, y) = 0$ и $g(x, y) = 0$ суть уравнения двух окружностей, то, согласно n^0 (74),

$$f(x, y) + k[g(x, y)] = 0$$

является уравнением геометрического места точек, проходящего через точки пересечения данных окружностей.

Это геометрическое место представляет собой либо окружность, либо прямую, являющуюся общей хордой окружностей. Пусть

$$f(x, y) = A_1x^2 + A_1y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$$
$$g(x, y) = A_2x^2 + A_2y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0.$$

В таком случае уравнение

$$f(x, y) + k[g(x, y)] = 0$$

примет вид

[368] $$A_1x^2 + A_1y^2 + D_1x + E_1y + F_1 + k[A_2x^2 + A_2y^2 + D_2x + E_2y + F_2] = 0,$$

откуда

$$(A_1 + kA_2)x^2 + (A_1 + kA_2)y^2 + (D_1 + kD_2)x + (E_1 + kE_2)y + (F_1 + kF_2) = 0.$$

Так как коэффициенты при x^2 и y^2 равны, а член xy отсутствует, то полученное уравнение соответствует окружности.

Исключением явится случай, когда коэффициенты при квадратах неизвестных обращаются в нуль. В этом случае уравнение будет соответствовать прямой, которая является общей хордой данных окружностей.

Последним обстоятельством можно легко воспользоваться для нахождения общей хорды, так как, придавая k значение

$$k = -\frac{A_1}{A_2},$$

получим уравнение, в котором члены с x^2 и y^2 исчезнут и полученное уравнение, удовлетворяющееся координатами точек пересечения двух окружностей, соответствует прямой, проходящей через эти точки, т. е. общей хорде.

Пример 1. Пусть имеем два общих уравнения окружностей (рис. 415)

$$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$$
$$x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0.$$

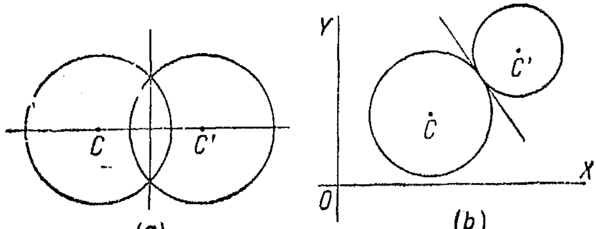


Рис. 415.

Положив $k = -1$ или, что то же самое, вычтя второе уравнение из первого, получим:

$$(D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)\, y + F_1 - F_2 = 0.$$

Это и будет уравнение общей хорды двух данных окружностей.

Если окружности касаются, то прямая, выражаемая последним уравнением, есть их общая касательная.

Пример 2. Найти уравнение окружности, проходящей через точку (1, 2), и пересечение окружностей

$$2x^2 + 2y^2 - 3x - 4y - 1 = 0$$
$$3x^2 + 3y^2 - 8x - y - 4 = 0.$$

Пользуясь [368], имеем:

$$2x^2 + 2y^2 - 3x - 4y - 1 + k\,(3x^2 + 3y^2 - 8x - y - 4) = 0.$$

Так как окружность проходит через точку (1, 2), то координаты последней должны удовлетворять уравнению кривой, поэтому

$$2 + 8 - 3 - 8 - 1 + k\,(3 + 12 - 8 - 2 - 4) = 0,$$

откуда

$$k = 2.$$

Искомое уравнение примет вид:

$$2x^2 + 2y^2 - 3x - 4y - 1 + 2\,(3x^2 + 3y^2 - 8x - y - 4) = 0$$

или

$$8x^2 + 8y^2 - 19x - 6y - 9 = 0.$$

762. Длина касательной (рис. 416). Обозначим буквой t длину касательной TP_0 к окружности с центром $C(h, k)$ и радиусом r.

Из прямоугольного треугольника CTP_0

$$t^2 = CP_0{}^2 - r^2.$$

Пользуясь формулой [329], имеем:

$$t^2 = (x_0 - h)^2 + (y_0 - k)^2 - r^2$$

[369] $$t = \sqrt{(x_0 - h)^2 + (y_0 - k)^2 - r^2}.$$

Заметим, что подкоренное выражение здесь точно такое же, как в [362], но вместо переменных x и y подставлены координаты точки $P(x_0, y_0)$. Вследствие сказанного можно написать под знаком радикала общее выражение, стоящее в правой части уравнения [363], тогда получим:

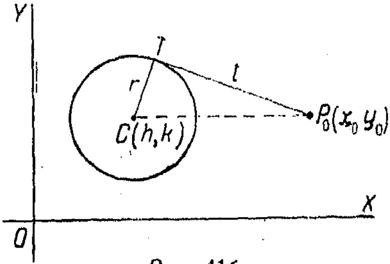


Рис. 416.

[370] $$t = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + \frac{D}{A}x_0 + \frac{E}{A}y_0 + \frac{F}{A}}.$$

Пример. Найти длину касательной, проведенной к окружности $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ из точки (5,6).

Из [370] имеем:

$$t = \sqrt{5^2 + 6^2 - 4 \cdot 5 + 6 \cdot 6 - 3} = \sqrt{74}.$$

763. Эллипс. Из n° 745 нам уже известно, что если отношение e меньше единицы, то коническое сечение есть *эллипс*.

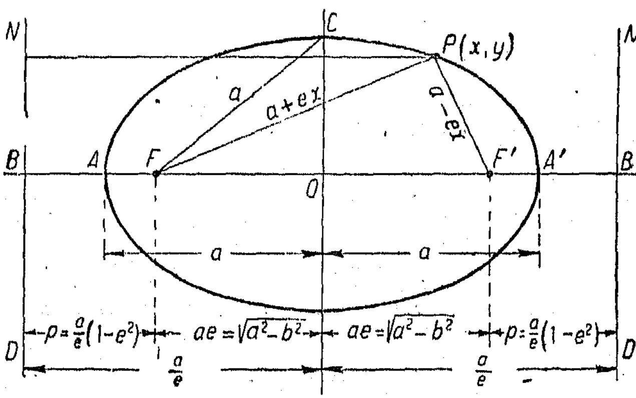


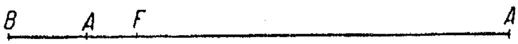
Рис. 417.

764. Уравнение эллипса (рис. 417). Пусть $P(x, y)$ — произвольная точка кривой, тогда

$$FP = e\,NP,$$

где F — фокус, ND — директриса.

Разделим FB точкой A внутренним образом (см. n⁰ 717), а точкой A' — внешним образом в отношении $e:1$, тогда



$$\frac{FA}{AB} = e, \quad FA = e \cdot AB \tag{1}$$

$$\frac{FA'}{A'B} = -e, \quad FA' = e\,BA'. \tag{2}$$

Поместим начало координат посредине между A и A'. Вычитая (1) из (2), найдем:

$$FA' - FA = e(BA' - AB)\ ^{1)}$$
$$AF + FA' = e(BA + BA') \tag{*}$$
$$AA' = e(BA + BA + AO + OA').$$

Полагая $AA' = 2a$, получим:

$$2a = e\,(2\,BA + 2AO) = e\,(2 \cdot BO)$$
$$BO = \frac{a}{e}.$$

---

1) При рассмотрении отрезков, расположенных по оси, принято приписывать отрезкам направления. Приписывая направление отрезку, рассматривают на ряду с длиной и величину отрезка. Под величиной отрезка понимается его длина, если направление отрезка одинаково с направлением оси, и длина, взятая со знаком минус, если направление отрезка противоположно направлению оси. В рассматриваемых формулах знаками $F'A$, AB, FA', $A'B$ обозначены величины отрезков. При этом первая буква соответствует началу отрезка, а вторая — его концу. При таком обозначении перестановка букв соответствует изменению направления отрезка и изменяет знак величины отрезка.

Например

$$FA = -AF.$$

Последнее следует иметь в виду при рассмотрении равенств (*).

Прим. ред

Прибавим (1) к (2), тогда

$$FA+FA'=e(AB+BA')$$

$$2\cdot OF=eAA'=2ae,$$

т. е.

$$OF=ae.$$

Примем O за начало координат, а OB и OC — за оси X и Y. Согласно рисунку, координаты фокуса F будут $(-ae, 0)$.

Из соотношения

$$PF=e\ NP,\ NP=x+BO,$$

возвышая в квадрат, имеем:

$$\overline{PF}^2=e^2\overline{NP}^2=e^2\left(x+\frac{a}{e}\right)^2. \tag{3}$$

Из формулы [329]

$$\overline{PF}^2=(x+ea)^2+y^2. \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует, что

$$(x+ea)^2+y^2=e^2\left(x+\frac{a}{e}\right)^2$$

или

$$(1-e^2)\,x^2+y^2=a^2(1-e^2). \tag{5}$$

Мы можем найти отрезок, отсекаемый кривой на оси Y, т. е. меньшую полуось b, положив $x=0$ и $y=b$. Подставив полученные значения x и y в ур-ние (5), получаем:

$$b^2=a^2\,(1-e^2)\ \text{или}\ (1-e^2)=\frac{b^2}{a^2}.$$

Подставляя это значение $(1-e^2)$ в ур-ние (5), найдем

$$\frac{b^2}{a^2}x^2+y^2=b^2.$$

Деля на b^2:

[371] $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Это и есть основное уравнение эллипса.

765. Другие соотношения. Из рис. 417 имеем:

$$\overline{CF}^2=\overline{CO}^2+\overline{OF}^2.$$

$\overline{CO}^2$ — квадрат малой полуоси $=a^2\ (1-e^2)$

$\overline{OF}^2 = a^2e^2$, поэтому координаты фокуса будут $(-ae, 0)$
$\overline{CF}^2 = a^2(1-e^2) + a^2e^2 = a^2 - a^2e^2 + a^2e^2 = a^2$, т. е. $CF = a$.

Итак, чтобы определить положение фокуса, если даны длины большей и меньшей полуосей, следует сделать на оси засечки радиусом a из центра C. Пересечение соответствующих дуг с осью X определит положение фокусов.

Так как $b^2 = a^2(1-e^2) = a^2 - a^2e^2$, то

$$a^2e^2 = a^2 - b^2 \text{ и } ae = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$$

$$p = \frac{a}{e} - ae = a\left(\frac{1}{e} - e\right) = \frac{a}{e}(1-e^2).$$

Фокус F' лежит в точке $(ae, 0)$; фокус F — в точке $(-ae, 0)$.

Примечание. $ae = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$.

Уравнение директрисы ND:

$$x = -\frac{a}{e}.$$

Уравнение директрисы $N'D'$:

$$x = \frac{a}{e}.$$

Заметим, кроме того, что $\dfrac{a}{e} = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$.

Уравнение эллипса можно представить в форме

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1.$$

766. Второй фокус и директриса. Возьмем $F'A' = AF$ и $OB' = BO$.

$N'B'$ параллельна NB; PN' перпендикулярна к $N'B'$. Таким образом

$$F'P = e\,PN'$$

или

$$\sqrt{(ae-x)^2 + y^2} = e\left(\frac{a}{e} - x\right) = a - ex.$$

Возвышая в квадрат, имеем:

$$(ae-x)^2 + y^2 = a^2 - 2aex + e^2x^2$$

$$a^2e^2 - 2aex + x^2 + y^2 = a^2 - 2aex + e^2x^2$$

$$(1-e^2)x^2 + y^2 = a^2(1-e^2).$$

Последнее уравнение совпадает с (5), полученным в n⁰ 764, следовательно его можно привести к виду

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Таким образом уравнение эллипса остается тем же, независимо от того, к которому фокусу и директрисе он отнесен.

767. Уравнение конического сечения, приводимое к уравнению эллипса. Общее уравнение конических сечений имеет вид:

$$(1-e^2)x^2+y^2-2px+p^2=0,$$

причем оно отнесено к системе, в которой LD (рис. 417) является осью Y, а точка B — началом координат.

Разделив написанное выше уравнение на $(1-e^2)$ и дополняя до полного квадрата, имеем:

$$\left(x-\frac{p}{1-e^2}\right)^2+\frac{y^2}{1-e^2}=\frac{p^2e^2}{(1-e^2)^2}.$$

Кроме того, из рис. 417 следует, что

$$p=\frac{a}{e}-ae=\frac{a}{e}(1-e^2)$$

или

$$\frac{p}{1-e^2}=\frac{a}{e}.$$

Поэтому наше уравнение можно переписать так:

$$\left(x-\frac{a}{e}\right)^2+\frac{y^2}{1-e^2}=a^2.$$

Перенося теперь начало координат из точки B в точку O с координатами $\left(\frac{a}{e}, 0\right)$, приведем уравнение к форме

$$x'^2+\frac{y^2}{1-e^2}=a^2$$

или

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1$$

или

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Для нахождения величины p поступаем так:

$$p=\frac{a}{e}(1-e^2)=\frac{b^2}{ae}.$$

Но

$$ae=\sqrt{a^2-b^2}.$$

таким образом

$$p=\frac{b^2}{ae}=\frac{b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

Это можно вывести иначе:

$$\frac{p^2e^2}{1-e^2}=b^2 \text{ [1]}$$

$$p^2=\frac{b^2}{e^2}(1-e^2),\quad p=\frac{b}{e}\sqrt{1-e^2}=\frac{b^2}{ae}=$$

$$=\frac{b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

Следует отметить, что $a^2(1-e^2)=b^2$ и стало быть

$$1-e^2=\frac{b^2}{a^2}.$$

768. Эксцентриситет e в зависимости от коэффициентов членов общего уравнения. Из n⁰ 765

$$e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}.$$

---

[1]) Равенство

$$\frac{p^2e^2}{1-e^2}=b^2$$

получается сразу из уравнения

$$\left(x-\frac{p}{1-e^2}\right)^2+\frac{y^2}{1-e^2}=\frac{p^2e^2}{(1-e^2)^2},$$

если заметить, что b есть ордината эллипса, соответствующая точке O. Положив

$$x=\frac{p}{1-e^2},$$

находим

$$\frac{b^2}{1-e^2}=\frac{p^2e^2}{(1-e^2)^2},$$

откуда и следует указанная формула.

Прим. ред.

Если $A < C$, то имеем:

$$e^2 = \frac{\dfrac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4A^2C} - \dfrac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4AC^2}}{\dfrac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4A^2C}}$$

(см. n° [772]).

Производя преобразования, найдем:

$$e^2 = \frac{C[CD^2 + AE^2 - 4\ ACF] - A\ [CD^2 + AE^2 - 4\ ACF]}{C[CD^2 + AE^2 - 4ACF]} =$$

$$= \frac{C - A}{C},$$

т. е.

$$e = \sqrt{\frac{C-A}{C}} \text{ или } 1 - e^2 = \frac{A}{C}.$$

Предполагается, что C — коэффициент при y^2 больше, чем коэффициент A при x^2. Бо̀льшая ось направлена по оси X.

Если же $A > C$, то бо̀льшая ось направлена по оси Y, причем

[372] $$e = \sqrt{\frac{A-C}{A}},$$

откуда

$$1 - e^2 = \frac{C}{A}.$$

Пример. Найти эксцентриситет e из уравнения

$$x^2 + 4y^2 = 16$$

$$A = 1,\ C = 4$$

$$e = \sqrt{\frac{C-A}{C}} = \sqrt{\frac{4-1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

769. Фокальные радиусы (радиусы-векторы). Из определения эллипса или из соотношений, выведенных в n° 764, имеем (рис. 417):

$$PF = e\,PN = e\left(\frac{a}{e} + x\right). \qquad (1)$$

Кроме того, из n⁰ 766

$$PF' = e\,PN' = e\left(\frac{a}{e} - x\right). \qquad (2)$$

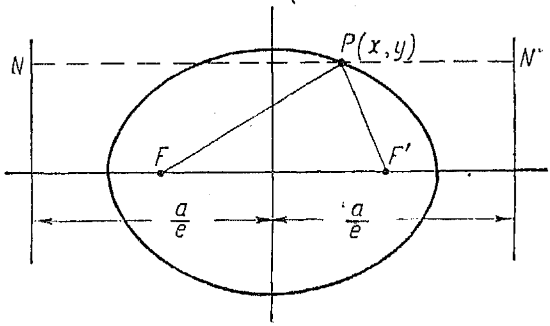


Рис. 418.

Складывая (1) и (2), получим:

$$PF + PF' = e\left(\frac{a}{e} + x\right) + e\left(\frac{a}{e} - x\right) = 2a.$$

Таким образом сумма расстояний от любой точки эллипса до фокусов есть величина постоянная и равна большой полуоси (рис. 418).

770. Случай, когда большая ось направлена по оси Y. Если заменить x на y и y на x, то

$$[373] \qquad \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Эллипс в этом случае будет иметь вид, показанный на рис. 419.

Координаты точек пересечения кривой с осью Y будет

$$(0, a) \text{ и } (0, -a).$$

Координаты точек пересечения с осью X

$$(b, 0) \text{ и } (-b, 0).$$

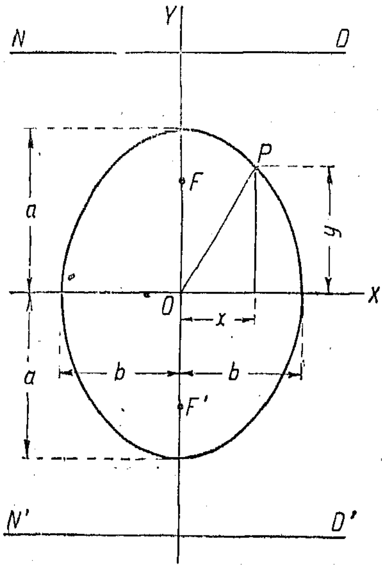


Рис. 419.

Координаты фокуса $F\ (0, ae)$; фокус F' находится в точке $(0, -ae)$. Уравнение директрисы ND

$$y = \frac{a}{e}.$$

Уравнение директрисы $N'D$

$$y = -\frac{a}{e}.$$

771. Уравнение эллипса, оси которого параллельны осям координат, но не совпадают с ними (рис. 420). Если начало

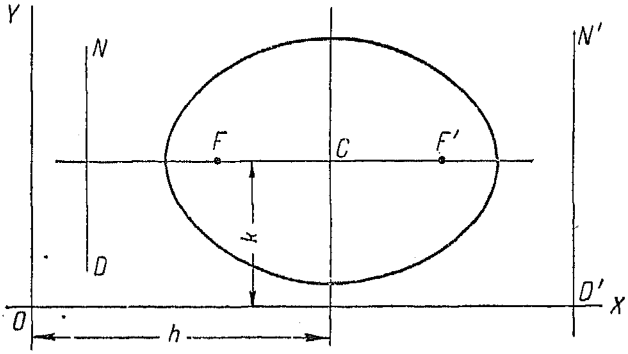


Рис. 420.

координат перенесено из центра эллипса в точку $(-h, -k)$, то первоначальное уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

примет вид

[374] $$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

Примечание. Начало координат может быть перенесено и в точку (h, k), причем получим уравнение

$$\frac{(x+h)^2}{a^2} + \frac{(y+k)^2}{b^2} = 1.$$

Найденная форма основного уравнения эллипса является более общей.

В разбираемом случае центр находится в точке (h, k). Уравнения осей эллипса суть: $x = h$, $y = k$.

Фокус F находится в точке $(h-ae,\ k)$ или в $(h-\sqrt{a^2-b^2},\ k)$. Фокус F' лежит в точке $(h+ae,\ k)$ или в $(h+\sqrt{a^2-b^2},\ k)$.

Уравнение директрисы ND:

$$x=h-\frac{a}{e}$$

или

$$x=h-\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

Уравнение директрисы $N'D'$:

$$x=h+\frac{a}{e}$$

или

$$x=h+\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

Таким образом приведение уравнения к виду

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

соответствует простому дополнению до квадрата членов, содержащих x и y.

772. Форма $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$. Это уравнение выражает эллипс с осями, параллельными осям координат. В этом случае координаты A и C имеют одинаковые знаки, но различны по величине.

Дополняя квадраты членов с x и y имеем:

$$A\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+C\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2=\frac{CD^2+AE^2-4ACF}{4AC}.$$

Разделив на правую часть уравнения, найдем:

[375] $$\frac{\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2}{\frac{CD^2+AE^2-4ACF}{4A^2C}}+\frac{\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2}{\frac{CD^2+AE^2-4ACF}{4AC^2}}=1.$$

Если $A>C$, то уравнение имеет вид

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1,$$

т. е. большая ось направлена по оси Y. Сравнивая ур-ние [375] с уравнением эллипса [371], видим, что

$$h=-\frac{D}{2A}, k=-\frac{E}{2C}$$

$$a^2=\frac{CD^2+AE^2-4ACF}{4A^2C}$$

$$b^2=\frac{CD^2+AE^2-4ACF}{4AC^2}.$$

Если $A>C$, то поставим a^2 и b^2 одно вместо другого и получим уравнение вида

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1.$$

Итак, уравнение

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

может быть преобразовано к одной из форм

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ или } \frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$$

путем перенесения начала в точку

$$\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right).$$

Пример. $4x^2+9y^2-16x+18y-11=0.$

Объединяя члены с x и y и дополняя до квадрата, получим

$$4x^2-16x+16+9y^2+18y+9=11+16+9$$

или

$$4(x-2)^2+9(y+1)^2=36,$$

откуда

$$\frac{(x-2)^2}{3^2}+\frac{(y+1)^2}{2^2}=1,$$

$$a^2=9, a=3, b^2=4, b=2, h=2, k=-1, ae=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5}.$$

Фокус F находится в точке $(h-ae, k)$, т. е. в данном случае в точке $(2-\sqrt{5}, -1)$.

Фокус F' — в точке $(h+ae, k)$ или в $(2+\sqrt{5}, -1)$.

Уравнения директрис

$$x=2-\frac{9}{\sqrt{5}} \text{ и } x=2+\frac{9}{\sqrt{5}}.$$

773. Случай, когда бо́льшая ось параллельна оси Y и начало расположено не в центре (рис. 421). Уравнение принимает форму

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1.$$

Центр эллипса лежит в точке (h, k).

Уравнение большей оси: $x=h$.

Фокус F расположен в точке $(h, k+ae)$ или в $(h, k+\sqrt{a^2-b^2})$.

Фокус F' лежит в точке $(h, k-ae)$ или $(h, k-\sqrt{a^2-b^2})$.

Уравнение директрисы ND:

$$y=k-\frac{a}{e} \quad \text{или} \quad y=k-\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

Уравнение директрисы $N'D'$:

$$y=k+\frac{a}{e} \quad \text{или} \quad y=k+\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}},$$

где b — меньшая полуось, параллельная оси X.

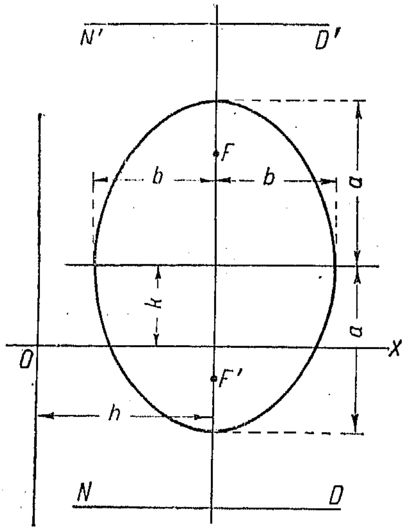


Рис. 421.

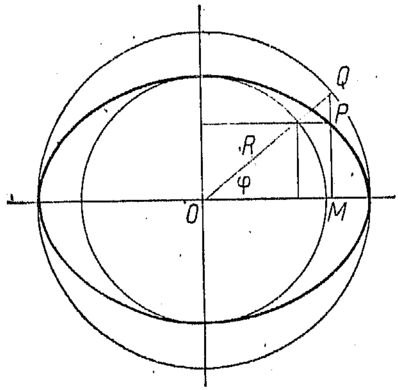


Рис. 422.

774. Эксцентрический угол (эксцентрическая аномалия). Окружности, построенные на большой и малой осях эллипса как на диаметрах, называются *вспомогательными* окружностями (рис. 422).

Уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Уравнение окружности, построенной на большей оси:

$$x^2+y^2=a^2.$$

Уравнение окружности, построенной на меньшей оси:

$$x^2+y^2=b^2.$$

Пусть φ — центральный угол, образованный неподвижной стороной, расположенной на оси X, и подвижной — пересекающей окружности в точках R и Q. Проведем RP и QP параллельно осям X и Y и отметим их точку пересечения P. Получаем:

$$OM=OQ\cos\varphi \text{ и } MP=OR\sin\varphi$$

$$x=a\cos\varphi \text{ и } y=b\sin\varphi.$$

Подставляя эти значения x и y в уравнение эллипса, найдем.

$$\frac{a^2\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{b^2\sin^2\varphi}{b^2}=\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1.$$

Точка P лежит на эллипсе.

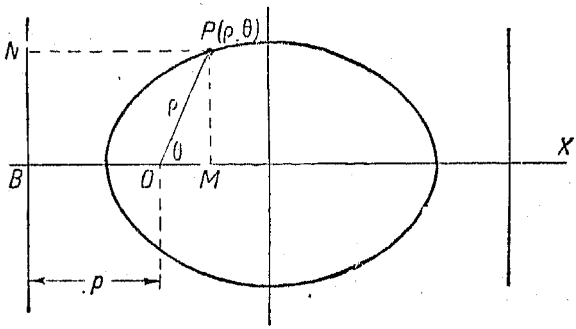


Рис. 423.

775. Уравнение эллипса в полярных координатах (рис. 423). Если $e<1$, то уравнение (см. n° 747)

$$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$$

соответствует эллипсу.

Для других фокуса и директрисы имеем:

$$\rho = \frac{ep}{1 + e\cos\theta}. \qquad [376]$$

Если $\theta = 90°$, то величина 2ρ равна длине фокальной хорды, перпендикулярной к оси. Имеем:

$$p = \frac{a}{e}\left(1 - e^2\right); \cos\theta = 0.$$

Подставляя в [376], находим

$$\rho = \frac{e\,\frac{a}{e}(1 - e^2)}{1 - 0} = a(1 - e^2).$$

Умножая на a, найдем

$$a\rho = a^2(1 - e^2) = b^2$$

$$\rho = \frac{b^2}{a}$$

$$2\rho = \frac{2b^2}{a}.$$

Глава XXXIV.

ГИПЕРБОЛА.

776. В n⁰ 745, где дается определение конических сечений, указано, что если постоянное отношение e расстояний точек от фокуса к расстояниям от директрисы больше единицы, то геометрическое место таких точек называется *гиперболой* (рис. 424).

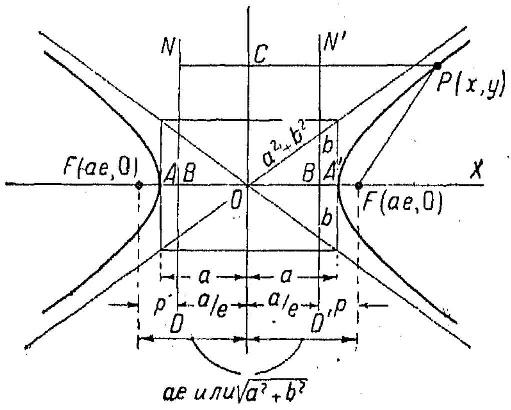


Рис. 424.

Согласно определению, линия FB делится кривой внутренним образом, причем отрезки прямой находятся в отношении $e : 1$

$$\frac{FA}{AB} = e;\ FA = e\,AB.$$

Кроме того, гипербола делит FB, внешним образом пересекая ее продолжение в точке A', причем абсолютная величина отношения отрезков остается равной e.

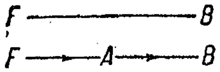


Рис. 424a.

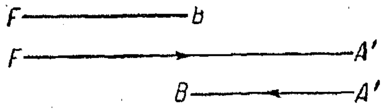


Рис. 424b.

$$\frac{FA'}{A'B} = -e$$
$$FA' = -e \cdot A'B.$$
$$FA + AA' = FA'.$$

Положим $AA' = 2a$. Тогда, как и в случае эллипса, имеем:

$$e\,AB + 2a = -e\,A'B$$
$$e\,(AB + A'B) = -2a$$
$$e\,(BA' - AB) = 2a$$
$$e\,2BO = 2a$$
$$BO = \frac{a}{e}$$

Кроме того

$$FF' = 2\,(FA + AB + BO).$$

Но

$$FF' = 2FO,\ FA = e\,AB,\ BO = \frac{a}{e},\quad AB = a - \frac{a}{e}.$$

$$2FO = 2\left(e \cdot AB + AB + \frac{a}{e}\right) = 2\,\left[e\left(a - \frac{a}{e}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(a - \frac{a}{e}\right) + \frac{a}{e}\right] = 2ae,$$

т. е.

$$FO = ae.$$

Пусть начало координат расположено в точке O и пусть осью X является OB, а осью $Y - OC$. В таком случае координаты одного фокуса будут $F(-ae, 0)$, а координаты другого фокуса $F'(ae, 0)$.

Из соотношения

$$PF' = e\,N'P,$$

справедливого для всех точек кривой, получим, возвышая его в квадрат:

$$PF'^2 = e^2 \cdot N'P^2 = e^2\left(x - \frac{a}{e}\right)^2.$$

С другой стороны, из основной формулы для расстояния между двумя точками находим:

$$PF' = (x - ae)^2 + y^2.$$

Поэтому

$$e^2\left(x - \frac{a}{e}\right)^2 = (x - ae)^2 + y^2,$$

откуда, как и в случае эллипса, получим

$$(1 - e^2)\,x^2 + y^2 = a^2(1 - e^2).$$

В случае гиперболы $e > 1$, поэтому лучше переписать уравнение в таком виде:

$$(e^2 - 1)\,x^2 - y^2 = a^2(e^2 - 1).$$

Полагая

$$b^2 = a^2(e^2 - 1) \text{ или } (e^2 - 1) = \frac{b^2}{a^2},$$

получим, подставляя в предыдущее уравнение,

$$\frac{b^2}{a^2}\,x^2 - y^2 = b^2.$$

Разделив на b^2, находим окончательно:

[377] $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Это и есть основное уравнение гиперболы. Так как

$$b^2 = a^2(e^2 - 1) = a^2e^2 - a^2,$$

то

$$a^2e^2 = a^2 + b^2 \quad \text{или} \quad ae = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Координаты фокуса F будут $(-ae, 0)$, где $ae = \sqrt{a^2 + b^2}$. Фокус F' лежит в точке $(ae, 0)$.

Уравнение директрисы ND:

$$x = -\frac{a}{e}.$$

Уравнение директрисы $N'D'$:

$$x = \frac{a}{e},$$

причем

$$\frac{a}{e} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

777. Случай, когда фокусы лежат на оси Y (рис. 425).

Если x и y поставить одно на место другого, то основное уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

в случае, когда фокусы расположены на оси Y, примет вид:

[378] $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ или $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1$.

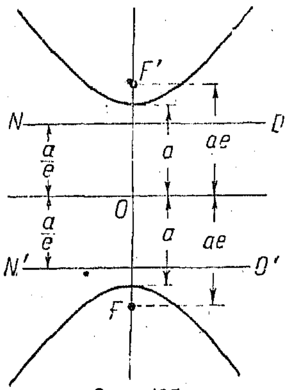


Рис. 425.

Фокус F' лежит в точке $(0, ae)$, причем $ae = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Фосус F расположен в точке $(0, -ae)$.

Уравнение директрисы ND напишется так:

$$y = \frac{a}{e},$$

где

$$\frac{a}{e} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

778. Вывод уравнения гиперболы из общего уравнения конических сечений. Общее уравнение конических сечений таково:

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 - 2px + p^2 = 0.$$

Так как в случае $e > 1$ коэффициент при x^2 — отрицателен, то имеем, меняя знак,

$$(e^2 - 1)x^2 - y^2 + 2px - p^2 = 0.$$

Деля на (e^2-1) и дополняя до квадрата сумму членов, содержащих x, найдем:

$$\left(x+\frac{p}{e^2-1}\right)^2-\frac{y^2}{e^2-1}=\frac{p^2e^2}{(e^2-1)^2}.$$

Из рис. 424 видно, что

$$p=ae-\frac{a}{e}=\frac{a}{e}\,(e^2-1)$$

или

$$\frac{p}{e^2-1}=\frac{\frac{a}{e}\,(e^2-1)}{e^2-1}=\frac{a}{e}.$$

Теперь можем переписать наше уравнение в таком виде:

[379] $$\left(x+\frac{a}{e}\right)^2-\frac{y^2}{e^2-1}=a^2.$$

Если перенести начало координат из точки B в точку O, координаты которой суть $\left(\frac{a}{e},\ 0\right)$, то уравнение обратится в следующее:

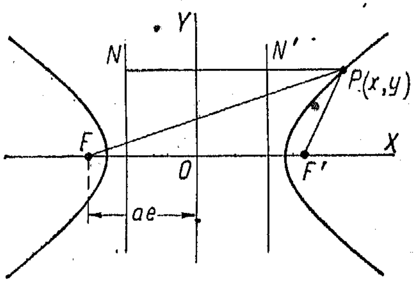


Рис. 426.

$$x'^2-\frac{y^2}{e^2-1}=a^2$$

или

$$\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(e^2-1)}=1,$$

откуда

$$\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

779. Фокальные радиусы (радиусы-векторы) (рис. 426). Из сказанного в n⁰ 776 следуют соотношения

$$PF=e\,PN=e\left(\frac{a}{e}+x\right) \tag{1}$$

$$PF'=e\,PN'=e\left(x-\frac{a}{e}\right). \tag{2}$$

Вычитая (2) из (1),

$$PF - PF' = e\left(\frac{a}{e} + x\right) - e\left(x - \frac{a}{e}\right) =$$
$$= a + ex - ex + a = 2a.$$

Таким образом разность расстояний от любой точки гиперболы до фокусов есть величина постоянная и равна длине поперечной оси, пересекающей гиперболу. Длина оси, пересекающей гиперболу, равна расстоянию между вершинами, равному $2a$.

780. Асимптоты (рис. 427). Пусть POP' — прямая, проходящая через центр гиперболы, т. е. через точку O. Прямая будет выражаться уравнением

$$y = mx.$$

Если при возрастании x точка P удаляется в бесконечность, то прямая POP', вращаясь вокруг O, будет приближаться к предельному положению AA'.

Прямые AA' и BB' называются *асимптотами*.

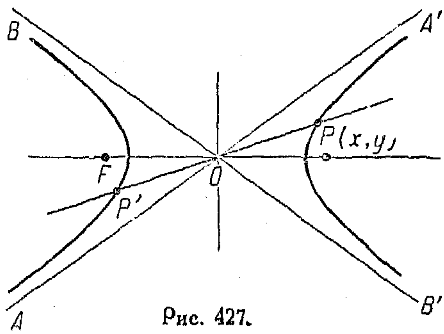


Рис. 427.

Координаты точки $P(x, y)$ должны удовлетворять уравнению гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

и уравнению прямой

$$y = mx.$$

Решая оба эти уравнения совместно, получим:

$$x = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}}.$$

Пусть теперь точка $P(x, y)$ движется по кривой, причем x обращается в бесконечность. В таком случае знаменатель полученной дроби, т. е. величина $\sqrt{b^2 - a^2m^2}$ должна приближаться к нулю.

Если $b^2 - a^2m^2 = 0$, то

$$m = \pm \frac{b}{a}.$$

Подставляя это значение m в уравнение $y = mx$, найдем:

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{и} \quad y = -\frac{b}{a}x$$

или

$$y - \frac{bx}{a} = 0 \quad \text{и} \quad y + \frac{b}{a}x = 0.$$

Это и будут уравнения асимптот.

Уравнения асимптот можно представить в той же общей форме, как и гиперболу, если объединить их в одно уравнение второй степени (см. n° 743).

Таким образом получим:

$$\left(y - \frac{b}{a}x\right)\left(y + \frac{b}{a}x\right) = 0 \quad \text{или} \quad y^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 = 0,$$

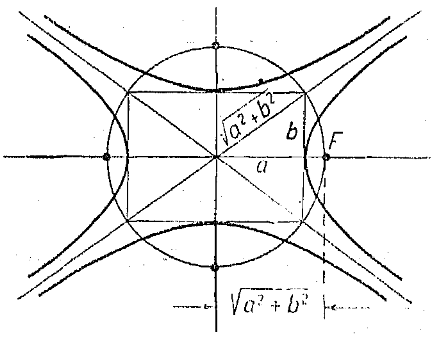


Рис. 428.

откуда

$$\frac{b^2}{a^2}x^2 - y^2 = 0.$$

Деля полученное выражение на b^2, найдем:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

781. Сопряженные гиперболы (рис. 428). Две гиперболы называются *сопряженными*, если они имеют общие оси, причем каждая ось симметрии пересекает одну из гипербол и не пересекает другую.

Если в уравнении гиперболы отсутствуют члены, содержащие переменные в первой степени, то уравнение сопряженной кривой находится путем перемены знаков при x^2 и y^2 в данном уравнении на обратные.

Так например, если имеется

$$16x^2 - y^2 = 16,$$

то уравнение сопряженной гиперболы будет:

$$y^2 - 16x^2 = 16.$$

Таким образом

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ и } \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

выражают сопряженные гиперболы.

782. Преобразование уравнения гиперболы путем перенесения начала координат.

Перенося начало координат, можно преобразовать уравнение гиперболы точно таким же образом, как и в случае эллипса (см. n° 771).

Возьмем общее уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

и перенесем начало координат из центра этой кривой в точку $(-h, -k)$, тогда получим:

[380] $$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1.$$

Примечание. Можно перенести начало координат и в точку (h, k), причем уравнение будет иметь вид:

$$\frac{(x+h)^2}{a^2}-\frac{(y+k)^2}{b^2}=1.$$

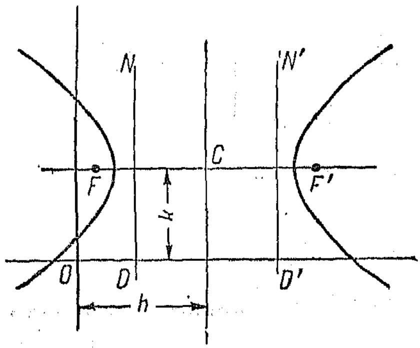


Рис. 429.

Координаты нового положения центра суть (h, k).

Уравнение большой оси: $y=k$.

Фокус F' расположен в точке $(h+ae, k)$.

Фокус F лежит в точке $(h-ae, k)$, причем

$$ae=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Уравнение директрисы ND:

$$x=h-\frac{a}{e},$$

Уравнение директрисы $N'D'$

$$x=h+\frac{a}{e},$$

причем

$$\frac{a}{e}=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

Если ось, пересекающая гиперболу, параллельна оси Y, то преобразованное уравнение будет иметь вид

$$[331] \quad \frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1.$$

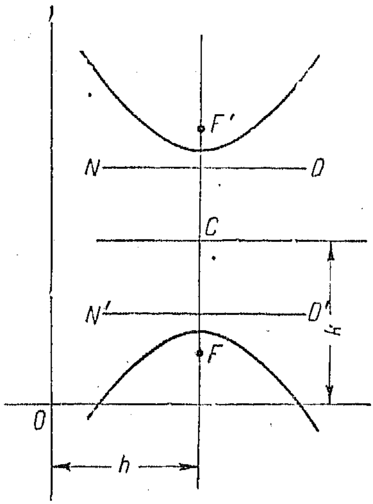


Рис. 430.

Уравнение оси: $x=h$.

Координаты центра в новой системе суть (h, k).

Фокус F' расположен в точке $(h, k+ae)$.

Фокус F лежит в точке $(h, k-ae)$, причем

$$ae=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Уравнение директрисы ND:

$$y=k+\frac{a}{e}.$$

Уравнение директрисы $N'D'$:

$$y=k-\frac{a}{e},$$

где

$$\frac{a}{e}=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

783. Равнобочная гипербола. Если $a=b$, то уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

принимает вид

$$x^2-y^2=a^2. \quad [25]$$

Это уравнение соответствует кривой, называемой *равнобочной гиперболой*. Асимптоты такой гиперболы образуют с осями координат углы, равные 45°.

Уравнения асимптот будут

$$y=x \text{ и } y=-x.$$

Эксцентриситет e равен $\sqrt{2}$ или 1,414.

Длина хорды, проходящей через фокус и перпендикулярной к диаметру, равна $2a$.

784. Уравнение равнобочной гиперболы, отнесенной к асимптотам как к осям. При повороте осей на угол в 45° по часовой стрелке между прежними и новыми координатами получаются следующие соотношения (см. n° 793):

$$x = x' \cos(-45^\circ) - y' \sin(-45^\circ)$$
$$y = x' \sin(-45^\circ) + y' \cos(-45^\circ),$$

откуда

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \qquad (1)$$

и

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}(y' - x'). \qquad (2)$$

Подставляя значения переменных из (1) и (2) в уравнение равносторонней гиперболы $x^2 - y^2 = a^2$, получим:

$$\frac{1}{2}(x'^2 + 2x'y' + y'^2) - \frac{1}{2}(x'^2 - 2x'y' + y'^2) = a^2.$$

Отбрасывая значки и упрощая, найдем:

[382] $$xy = \frac{a^2}{2}.$$

Отсюда видно, что если переменные изменяются так, что их произведение остается постоянным, то кривая, изображающая их в прямоугольных координатах, есть равнобочная гипербола.

Гипербола, для которой прямые

$$x + 2y + 3 = 0$$
$$3x + 4y + 5 = 0$$

являются асимптотами, будет иметь уравнение вида

$$(x + 2y + 3)(3x + 4y + 5) + k = 0$$ [1].

---

[1] Уравнение $(x + 2y + 3)(3x + 4y + 5) + k = 0$ есть уравнение кривой 2-го порядка, обладающей тем свойством, что точки ее пересечения с прямыми

$$x + 2y + 3 = 0$$
$$3x + 4y + 5 = 0$$

лежат в бесконечности.

Уравнение же сопряженной гиперболы будет

$$(x+2y+3)(3x+4y+5)-k=0.$$

Если гипербола удовлетворяет дополнительному условию, например она должна проходить через точку $(1, -1)$, то можно легко определить значение k.

В самом деле, подставив значение $(1, -1)$ в предыдущее уравнение, найдем:

$$(1-2+3)(3-4+5)+k=0,$$

откуда $k=-8$.

Уравнение гипербол примет вид:

$$(x+2y+3)(3x+4y+5)-8=0$$

или

$$3x^2+10xy+8y^2+14x+22y+7=0.$$

Аналогичным образом можем найти уравнение сопряженной гиперболы

$$3x^2+10xy+8y^2+14x+22y+23=0.$$

Если принять асимптоты за координатные оси, то их уравнения будут:

$$x=0 \text{ и } y=0 \text{ или } xy=0.$$

Таким образом, уравнение равнобочной гиперболы отличается от уравнения ее асимптот тем, что в правой части его вместо нуля стоит постоянная k, т. е.

$$xy=k.$$

Эта кривая гипербола и прямые (*) — асимптоты.

Сопряженная гипербола отличается от данной знаком члена в правой части равенства

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,;\;\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1.$$

Если отнести ту и другую к асимптотам, то уравнения их примут вид

$$x'y'=e\,;\;x'y'=-e.$$

Таким образом, когда уравнение гиперболы дано в виде.

$$(x+2y+3)(3x+4y+5)+k=0,$$

уравнение сопряженной гиперболы будет

$$(x+2y+3)(3x+4y+5)-k=0.$$

Прим. ред.

Значение этой постоянной определяется дополнительным условием, которому должна удовлетворять кривая, например проходить через точку

$$P\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2},\ \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right),$$

являющуюся ее вершиной, причем в этом случае уравнение принимает вид

$$xy=\frac{a^2+b^2}{4},$$

т. е. выражает гиперболу, отнесенную к асимптотам как к осям, обычно косоугольным.

785. Уравнение вида $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$.

Если A и C имеют разные знаки, то приведенное выше уравнение соответствует гиперболе, оси которой параллельны осям координат.

Приводя это уравнение к виду **[375]**, имеем:

$$\frac{\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2}{\frac{CD^2+AE^2-4ACF}{4A^2C}}+\frac{\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2}{\frac{CD^2+AE^2-4ACF}{4AC^2}}=1.$$

Так как знаки A и C — противоположны, то $4A^2C$ и $4AC^2$ будут также иметь разные знаки.

Если знаменатель второй дроби отрицателен, то ось, пересекающая гиперболу, параллельна оси X.

Если первый знаменатель отрицателен, то ось, пересекающая гиперболу, параллельна оси Y.

Если перенести начало координат в точку $\left(\frac{-D}{2A},\frac{-E}{2C}\right)$, то уравнение вида $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ можно преобразовать к виду

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad [377]$$

или

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1. \quad [378]$$

786. Эксцентриситет e, выраженный через коэффициенты членов общего уравнения. Из n⁰ 776

$$b^2 = a^2e^2 - a^2$$

$$e^2 = \frac{b^2 + a^2}{a^2}$$

$$e^2 = \frac{\pm \frac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4AC^2} \mp \frac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4A^2C}}{\frac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4A^2C}} = \frac{\pm A \mp C}{C},$$

откуда

$$e = \sqrt{\frac{\pm A \mp C}{C}},$$

причем ось, пересекающая гиперболу, параллельна XX. В случае, когда ось, пересекающая гиперболу, параллельна YY, мы получим

$$e = \sqrt{\frac{\pm A \mp C}{A}}.$$

Знаки в подкоренном выражении должны быть выбраны так, чтобы e оказалось вещественным.

Так как в уравнении гирпеболы A и C имеют различные знаки, то сумму абсолютных величин A и C следует поставить в числителе, а абсолютную величину C — в знаменателе.

Пример. Найти эксцентриситет гиперболы, выражаемой уравнением

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{48} = 1.$$

Приводя к общему виду

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0,$$

находим

$$48x^2 - 16y^2 = 768$$

$$A = 48;\ C = 16;\ e = \sqrt{\frac{48 + 16}{16}} = \sqrt{4} = 2.$$

Заметим, что из уравнения равнобочной гиперболы следует

$$e = \sqrt{\frac{1 + 1}{1}} = \sqrt{2}.$$

787. Уравнение гиперболы в полярных координатах. Если $e>1$, то уравнение

$$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta} \quad (\text{n}^0\ 747)$$

соответствует гиперболе.

788. Соотношение между эксцентриситетом e эллипса и гиперболы в случае одинаковых a и b. Пусть e — эксцентриситет гиперболы, e_1 — эксцентриситет эллипса.

Из nn⁰ 776 и 764

$$e^2-1=\frac{b^2}{a^2}$$

$$1-e_1^2=\frac{b^2}{a^2}.$$

Так как a и b в обеих формулах одинаковы, то

$$e^2-1=1-e_1^2 \text{ или } e^2+e_1^2=2,$$

т. е. сумма квадратов эксцентриситетов равна 2.

Примеры. Сравнить уравнения

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1 \text{ (гипербола)}$$

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1 \text{ (эллипс)}.$$

В обоих случаях $a=4$, $b=2$.

Подставляя эти значения в выражения, написанные выше, имеем:

$$e^2-1=\frac{b^2}{a^2}=\frac{4}{16}$$

$$e^2=1{,}25$$

$$e=1{,}118 \text{ (для гиперболы)}.$$

Для эллипса будем иметь:

$$1-e_1^2=\frac{b^2}{a^2}=\frac{4}{16}$$

$$e_1^2=\frac{3}{4}=0{,}75$$

$$e_1=0{,}866$$

отсюда

$$e^2+e_1^2=1{,}25+0{,}75=2{,}00$$

Так как

$$e^2+e_1^2=2$$

при значениях a и b, одинаковых в обоих уравнениях, то значения e и e_1 могут быть изображены как катеты прямоугольного треугольника.

Приняв постоянный отрезок за гипотенузу и построив против нее прямой угол A графическим путем, выразим соотношения между e и e_1.

Следует заметить, что в уравнении, соответствующем гиперболе, e должно быть больше 1.

Если e_1 приближается к 0, e приближается к 1,414.

789. Соотношение между эксцентриситетом эллипса и гиперболы, имеющих одинаковые значения a и p. Обозна-

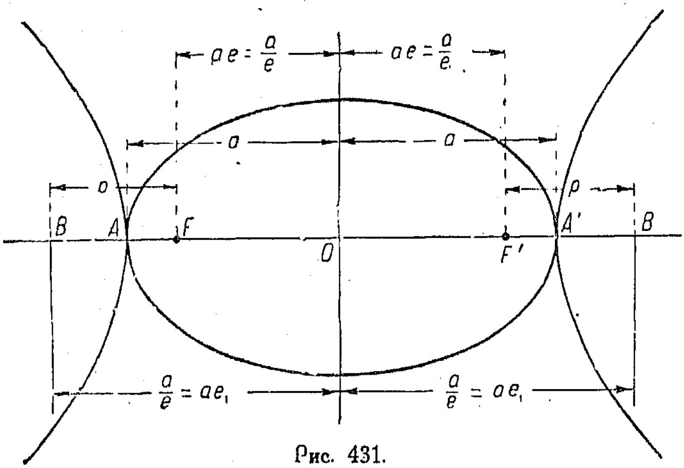


Рис. 431.

чим эксцентриситет эллипса через e, а эксцентриситет гиперболы через e_1 (рис. 431).

Предположим, что эксцентриситет эллипса равен величине, обратной эксцентриситету гиперболы, т. е.

$$e = \frac{1}{e_1},$$

тогда

$$ae = \frac{a}{e_1} \text{ и } \frac{a}{e} = ae_1.$$

Поэтому расстояние p между фокусами и директрисами одинаково в обоих случаях, но расположение их таково, что фокус одной кривой находится там, где проходит директриса другой, и обратно.

790. Если в уравнении эллипса b заменить на $b\sqrt{-1}$, т. е. на bc, то оно обратится в уравнение гиперболы. Точно также, сделав такую подстановку в уравнениях касательной, нормали и т. д. эллипса, получим соответственно уравнения касательной, нормали и т. д. гипе{ болы.

791. Выражения для p в уравнении гиперболы. Из n° 778 имеем:

$$\frac{p^2 e^2}{(e^2-1)^2}=a^2.$$

Извлекая корень квадратный, находим:

$$\frac{pe}{e^2-1}=a$$

$$p=\frac{a}{e}(e^2-1)=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{b^2}{a^2}=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Глава XXXV.

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА.

792. Уничтожение членов первой степени посредством перенесения начала координат. Пусть имеем общее уравнение второго порядка

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0. \tag{1}$$

Перенесем начало координат в точку (h, k), тогда

$$\left.\begin{aligned} x&=x'+h\\ y&=y'+k \end{aligned}\right\}$$

где x' и y' — координаты точки в новой системе.

Подставляя эти значения x и y в (1), имеем:

$$Ax'^2+2Ahx'+Ah^2+Bx'y'+Bhy'+Bkx'+Bhk+Cy'^2+$$
$$+2Cky'+Ck^2+Dx'+Dh+Ey'+Ek+F=0,$$

откуда

$$Ax'^2+Bx'y'+Cy'^2+(2Ah+Bk+D)x'+(Bh+2Ck+E)y'+$$
$$+(Ah^2+Bhk+Ck^2+Dh+Ek+F)=0. \tag{2}$$

Выберем значения h и k таким образом, чтобы коэффициенты при x' и y' обратились в нуль, тогда

$$2Ah+Bk+D=0, \tag{3}$$

$$Bh+2Ck+E=0. \tag{4}$$

Решая эти уравнения совместно, получим:

$$h = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}\ ^{1)}.$$

$$k = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}.$$

Если подставить эти величины в постоянный член уравнения (2):

$$Ah^2 + Bhk + Ck^2 + Dh + Ek + F,$$

то он будет равен

[383] $$\frac{-(4ACF + BDE - AE^2 - CD^2 - FB^2)}{B^2 - 4AC}. \qquad (5)$$

Полученное выражение является крайне важным для выяснения характера кривой.

Мы назовем его *дискриминантом.*

Подставляя (3), (4) и (5) во (2), получим общее уравнение, отнесенное к новым осям:

[384] $$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 - \frac{4ACF + BE - AE^2 - CD^2 - FB^2}{B^2 - 4AC} = 0.$$

Заметим, что члены с неизвестными в первой степени исчезли, а коэффициенты при x^2, xy и y^2 остались прежними.

Если дискриминант равен нулю, то

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 = 0,$$

и уравнение выражает две прямых линии, как это доказано в n⁰ 210.

793. Вращение осей (рис. 432). Пусть оси OX и OY поворачиваются на угол θ до тех пор, пока они не займут положения OX' и OY'. В таком случае произвольная точка кривой $P(x, y)$ будет иметь в новой системе координаты (x', y'). Проведем PM перпендикулярно к OX' и опустим перпендикуляры из точек P и M на OX и OY.

$$\angle NPM = \theta$$

$$x = OT - LT$$

---

[1]) Предполагается, что

$$B^2 - 4AC \neq 0.$$

Прим. ред.

$$OT = x'\cos\theta$$
$$LT = MN = y'\sin\theta.$$
$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta.$$

Точно также

$$y = OR + RS$$
$$OR = x'\sin\theta$$
$$RS = PN = y'\cos\theta$$
$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta.$$

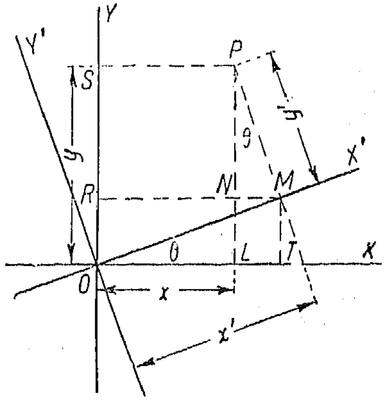


Рис. 432.

Будем теперь поворачивать координатные оси кривой, выражаемой общим уравнением

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + \\ + Ey + F = 0. \qquad [13]$$

Уравнения для преобразования координат будут:

[385]
$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$$
$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta.$$

Подставляя значения переменных в **[13]**, найдем:

$$\left.\begin{array}{l}A\cos^2\theta\\ B\sin\theta\cos\theta\\ C\sin^2\theta\\ \end{array}\right| x'^2 \quad \left.\begin{array}{r}-2A\sin\theta\cos\theta\\ 2C\sin\theta\cos\theta\\ -B\sin^2\theta\\ B\cos^2\theta\end{array}\right| x'y' \quad \left.\begin{array}{r}+A\sin^2\theta\\ -B\sin\theta\cos\theta\\ C\cos^2\theta\\ \end{array}\right| y'^2$$

$$\left.\begin{array}{r}+D\cos\theta\\ E\sin\theta\end{array}\right| x' \quad \left.\begin{array}{r}+E\cos\theta\\ -D\sin\theta\end{array}\right| y' + F = 0.$$

Если выбрать θ так, чтобы коэффициент при $x'y'$ обратился в нуль, то

$$B(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 2(A - C)\cos\theta\sin\theta$$

или

$$B\cos 2\theta = (A - C)\sin 2\theta$$

$$\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \operatorname{tg} 2\theta = \frac{B}{A - C}.$$

794. Определение вида кривой второго порядка. Для определения характера линий, выражаемых уравнением второго порядка, составляем его дискриминант (n⁰ 792).

Если

$$\Delta = 4ACF + BDE - AE^2 - CD^2 - FB^2 = 0,$$

то уравнению соответствуют две прямых, действительных или мнимых, пересекающихся, параллельных или совпадающих. Доказательства этого уже приведены в n⁰ 792 и 210.

Если $\Delta \neq 0$, то имеем в случае:

$$\text{если } B^2 - 4AC = 0 \text{ — параболу,}$$

$$\text{если } B^2 - 4AC < 0 \text{ — эллипс,}$$

$$\text{если } B^2 - 4AC > 0 \text{ — гиперболу.}$$

Необходимость выяснения величины $B^2 - 4AC$ (если $\Delta \neq 0$) следует из явного выражения y через x.

$$y = \frac{-(Bx+E) \pm \sqrt{(B^2-4AC)x^2 + 2(BE-2CD)x + (E^2-4CF)}}{2C}, \quad [38]$$

как то дано в n⁰ 208.

Если не считать сдвига, это будет то же самое коническое сечение, что и

$$y = \pm \frac{\sqrt{(B^2-4AC)x^2 + 2(BE-2CD)x + (E^2-4CF)}}{2C}. \quad [39]$$

Приводя это выражение к рациональному виду, получаем:

$$-4C^2y^2 + (B^2-4AC)x^2 + 2(BE-2CD)x + (E^2-4CF) = 0.$$

Отсюда ясно, что если $B^2 - 4AC = 0$, то уравнение — квадратное по отношению к y и линейное по отношению к x и, следовательно, выражает параболу.

Если $B^2 - 4AC < 0$ (т. е. отрицательно), коэффициенты при x^2 и y^2 будут иметь одинаковые знаки и геометрическое место является эллипсом.

Если $B^2 - 4AC > 0$ (т. е. положительно), то коэффициенты при x^2 и y^2 будут иметь разные знаки. В этом случае уравнение соответствует гиперболе.

795. Касательная (метод секущей). Уравнение касательной к кривой в точке $P(x, y)$ находится следующим образом:

Возьмем вторую точку P_2 на кривой, лежащую близко от P, и проведем через них прямую. Она будет называться секущей.

Если точка P_2, двигаясь по кривой, приближается к P, то прямая будет вращаться вокруг P.

Предельное положение секущей, когда P_2 бесконечно приближается, называется касательной в точке P.

Вычислим наклон секущей, как это сделано в нижеследующем примере.

Пусть кривая, изображенная на рис. 433, имеет уравнение

$$5y = x^3.$$

Точки $P_0(x_0, y_0)$ и $P_2(x_0+h, y_0+k)$ лежат на кривой, а потому их координаты должны удовлетворять ее уравнению.

Поэтому

$$5y_0 = x_0^3 \qquad (1)$$

$$5(y_0+k) = (x_0+h)^3 \qquad (2)$$

$$5y_0 + 5k = 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3 + x_0^3. \qquad (3)$$

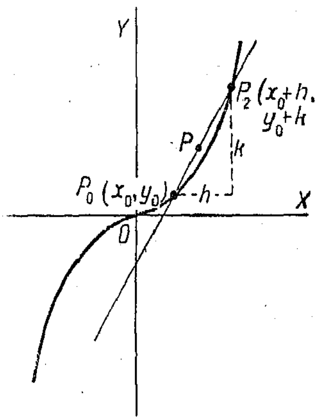


Рис. 433.

Вычитая (1) из (3), найдем

$$5k = 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3$$

$$k = \frac{3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3}{5}.$$

Наклон равен

$$\frac{k}{h} = \frac{3x_0^2 + 3x_0h + h^2}{5}. \qquad (4)$$

Если P_2 приближается P_0, так что h и k стремятся к нулю, то наклон

$$m = \frac{3x_0^2 + 3x_0h + h^2}{5}$$

приближается к

$$\frac{3x_0^2}{5}. \qquad (5)$$

Это и есть наклон касательной.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку, есть

$$y - y_0 = m(x - x_0). \qquad (6)$$

Подстановка (5) в (6) дает

$$y-y_0=\frac{3x_0^2}{5}(x-x_0).$$

796. Касательные к коническим сечениям в произвольной точке $P_0(x_0, y_0)$ могут быть определены по методу, указанному в n⁰ 795.

Для окружности $x^2+y^2=r^2$ уравнение касательной:

[386] $$x_0x+y_0y=r^2;$$

для параболы $y^2=2px$ уравнение касательной:

[387] $$y_0y=p(x+x_0);$$

для эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ уравнение касательной:

[388] $$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1;$$

для гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ уравнение касательной:

[389] $$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1.$$

Уравнение касательной к любому коническому сечению в точке $P_0(x_0, y_0)$ может быть найдено подстановкой x_0x вместо x^2 и y_0y вместо y^2, $\frac{xy_0+x_0y}{2}$ вместо xy, $\frac{x+x_0}{2}$ вместо x и $\frac{y+y_0}{2}$ вместо y.

Если дано общее уравнение

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$

то уравнение касательной в точке $P_0(x_0, y_0)$ имеет вид

[390] $$Ax_0x+B\frac{xy_0+x_0y}{2}+Cy_0y+\frac{D}{2}(x+x_0)+\frac{E}{2}(y+y_0)+F=0\ ^{1)}.$$

---

1) Ур-ния [386] — [389] получаются из ур-ния [390] при частных значениях коэффициентов A, B, C, D, E, F. Вывод ур-ния [390] дается в n⁰ 907. *Прим. ред.*

Пример 1. Найти касательную к кривой $3x^2-4xy+2y-7=0$ в точке $(1,-2)$. Здесь $A=3$, $B=-4$, $C=0$, $D=0$, $E=2$, $F=-7$, $x_0=1$, $y_0=-2$.

Подставляя эти величины в приведенное выше уравнение касательной, получим:

$$3\cdot 1\cdot x-4\,\frac{1\cdot y-2\cdot x}{2}+0+0+\frac{2}{2}(y-2)-7=0$$

или

$$3x-2y+4x+y-2-7=7x-y-9=0.$$

Это и есть уравнение искомой касательной.

Пример 2. Найти уравнение касательной к кривой

$$3x^2-2xy-y^2+3x-4y-3=0$$

в точке $(-3,\ 5)$.

Здесь

$$A=3,\ B=-2,\ C=-1,\ D=3,\ E=-4,\ F=-3$$
$$x_0=-3,\ y_0=5.$$

Подставляя в уравнение касательной, найдем:

$$3(-3)x-1(-3y+5x)-1(5y)+$$
$$+\frac{3}{2}(-3+x)-2(y+5)-3=0.$$

Упрощая, имеем:

$$35x+8y+35=0.$$

Это и есть уравнение искомой касательной.

Пример 3. Найти уравнение касательной к кривой

$$4x^2+y^2-5x-12y-8=0.$$

в точке $(4,\ 6)$.

Здесь

$$A=4,\ B=0,\ C=1,\ D=-5,\ E=-12,\ F=-8,\ x_0=4,\ y_0=6$$

Из общего уравнения касательной имеем:

$$4\cdot 4x+1(6y)-\frac{5}{2}(4+x)-6(6+y)-8=0$$

откуда

$$27x-108=0 \quad \text{или} \quad x=4.$$

797. Уравнение касательной к коническому сечению, если известен ее наклон.

Уравнение касательной, имеющей наклон m [1]):

Для окружности $x^2+y^2=r^2$:

$$[391] \qquad y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}.$$

---

[1]) Все ур-ния (391)—(397) выводятся из одного принципа. Этот принцип таков. Отыскивается точка пересечения прямой

$$y=mx+n \qquad (*)$$

с соответствующей кривой.

Для параболы $y^2 = 2px$.

[392] $$y = mx + \frac{p}{2m}.$$

Для параболы $x^2 = 2py$:

[393] $$y = mx - \frac{pm^2}{2}.$$

Для эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$:

[394] $$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}.$$

Для гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$:

[395] $$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}.$$

Для гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$:

[396] $$+2\ y = mx \pm \sqrt{b^2 - a^2m^2}.$$

Для гиперболы $xy = c$:

[397] $$y = mx \pm 2\sqrt{-cm}.$$

Величина n берется так, чтобы две точки пересечения совпадали. Тогда прямая служит касательной. Рассмотрим для примера ур-ние [397].

Абсциссы точек пересечения прямой (*) с окружностью

$$x^2 + y^2 = r^2$$

находятся из уравнения

$$x^2 + (mx + n)^2 = r^2$$

или

$$(1 + m^2)x^2 + 2mnx + n^2 - r^2 = 0. \qquad (**)$$

Если

$$m^2n^2 - (1 + m^2)(n^2 - r^2) = 0, \qquad (***)$$

то ур-ние (**) имеет двойной корень и точки пересечения прямой с окружностью совпадают.

Прямая становится касательной.

Соответствующее значение n получается из равенства (***)

$$n^2 = r^2(1 + m^2)$$

или

$$n = \pm r\sqrt{1 + m^2}.$$

Окружность имеет две касательных, параллельных данному направлению. Уравнение касательных

$$y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}.$$

Прим. ред.

798. Нормали к коническим сечениям. Нормалью к кривой в точке $P_1(x_1, y_1)$ называется прямая, перпендикулярная к касательной в этой точке.

Уравнение нормали можно найти путем определения наклона касательной, после чего наклон нормали легко получить, припомнив, что он является величиной, обратной и имеющей противоположный знак по отношению к указанному наклону касательной. Кроме того, нормаль проходит через ту же точку кривой $P_1(x_1, y_1)$, что и касательная.

Зная наклон нормали и координаты точки, через которую она проходит, можем написать искомое уравнение.

Уравнения нормали для различных конических сечений будут:

Для окружности $x^2 + y^2 = r^2$:

[398] $$x_0 y = x y_0.$$

Для параболы $y^2 = 2px$:

[399] $$y_0 x + p y = x_0 y_0 + p y_0.$$

Для эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$:

[400] $$a^2 y_0 x - b^2 x_0 y = (a^2 - b^2) x_0 y_0.$$

Для гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$:

[401] $$a^2 y_0 x + b^2 x_0 y = (a^2 + b^2) x_0 y_0.$$

Если дано уравнение кривой в общей форме

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

то уравнение нормали в точке $P_0(x_0, y_0)$:

[402] $$y - y_0 = \frac{Bx_0 + 2Cy_0 + E}{2Ax_0 + By_0 + D}(x - x_0).$$

799. Свойства касательных и нормалей к коническим сечениям. Касательная и нормаль к эллипсу делят соответственно внешний и внутренний углы между радиусами-векторами, проведенными из фокусов в данную точку, на две равные части.

На рис. 434

$$\angle FPD = \angle DPF'$$

$$\angle F'PN = \angle NPC.$$

Таким образом, для того чтобы провести касательную и нормаль к эллипсу в точке P, следует соединить ее прямыми с фокусами и разделить пополам внешний и внутренний углы, образованные этими прямыми.

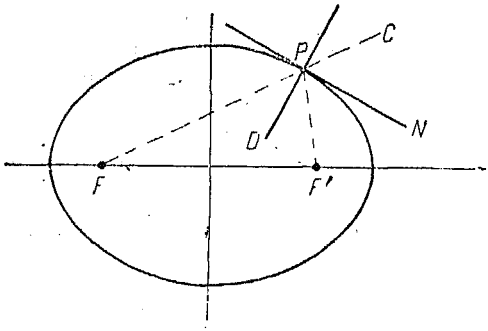


Рис. 434.

Из физики известно, что угол падения равен углу отражения волны, поэтому, если потолок имеет форму эллипсоида, то шопот человека, стоящего в точке F, можно слышать только в F', в соседних же с F' точках он слышен не будет (рис. 435).

Касательная и нормаль к параболе делят пополам соответственно внутренний и внешний углы между радиусом-вектором и прямой, проведенной через точку касания параллельно оси X.

На рис. 436

$$\angle FPD = \angle DPN$$
$$\angle FPC = \angle CPE.$$

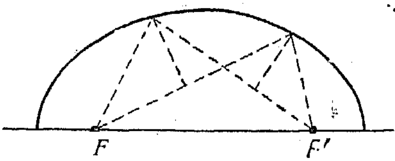


Рис. 435.

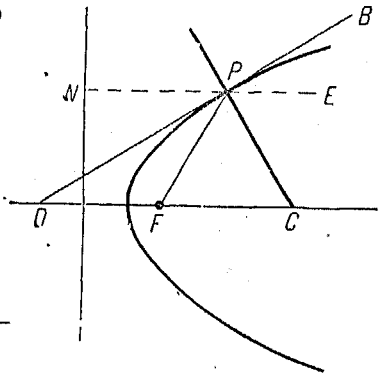


Рис. 436.

Этим свойством параболы пользуются при устройстве параболических рефлекторов. Все лучи, выходящие из источника света, помещенного в фокусе, отражаются по линиями, параллельным оси параболы.

Касательная и нормаль к гиперболе делят пополам соответственно внутренний и внешний углы, образованные радиусами-векторами, проведенными из точки касания.

Из рис. 437 имеем

$$\angle F'PA = \angle APF;$$
$$\angle FPD = \angle DPC.$$

800. Диаметр конического сечения. Геометрическое место середин параллельных хорд называется *диаметром конического сечения.* Указанные хорды называются *сопряженными* с данным диаметром (рис. 438).

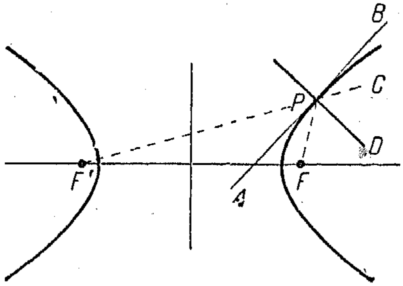


Рис. 437.

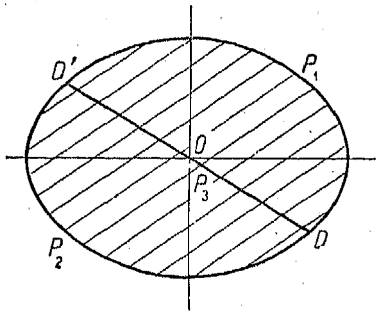


Рис. 438.

Сказанное лучше всего иллюстрировать примером. Возьмем уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Пусть уравнение одной из хорд будет:

$$y = mx + c$$

и пусть $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$ — точки ее пересечения с кривой, а $P_3(x_3, y_3)$ — середина хорды, проходящей через P_1 и P_2, так что

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{и} \quad y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Найдем координаты точек пересечения хорды с кривой, для чего решим совместно их уравнения. Подставляя значения x_1, y_1, x_2 и y_2, найдем:

$$x_3 = \frac{-a^2cm}{a^2m^2 + b^2}, \tag{1}$$

$$y_3 = \frac{b^2c}{a^2m^2 + b^2}. \tag{2}$$

Придавая теперь параметру c различные значения, получим координаты середин каждой хорды данной системы.

Поэтому можно найти геометрическое место этих точек, если выполнить условия (1) и (2) независимо от значений c.

Исключим c путем деления (1) на (2), тогда получим:

$$\frac{x_8}{y_8} = -\frac{a^2}{b^2} m.$$

Таким образом координаты середин системы хорд, имеющих наклон m, должны удовлетворять условию

$$\frac{x}{y} = -\frac{a^2}{b^2} m$$

или

$$y = -\frac{b^2}{a^2 m} x.$$

Это и есть уравнение диаметра, проходящего через середины хорд, имеющих наклон m.

Точно таким же образом можно найти уравнения любого диаметра, делящего пополам хорды с наклоном m, и для других конических сечений.

Так, для параболы $y^2 = 2px$ это уравнение имеет вид

$$y = \frac{2p}{m},$$

для гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ имеем:

$$y = \frac{b^2}{a^2 m} x.$$

801. Свойства диаметров. Рассматривая уравнение диаметров параболы, видим, что каждый из них параллелен ее оси или, иначе говоря, каждая прямая, параллельная оси параболы, делит на две равные части хорды какой-либо системы.

Касательная, проведенная через конец диаметра, параллельна хорде, которая делится им пополам.

Каждый диаметр эллипса проходит через его центр.

Если один диаметр, например AA' (рис. 439), делит пополам хорды b, c и т. д., параллельные второму диаметру BB', то второй диаметр делит пополам хорды, параллельные первому. Такие диаметры называются *сопряженными*.

Касательная, проведенная через конец диаметра, параллельна сопряженному диаметру.

Если провести систему хорд, имеющих наклон m, то получим диаметр, наклон которого равен

$$m' = -\frac{b^2}{a^2 m}.$$

Отсюда следует, что m и m' являются величинами наклона сопряженных диаметров, если

$$m' = -\frac{b^2}{a^2 m}$$

или

$$m = -\frac{b^2}{a^2 m'},$$

или же

$$mm' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

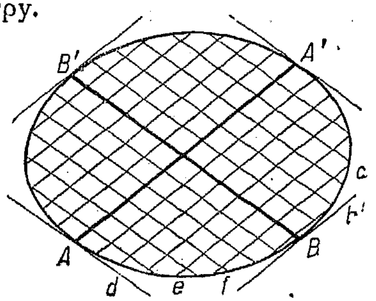


Рис. 439.

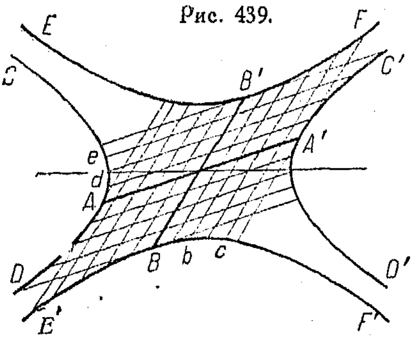


Рис. 440.

Каждый диаметр гиперболы проходит через центр ее.

Если AA' и BB' (рис. 440) суть сопряженные диаметры гиперболы CAD и $C'A'D'$, то они являются также сопряженными диаметрами сопряженной гиперболы EBF и $E'B'F'$.

Касательная, проведенная через конец диаметра, параллельна сопряженному диаметру.

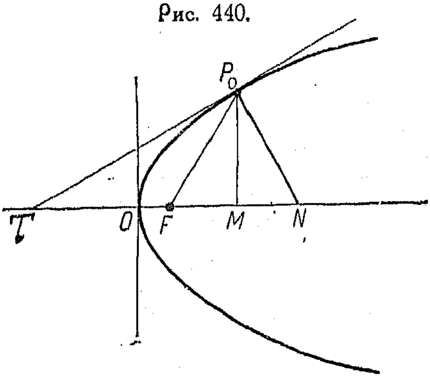


Рис. 441.

802. Подкасательные и поднормали. Проекция отрезка P_0T на ось X (рис. 441) называется подкасательной в точке P_0. Точно также проекция отрезка P_0N на ось X называется поднормалью в точке P_0.

Итак, *подкасательная есть отрезок TM, поднормаль — отрезок MN.*

Рассмотрим уравнение касательной к параболе $y^2 = 2px$ в точке $P_0(x_0, y_0)$:

$$yy_0 = p(x + x_0). \quad [387]$$

Чтобы найти точку пересечения ее с осью X, положим $y = 0$, тогда

$$px + px_0 = 0$$

$$x = -x_0 = OT,$$

следовательно

$$TO = x_0.$$

Подкасательная

$$TM = TO + OM = x_0 + x_0 = 2x_0.$$

Уравнение нормали в точке $P_0(x_0, y_0)$ можно написать так:

$$y_0x + py = x_0y_0 + py_0.$$

Положим $y = 0$, тогда

$$x = \frac{x_0y_0 + py_0}{y_0} = x_0 + p.$$

Но

$$ON = x_0 + p$$

$$MN = ON - OM = x_0 + p - x_0 = p.$$

Таким образом длина поднормали любой точки параболы $P_0(x_0, y_0)$ есть величина постоянная и равна p.

Удобный графический прием для построения касательной, нормали, подкасательной и поднормали к параболе заключается в следующем:

Опишем окружность из фокуса, радиусом, равным расстоянию от последнего до данной точки. Окружность эта пересечет ось X в точках, через которые проходят касательная и нормаль. Опуская перпендикуляр из P_0 на ось X, получим подкасательную и поднормаль (рис. 442).

Применяя тот же самый метод, как и в случае параболы, к эллипсу, найдем, что подкасательная для любой точки $P_0(x_0, y_0)$ будет равна

$$\frac{x_0^2 - a^2}{x_0}.$$

Если имеется система эллипсов, имеющих одну и ту же большую ось, то касательные для точек, имеющих одинаковые абсциссы, пересекут продолжение большой оси в общей точке N (рис. 443).

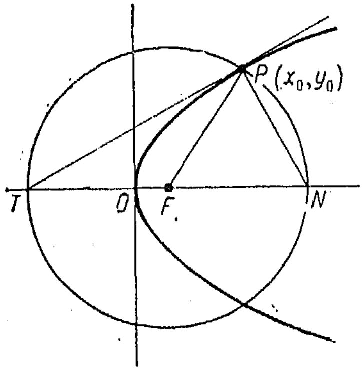


Рис. 442.

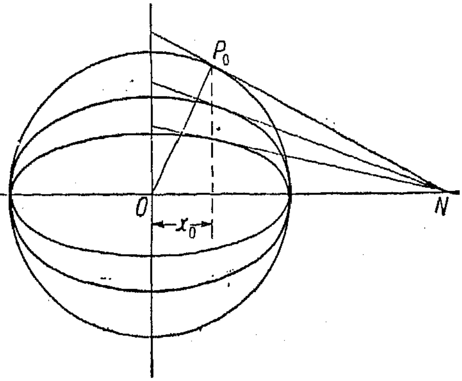


Рис. 443.

Начертив окружность с диаметром, равным большей оси эллипса, и выбрав точку P_0 на этой окружности, имеющую абсциссу x_0, проведем касательную P_0N. Касательные к точкам эллипсов с этой абсциссой построить весьма легко, так как для этого следует только соединить их с точкой N.

Глава XXXVI.

УРАВНЕНИЯ В ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ И В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ.

803. Параметрические уравнения кривой. Если каждая из двух переменных координат точки, лежащей на кривой, выражена в виде функции третьей переменной, то такие уравнения называются *параметрическими уравнениями кривой*, а третья переменная называется *параметром*.

Если известно уравнение, связывающее переменные, и если задаться соотношением между одной из переменных и параметром, то часто бывает возможно определить соотношение между параметром и второй переменной. Таким путем можно представить данную кривую в виде ряда параметрических уравнений. Однако, обычно при выборе параметра задаются известными геометрическими соотношениями между переменными и параметром или рассматривают как параметр время, в течение которого точка находилась в движении; переменные же выражают в виде функций времени. В предыдущих главах мы уже имели несколько примеров параметрических уравнений, таковы (n^0 456)

$$x = tv\cos\alpha$$

$$y = tv\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$$

или (n^0 800)

$$x = \frac{-a^2cm}{a^2m^2 + b^2}$$

и

$$y = \frac{b^2c}{a^2m^2 + b^2}.$$

804. Параметрические уравнения прямой. Из уравнения прямой

$$y - y_0 = \frac{m}{n}(x - x_0) \qquad (1)$$

мы знаем, что наклон линии равен $\frac{m}{n}$ и что она проходит через точку (x_0, y_0).

Разделив (1) на m, имеем:

$$\frac{y - y_0}{m} = \frac{x - x_0}{n}.$$

Примем каждое из этих отношений равным третьей переменной t, тогда

$$\frac{x - x_0}{n} = t \quad \text{и} \quad x = x_0 + nt \qquad (2)$$

[403]

$$\frac{y - y_0}{m} = t \quad \text{или} \quad y = y_0 + mt. \qquad (3)$$

Ур-ния (2) и (3) суть параметрические уравнения прямой (1).

Пример. Представить уравнение

$$5y - 4x = 15$$

в параметрической форме.

Имеем:

$$5y = 4x + 15.$$

Положим каждую часть равенства равной t, тогда

$$t = 5y,$$

$$t = 4x + 15,$$

Отметим, что после исключения t из этих двух уравнений получим уравнение в прежней форме.

Данное уравнение можно представить также и в таком виде:

$$5y - 5 = 4x + 10 = t$$

$$t = 5y - 5 \quad \text{и} \quad t = 4x + 10$$

$$x = \frac{t}{4} - \frac{5}{2} \quad \text{и} \quad y = \frac{t}{5} + 1$$

или же

$$y = \frac{4}{5}x + 3$$

$$t = y + 1 \quad \text{и} \quad t = \frac{4}{5}x + 4,$$

откуда

$$x = \frac{5}{4}t - 5; \quad y = t - 1.$$

Мы сделаем эти соотношения более ясными, применив совершенно новый род координатных осей.

Пусть имеются три взаимно перпендикулярные координатные оси, проходящие через точку O и подобные тем, кото-

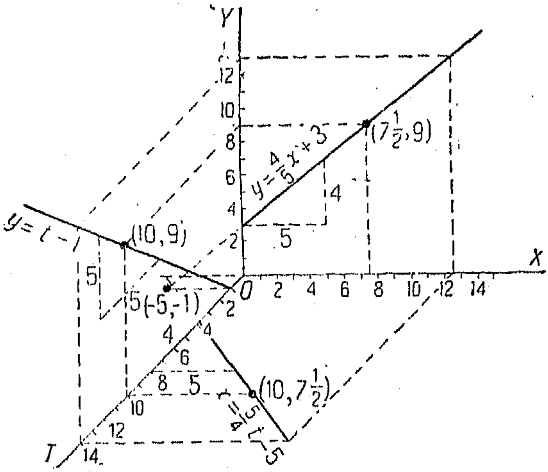


Рис. 444.

рыми пользуются в аналитической геометрии в пространстве. Проведем через эти оси следующие пересекающиеся плоскости: плоскость через оси X и Y для изображения соотношений между x и y, плоскость через ось X и ось T, для изображения соотношений между x и t, и наконец плоскость через оси Y и T для соотношений между y и t. Следует помнить, что мы рассматриваем плоскости, а не пространство, как в соответствующих случаях аналитической геометрии.

Для удобства на рис. 444 эти оси изображены в перспективе. Нанесем на плоскости XT график уравнения

$$x = \frac{5}{4}\,t - 5.$$

На плоскости YT построим график уравнения

$$y = t - 1$$

и на плоскости XY — график уравнения

$$y = \frac{4}{5}\,x + 3.$$

Взяв произвольную точку на какой-либо из этих прямых, посредством проектирования определим соответствующие точки на остальных.

Пример. Пусть $t = 10$. Проектируя на прямую

$$x = \frac{5}{4}\,t - 5$$

найдем координаты $(10, 7\frac{1}{2})$. Таким образом

$$x = 7\frac{1}{2}.$$

Теперь проектируем на

$$y = t - 1,$$

тогда

$$y = 10 - 1 = 9.$$

Из этих точек на обеих линиях опускаем перпендикуляры на плоскость XY, тогда найдем точку $(7\frac{1}{2}, 9)$ на прямо

$$y = \frac{4}{5}\,x + 3.$$

Следует отметить, что прямая

$$y = \frac{4}{5}\,x + 3$$

проходит через точку $(-5, -1)$ и что ее наклон равен $\frac{4}{5}$.

Наклон прямой

$$x = \frac{5}{4}\,t - 5$$

по отношению к оси T равен $\frac{5}{4}$, а наклон прямой $y = t - 1$ равен 1.

Если мы зададим две из указанных прямых, то третья определится весьма легко.

Вообще можно начертить одну из параметрических прямых в любом месте на плоскости, причем второе параметрическое уравнение определится из заданных условий.

805. Параметрическое уравнение окружности. Рассмотрим окружность с центром в начале координат и радиусом r, описываемую точкой $P(x, y)$, которая движется от оси в направлении против часовой стрелки (рис. 445).

Из рисунка видно, что

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \quad \text{и} \quad \sin\theta = \frac{y}{r},$$

откуда

[404] $$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta. \end{aligned}$$

Здесь мы получим параметрические уравнения окружности, в которых угол θ является параметром.

Соотношение между окружностью и приведенными выше параметрическими уравнениями может быть выведено путем построения графика $x = r\cos\theta$ на плоскости $X\theta$, графика $y = r\sin\theta$ на плоскости $Y\theta$ и окружности на плоскости XY.

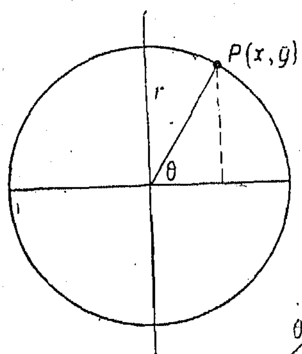


Рис. 445.

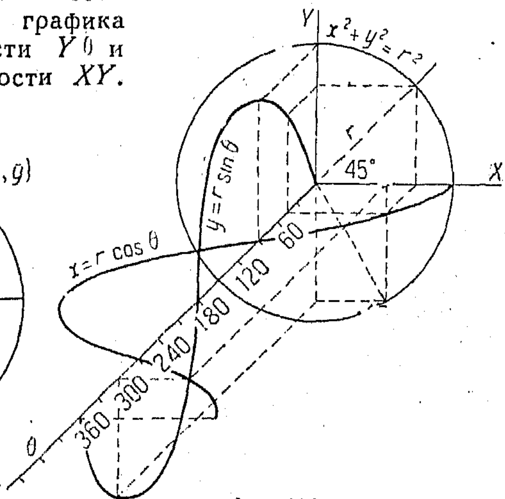


Рис. 446.

Несколько точек этих трех кривых отмечены на рис. 446. Окружность имеет радиус, равный 6. Аналогичным образом можно показать, что уравнение параболы

$$y^2 = 4x$$

может быть представлено в виде системы

$$x = t^2,$$
$$y = 2t.$$

Для эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ мы получили бы параметрические уравнения

$$x = a \cos \theta,$$
$$y = b \sin \theta.$$

Для гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ можно получить систему

$$x = a \sec \theta,$$
$$y = b \operatorname{tg} \theta,$$

или

$$x = a \operatorname{ch} t \text{ и}$$
$$y = b \operatorname{sh} t \text{ (см. n}^0 \text{ 685).}$$

Для построения кривых следует придавать параметру различные значения, а затем вычислять x и y, располагая полученные результаты в виде таблицы.

806. Параметрические уравнения параболы.

Пример. Авиатор, летящий горизонтально со скоростью 45 *км/час*, хочет попасть бомбой в мишень на земле. Высота самолета над землей — 1000 *м*. На каком расстоянии от мишени он должен бросить бомбу, т. е. чему равно расстояние AB?

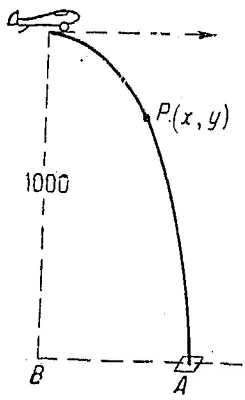


Рис. 447.

Расположим начало координат в точке, где начинается движение бомбы. Пусть $P(x, y)$ — положение ее через t секунд (рис. 447).

Если обозначим через v скорость бомбы в метрах в секунду, то через t секунд она пройдет в горизонтальном направлении vt метров.

Таким образом

$$x = vt$$

Кроме того, как известно из физики, через t секунд бомба пройдет по вертикали вниз расстояние, равное $\frac{1}{2} gt^2$ (пренебрегая ветром и т. д.), отсюда

$$y = -\frac{1}{2} gt^2$$

или

$$t = \sqrt{\left|\frac{2y}{g}\right|}$$

$$|y| = 1000, \qquad g = 9{,}81 \text{ (приблизительно)},$$

следовательно

$$t=\sqrt{\frac{2000}{9,81}}=14,3 \text{ сек.},$$

т. е. бомба достигает земли через 14,3 сек. В течение этого времени она движется и в горизонтальном направлении.

Подставляя t в уравнение

$$x=vt,$$

где $v=45$ *км/час.* или 12,5 *м/сек.*, имеем

$$x=12,5\cdot 14,3=178,75 \text{ м}.$$

Заметим, что уравнения могут быть приведены к обычной форме путем исключения из них t:

$$x^2=-\frac{2v^2}{g}y.$$

807. Развертка круга (эвольвента). Если круг обернуть ниткой, то кривая, которую будет чертить на плоскости точка нити, когда последняя разматывается, называется *разверткой круга* (эвольвентой).

Проведем ось X через центр окружности и точку P в том положении ее, когда она находится на окружности.

Примем за параметр угол поворота θ радиуса, проведенного в точку прикосновения разматываемой нити к окружности.

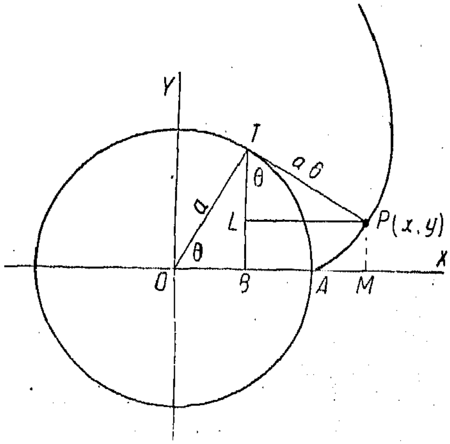


Рис. 448.

Из чертежа (рис. 448) имеем:

$$x=OM=OB+BM=OB+LP$$

$$OB=a\cos\theta,\qquad LP=TP\sin\theta=a\theta\sin\theta$$

$$y=MP=BL=BT-LT$$

$$BT=a\sin\theta,\qquad LT=TP\cos\theta=a\theta\cos\theta.$$

Таким образом получим уравнения

[405]

$$x=a\cos\theta+a\theta\sin\theta$$

$$y=a\sin\theta-a\theta\cos\theta.$$

808. Пример движения. Если туго намотанная нить начинает разматываться с окружности радиуса a с постоянной угловой скоростью k радианов в секунду, то угол поворота радиуса через t сек. будет равен kt радианов. Подставляя эту величину в параметрическое уравнение развертки круга, получим уравнение движения точки $P(x, y)$:

$$x = a(\cos kt + kt \sin kt)$$

$$y = a(\sin kt - kt \cos kt).$$

809. Циклоида. Геометрическое место положений точки $P(x, y)$, лежащей на окружности, катящейся без скольжения по прямой, называется *циклоидой*.

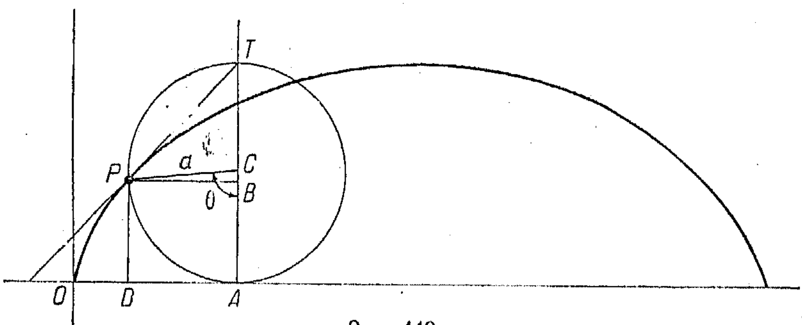


Рис. 449.

Расположим начало координат в точке O — пересечении кривой с осью X.

Проведем в какой-нибудь точке окружность радиуса a. Обозначив через θ угол, на который повернулась катящаяся окружность, примем его за параметр.

Имеем:

$$PB = a \sin\theta, \qquad CB = a\cos\theta.$$

Согласно указанным выше условиям

$$OA = \text{дуга } AP = a\theta.$$

Из чертежа следует, что

$$x = OD = OA - PB = a\theta - a\sin\theta$$

$$y = DP = AC - CB = a - a\cos\theta,$$

откуда

$$x = a(\theta - \sin\theta)$$
[406]
$$y = a(1 - \cos\theta),$$

где θ выражен в радианах.

Это и есть уравнение циклоиды в параметрической форме.

Касательная PT и нормаль PA пересекают окружность в концах вертикального диаметра PA при любом положении окружности.

Площадь, ограниченная кривой и осью OX, равна

$$A = 3\pi a^2.$$

Длина кривой

$$s = 8a.$$

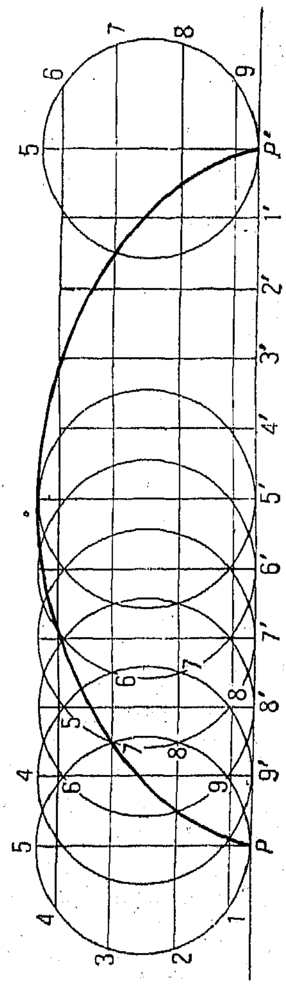


Рис. 450.

810. Построение циклоиды. Разделим данную окружность на некоторое число равных частей ... 1, 2, 3, 4 и т. д. (рис. 450).

Отложим отрезок PP', равный длине окружности, и разделим этот отрезок на такое же число равных частей.

Через точки деления окружности проводим прямые, параллельные PP', а именно: 1—9, 2—8, 3—7 и т. д.

Если круг повернется на одно деление, например PP', точка P передвинется в положение, совпадающее с прямой 1—9, параллельной PP'.

Положение точки P на этих параллельных линиях может быть определено двояким образом: 1) путем помещения центра в различные положения и засекания точек на прямых, дугой радиуса a или, иными словами, путем вычерчивания нескольких окружностей, 2) путем простого отступания на одно деление по мере перехода от одной параллельной к другой, пока не дойдем до середины.

Переходя, затем, к другому концу PP' и двигаясь по направлению к середине, найдем аналогичным способом точки второй половины кривой.

Основанием для этого построения является то обстоятельство, что окружность каждый раз передвигается на одно деление.

811. Трохоида (рис. 451). Если окружность катится без скольжения по прямой, то точка, лежащая на радиусе окружности или его продолжении, описывает кривую, называемую *трохоидой*.

Если расстояние от данной точки до центра окружности, катящейся по оси X, меньше радиуса, то кривая называется

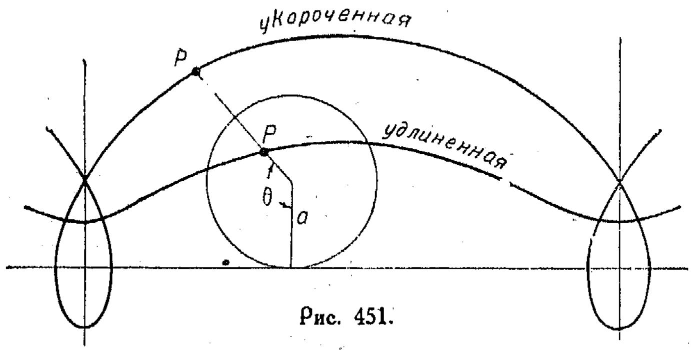


Рис. 451.

удлиненной трохоидой, если же это расстояние больше радиуса, то кривая называется *укороченной трохоидой* или трохоидой с петлями.

В обоих случаях параметрическое уравнение имеет вид

$$[407] \qquad x = a\theta - b \sin\theta \qquad y = a - b\cos\theta,$$

причем b соответствует расстоянию точки по радиусу до центра катящегося круга.

Для построения трохоиды вычерчиваем окружность в различных положениях (точно так же, как и в случае циклоиды) и отмечаем на радиусах расстояние b для соответствующих положений, после чего соединяем полученные точки плавной кривой.

812. Гипоциклоида и эпициклоида. Точка, лежащая на окружности, катящейся без скольжения внутри другой, *неподвижной* окружности, описывает кривую, называемую *гипо-*

циклоидой. Если подвижная окружность катится по неподвижной *снаружи*, то точка ее описывает *эпициклоиду*.

Пусть r — радиус катящейся окружности, R — радиус неподвижной, тогда уравнение гипоциклоиды в параметрической форме имеет вид (рис. 452):

$$\begin{aligned} x &= (R-r)\cos\theta + r\cos\left(\frac{R-r}{r}\theta\right) \\ y &= (R-r)\sin\theta - r\sin\left(\frac{R-r}{r}\theta\right). \end{aligned} \qquad [408]$$

Уравнение эпициклоиды будет

$$\begin{aligned} x &= (R+r)\cos\theta - r\cos\left(\frac{R+r}{r}\theta\right) \quad \text{и} \\ y &= (R+r)\sin\theta - r\sin\left(\frac{R+r}{r}\theta\right). \end{aligned} \qquad [409]$$

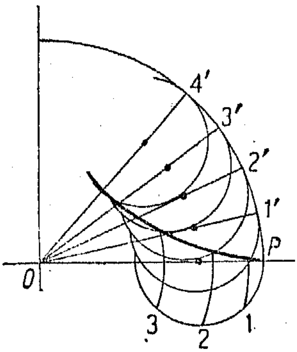


Рис. 452.

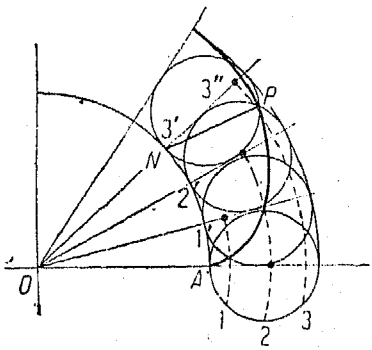


Рис. 453.

Параметр θ есть переменный угол, выраженный в радианах, который образует с осью X линию, проходящую через центры окружностей.

Ось X, как это видно на рис. 452 и 453, проходит через начальную точку кривой. Если радиусы R и r соизмеримы, то кривая — замкнутая.

813. Построение эпициклоиды и гипоциклоиды. Разделим половину катящейся окружности на n равных частей, как это показано на рис. 452 и 453, и пусть точки деления будут *1*, *2*, *3* и т. д. Приняв O за центр и $O1$, $O2$, $O3$ за радиусы, проводим дуги, как это показано на рисунках.

Опишем дуги $A1'$, $A2'$, $A3'$, взяв их такой же длины как и дуги $1-2$, $2-3$ и т. д., а затем проведем радиусы $O1'$, $O2'$, $O3'$ и т. д.

Если катящаяся окружность подвинется вперед на одно деление, точка P передвинется от начальной точки на неподвижной окружности в точку, лежащую на первой внешней концентрической окружности. Так как центр катящейся окружности лежит на радиальной линии $O1'$, то ее новое положение может быть найдено аналогично тому, как мы поступали в случае циклоиды.

814. Особые виды гипоциклоид. Если радиус катящейся окружности равен половине радиуса неподвижной, то геометрическое место обращается в прямую, являющуюся очевидно диаметром неподвижной окружности (рис. 454).

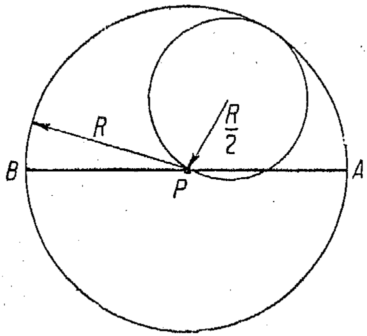


Рис. 454.

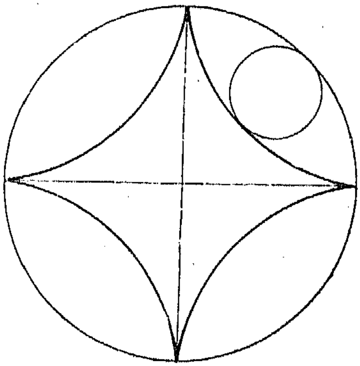


Рис. 455.

Если радиус катящейся окружности равен четверти радиуса неподвижной, то получим кривую с четырьмя вершинами, называемую *астроидой*. Параметрические уравнения астроиды будут:

$$x = \frac{3}{4} R \cos \theta + \frac{1}{4} R \cos 3\theta$$

$$y = \frac{3}{4} R \sin \theta - \frac{1}{4} R \sin 3\theta.$$

Уравнение этой линии в прямоугольных координатах

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}}.$$

Оно может быть получено путем исключения θ из приведенных выше параметрических уравнений.

Если у эпициклоиды радиус неподвижной окружности равен радиусу подвижной, то получим кривую, называемую *кардиоидой* (рис. 456).

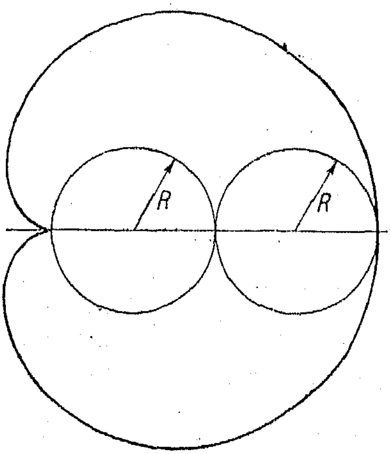


Рис. 456.

Параметрические уравнения кардиоиды будут:

$$x = 2R\cos\theta - R\cos 2\theta$$

$$y = 2R\sin\theta - R\sin 2\theta.$$

Уравнение этой кривой в прямоугольных координатах будет

$$(x^2 + y^2 + 2Rx)^2 = R^2(x^2 + y^2).$$

График этих уравнений вычерчивается точно так же, как и в случаях, рассмотренных в предыдущих n^0.

Уравнения кривых в полярных координатах.

815. При исследовании уравнений в полярной форме рекомендуется выяснить следующее:

1. Точки пересечения с полярной осью, для чего полагают $\theta = 0°$, $180°$ и $n \cdot 180°$.

2. Пересечения с прямой, перпендикулярной к полярной оси, для чего полагаем $\theta = 90°$, $270°$ и т. д. или $(2n - 1)\ 90°$.

3. Значения θ, при которых кривая проходит через полюс, для чего полагаем $\rho = 0$.

4. Симметричность кривой относительно полюса. Для этого подставляют вместо ρ величину $(-\rho)$, причем если уравнение от этого не изменяется, то кривая симметрична относительно полюса.

Если подстановка $(\pi - \theta)$ вместо θ не изменяет уравнения, то кривая симметрична относительно прямой, перпендикулярной к полярной оси.

5. *Крайние значения.* Решаем уравнение относительно θ и определяем максимум и минимум ρ. Определяем значение θ, для которых ρ обращается в бесконечность, а также при которых ρ становится мнимым.

816. Применение полярных координат. Если геометрическое место чертится концом отрезка прямой переменной длины, другой конец которого закреплен, то применение полярных координат в этом случае оказывается весьма удобным.

'817. Спирали. Спиралью называется кривая, описываемая точкой, движущейся по прямой, вращающейся вокруг неподвижного полюса, причем длина радиуса-вектора и угол, образуемый им с полярной осью, возрастают или убывают по некоторому определенному закону.

818. Спираль Архимеда. Если отношение радиуса-вектора к полярному углу есть величина постоянная, то соответствующая кривая называется *спиралью Архимеда* (рис. 457).

Полярное уравнение ее имеет следующий вид:

[410] $$\rho = k\theta,$$

где θ выражен в радианах.

Можно определить также спираль Архимеда как кривую, которую чертит точка, движущаяся с постоянной скоростью по радиусу-вектору, в то время как последний вращается с постоянной угловой скоростью.

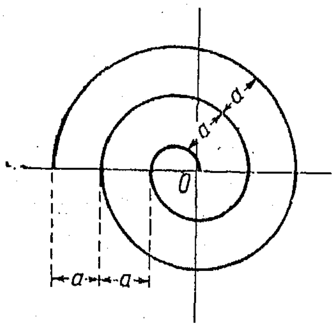


Рис. 457.

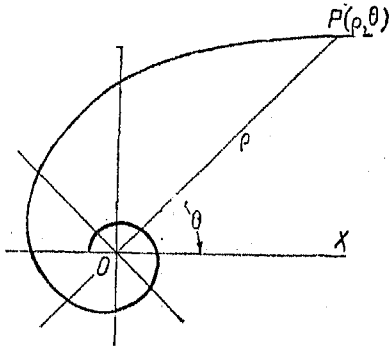


Рис. 458.

819. Гиперболическая спираль. Кривая, описываемая точкой, радиус-вектор которой изменяется обратно пропорционально полярному углу, называется *гиперболической спиралью.*

Полярное уравнение гиперболической спирали имеет вид

[411] $$\rho = \frac{k}{\theta} \quad \text{и} \quad \rho\theta = k.$$

Эта кривая начинается в бесконечно удаленной от полюса точке и постепенно приближается к полюсу, никогда однако его не достигая (рис. 458). Она имеет асимптоту, параллельную полярной оси и расположенную в расстоянии k над ней.

820. Параболическая спираль. В этой кривой квадрат радиуса-вектора пропорционален полярному углу (рис. 459).

Уравнение ее пишется так:

[412] $\rho^2 = k\theta$.

821. Жезл. В этой кривой квадрат радиуса-вектора обратно пропорционален полярному углу. Ее уравнение будет:

[413] $\rho^2 = \frac{k}{\theta}$.

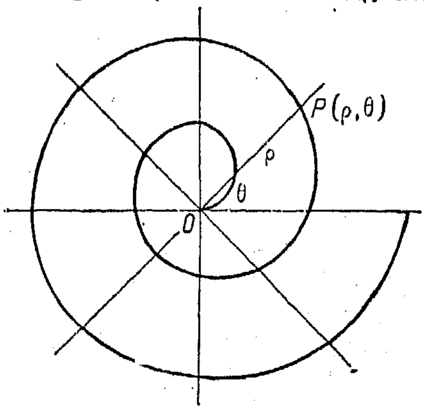


Рис. 459.

Полярная ось является асимптотой этой кривой (рис. 460).

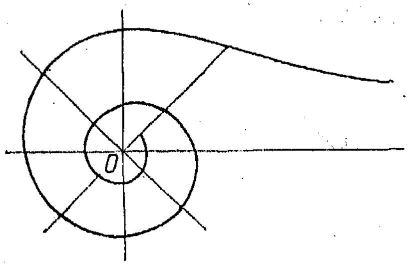


Рис. 460.

Жезл начинается в бесконечности и постоянно приближается к полюсу, никогда его не достигая.

822. Логарифмическая спираль. Логарифмическая спираль есть кривая, обладающая тем свойством, что разность логарифмов радиусов-векторов пропорциональна разности соответствующих полярных углов (рис. 461).

Уравнение кривой

[414] $\lg \frac{\rho}{a} = k\theta$ или $\rho = ae^{k\theta}$,

где θ выражена в радианах, a — значение ρ при $\theta = 0$.

Если $a = 2$, то при

$$\theta = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \text{ и т. д.}$$

$$\rho = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16 \text{ и т. д.}$$

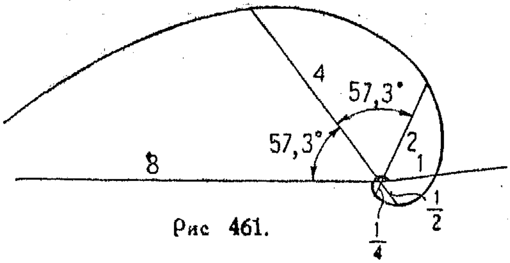


Рис 461.

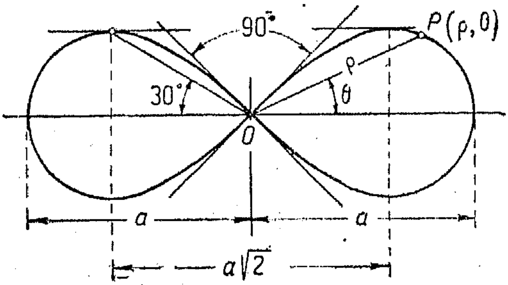


Рис. 462.

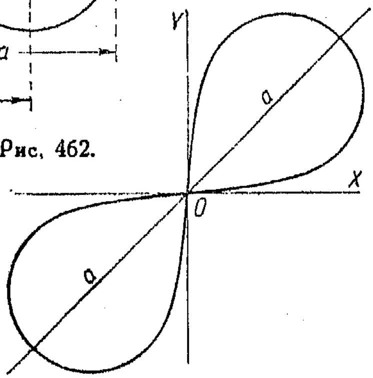


Рис. 463.

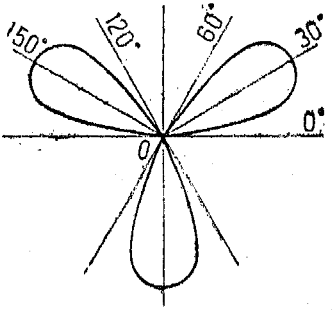


Рис. 464.

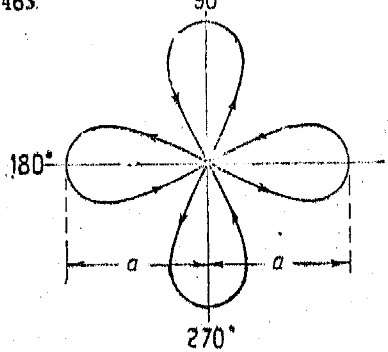


Рис. 465.

823. Лемниската. Геометрическое место точек, произведение расстояний которых от двух неподвижных точек F и F' есть величина постоянная $\left(\text{равная } \frac{1}{2}a^2\right)$, называется *лемнискатой*.

Полярное уравнение кривой имеет вид

[415] $$\rho^2 = a^2 \cos 2\theta.$$

Так как максимальное значение $\cos 2\theta$ есть 1, то максимальная величина ρ есть a.

Если $\cos 2\theta$ отрицателен, то ρ — мнимая величина. Таким образом между прямыми, образующими угол $45°$ и $135°$ с осью X, нет точек кривой (рис. 462).

Если вместо θ подставить $(-\theta)$, то уравнение от этого не изменится. Отсюда следует, что кривая симметрична по отношению к полярной оси.

Если $\rho = 0$, то $\cos 2\theta = 0$ и $\theta = 45°$ или $135°$, следовательно кривая проходит через полюс при этих значениях угла.

Уравнение $\rho^2 = a^2 \sin 2\theta$ выражает лемнискату, повернутую относительно начала на угол $45°$.

824. Трехлепестная роза. Уравнение этой кривой (рис. 464) имеет вид

[416] $$\rho = a \sin 3\theta.$$

825. Четырехлепестная роза (рис. 465). Уравнение этой кривой таково:

[417] $$\rho = a \cos 2\theta.$$

Глава XXXVII.

ЭМПИРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ.

826. Определение эмпирических уравнений. Кривая, вычерченная на основании данных, полученных из опыта, называется *эмпирической кривой.*

Уравнение, соответствующее кривой, которая в достаточной степени приближается к эмпирической кривой, называется *эмпирическим уравнением.*

Многие явления природы, как это было найдено путем опыта, характеризуются какой-либо из трех основных зависимостей:

1) степенной (n^0 244),
2) показательной (n^0 365),
3) гармонической (n^0 613),

Степенная функция имеет общую форму

$$y-k=m(x-h)^n.$$

Если $n=1$, то уравнение соответствует прямой линии

$$y=mx+b \qquad \text{или} \qquad y=mx.$$

Если $n>0$, то уравнение принадлежит к параболическому типу

$$y-k=m(x-h)^n,$$

причем вершина кривой лежит в точке (h, k). Сюда относятся также частные формы:

$$y=mx^n, \quad y=mx^n+b, \quad y=cx^2+bx+a.$$

Если $n<0$, то уравнение принадлежит к гиперболическому типу

$$y-k=m(x-h)^{-n},$$

причем центр соответствующей кривой лежит в точке (h, k).

К этому типу относятся частные случаи

$$y=\frac{a}{x^n}, \quad y=\frac{a}{x^n}+b, \quad xy=bx+ay.$$

Последняя форма приводится к виду

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1.$$

827. Во всех случаях, когда требуется найти эмпирическое уравнение, рекомендуется сначала вычертить кривую в прямоугольных координатах по данным опыта, чтобы получить общее представление об ее характере.

Если геометрическое место приближается к прямой линии, то можно принять уравнение $y=mx+b$.

Если необходимо установить зависимость между переменными не с очень большой точностью, то для определения длины отрезка b, отсекаемого на оси Y, и величины наклона проводят прямую m, наилучшим образом соответствующую средним положениям нанесенных точек.

Для несколько более точного определения выбирают пару точек, которые весьма хорошо представляют данные наблюдения, и соединяют эти точки прямой (n^0 729).

Если эти точки суть (x_1, y_1) и (x_2, y_2), то уравнение прямой будет

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1).$$

Пример. При исследовании механизма выяснилось, что усилие P, необходимое для поднятия груза W, изменялось следующим образом (рис. 466):

W	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
P	2,6	4,0	5,25	6,53	7,85	9,10	10,4	11,65	12,95	14,25

Нанося соответствующие точки на миллиметровую бумагу, можно заметить, что зависимость между переменными выражается прямой, причем

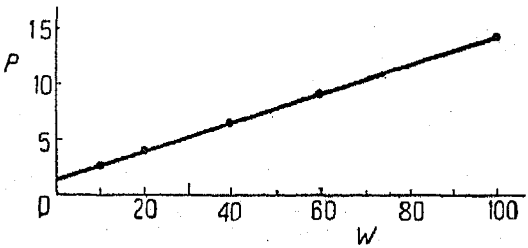


Рис. 466.

удобными для подстановки в уравнение координатами являются $W = 10$ $P = 2{,}6$ и $W = 100$, $P = 14{,}25$. Таким образом получим:

$$y - 14{,}25 = \frac{14{,}25 - 2{,}6}{100 - 10}(x - 100).$$

$$y = 0{,}129x + 1{,}3$$

$$P = 0{,}129W + 1{,}3$$

828. Способ наименьших квадратов. Если измерения произведены более тщательно и требуется составить более точное уравнение, то необходимо произвести следующие вычисления (воспользовавшись выводами теории метода наименьших квадратов).

Взяв данные предыдущей задачи, подставим их попарно в уравнение $y = mx + b$, в результате чего получим десять уравнений:

$$\begin{aligned} 2{,}6 &= 10m + b & 9{,}1 &= 60m + b \\ 4 &= 20m + b & 10{,}4 &= 70m + b \\ 5{,}25 &= 30m + b & 11{,}65 &= 80m + b \\ 6{,}53 &= 40m + b & 12{,}95 &= 90m + b \\ 7{,}85 &= 50m + b & 14{,}25 &= 100m + b \end{aligned}$$

Умножаем каждое уравнение на коэффициент при m и сложим результаты.

Имеем:

$$5713{,}7 = 38\,500m + 550b.$$

Умножаем каждое из уравнений на коэффициент при b и сложим результаты, тогда найдем:

$$84{,}58 = 550m + 10b.$$

Решая полученные уравнения относительно m и b, найдем:

$$m = 0{,}1287$$
$$b = 1{,}380.$$

Теперь уравнение примет вид

$$P = 0{,}1287\,W + 1{,}380.$$

Итак, *способ наименьших квадратов* можно формулировать следующим образом:

1. Составим ряд уравнений первой степени путем подстановки данных, полученных из опыта, в общее уравнение.

2. Если можно получить столько же уравнений, сколько имеется искомых постоянных, то, решая их совместно, найдем значения этих постоянных. Если число уравнений больше числа искомых постоянных, то следует умножить каждое уравнение на коэффициент при первой постоянной и сложить полученные уравнения. Продолжая описанный процесс требуемое число раз, получим столько уравнений, сколько их требуется для определения постоянных.

3. Решим совместно полученные уравнения.

4. Подставив найденные постоянные в общее уравнение, получим нужное эмпирическое уравнение.

829. Зависимости, приводимые к прямолинейным. Уравнения, имеющие графики не в виде прямых (при вычерчивании их в прямоугольных координатах), могут быть обращены в линейные, если воспользоваться различными видами координат, являющихся функциями x и y.

Пусть, например, имеется уравнение

$$y = a + bx^2.$$

Обозначив x^2 через u, получим линейное уравнение

$$y = a + bu.$$

Предположим, что из опыта мы получили следующие соотношения между сопротивлением и скоростью:

V	0	10	20	30	40	50
R	510	800	1720	3300	5300	8100

Найдя соответствующие точки в прямоугольной системе координат, видим, что они располагаются на кривой, близкой к параболе, следовательно зависимость между переменными выражается формулой:

$$y = a + bx^2.$$

Пусть $u = V^2$ и $y = R$, тогда, преобразовав указанные выше числа, составим таблицу:

u	100	400	900	1600	2500
R	800	1720	3300	5300	8100

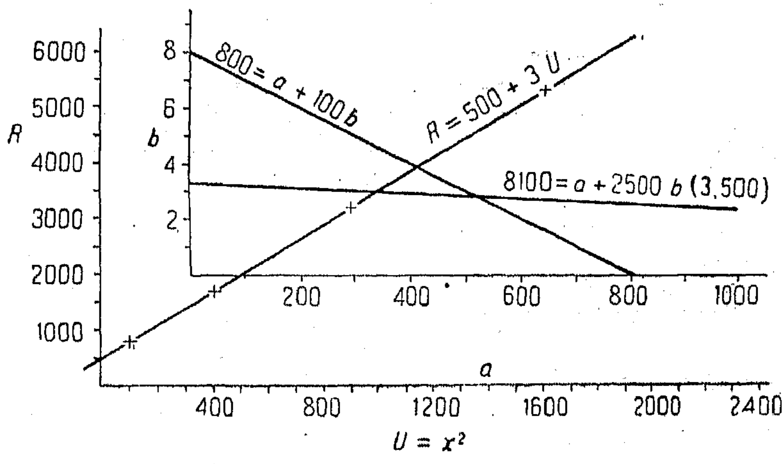


Рис. 467.

Проведем на-глаз прямую, наилучше приближающуюся в среднем к данной системе точек.

Эмпирическое уравнение может теперь быть найдено, если определить постоянные, соответствующие этой прямой, и подставить общее уравнение.

Обычно для этого бывает достаточно двух точек, например:

$$800 = a + 100b$$

$$8100 = a + 2500b,$$

откуда

$$a = 500, \qquad b = 3{,}00.$$

Подставляя эти величины в уравнение

$$R = a + bu,$$

получим

$$R = 500 + 3u = 500 + 3V^2.$$

Можно построить графики каждого из указанных выше уравнений, служащих для определения a и b, для чего будем откладывать по оси общие величины a, а по ординатам — величины b. Пересечение прямых даст значение a и b, удовлетворяющее обоим уравнениям (рис. 467).

Если требуется большая степень точности, то следует воспользоваться методом наименьших квадратов (см. предыдущий n⁰).

830. Описанный способ приведения уравнений различного вида к уравнению прямой весьма удобен во многих случаях практики. Пусть, например, в результате нанесения точек на миллиметровую бумагу представляется вероятным, что зависимость между переменными может быть выражена равенством

$$y^3 = ax^2 + b.$$

Полагая $y^3 = v$ и $x^2 = u$, проводим соответствующую прямую, чтобы убедиться, как это согласуется с исходными данными. Для установления истинного вида зависимости может потребоваться произвести много пробных попыток такого рода.

Уравнения вида

$$y = a + \frac{b}{x}$$

могут быть приведены к линейному виду путем подстановки

$$u = \frac{1}{x}.$$

Уравнения вида

$$xy = bx + ay$$

приводятся к линейному виду посредством деления на xy.

При этом получаем:

$$1=\frac{a}{x}+\frac{b}{y}.$$

Полагаем

$$u=\frac{1}{x} \quad \text{и} \quad v=\frac{1}{y}.$$

Можно поступить иначе. Деля $xy=bx+ay$ на x, имеем:

$$y=b+\left(\frac{y}{x}\right).$$

Положив $u=\frac{y}{x}$, приводим зависимость между x и y к линейному виду.

В линейных уравнениях необходимо определить две постоянные; для этого нужно иметь два независимых условия, связывающие их. Подстановка результатов двух наблюдений позволяет определить зависимость между ними, так как указанные условия дадут возможность составить систему двух уравнений.

Как это легко заметить, описанному преобразованию к линейному виду могут быть подвергнуты лишь те уравнения, в которых нужно определить две постоянные.

831. Степенные функции, выражаемые общим уравнением

$$y-k=a(x-h)^n,$$

могут быть представлены в линейной форме логарифмированием, так как

$$\lg(y-k)=\lg a+n\lg(x-h).$$

Положив

$$v=\lg(y-k), \quad u=\lg(x-h),$$

имеем:

$$v=\lg a+nu,$$

где $\lg a$ — величина постоянная.

Этот метод объясняет удобство пользования логарифмической координатной бумагой. Следует заметить, что на ней вместо значений u и v указаны соответствующие логарифмам величины x и y.

Таким образом, если есть основания предполагать степенную зависимость между переменными, то рекомендуется наносить значения переменных непосредственно на логарифмическую бумагу.

Пример. Предположим, что приведенные ниже результаты опыта подчиняются закону

$$y = ax^n$$

x	5	10	20	40	60	80	100
y	97	553	3130	17700	48800	100000	175000

Логарифмируя уравнение, находим:

$$\lg y = \lg a + n \lg x.$$

Положим

$$v = \lg y, \quad C = \lg a, \quad u = \lg x.$$

Соответствующее линейное уравнение будет иметь вид:

$$v = nu + C.$$

$u\ (=\lg x)$	0,699	1,00	1,301	1,602	1,778	1,903	2,00
$v\ (=\lg y)$	1,9868	2,743	3,496	4,248	4,688	5,000	5,243

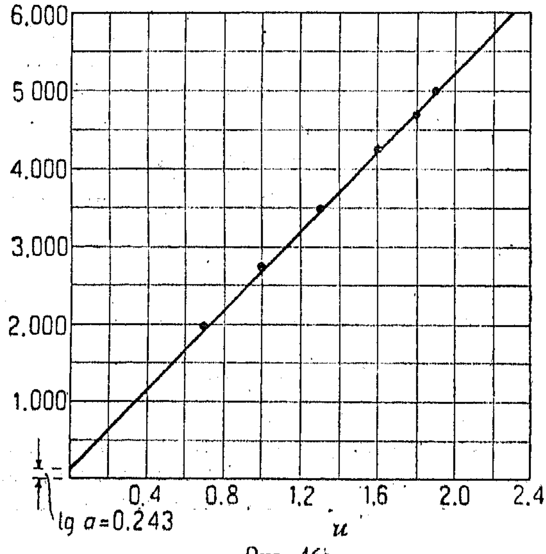


Рис. 468.

Нанося эти числа на миллиметровую бумагу, где по абсциссам откладываются u, а по ординатам — v (рис. 468), видим из рисунка, что отрезок, отсекаемый прямой на оси Y, равен (в масштабе ординат) 0,243. Таким образом свободный член C, соответствующий $\lg a$, равен 0,243.

Наклон прямой оказывается равным 2,51, следовательно $n = 2,5$.

Уравнение прямой (для переменных u и v) имеет вид:

$$v = 2,5\,u + 0,243$$

или

$$\lg y = 0,243 + 2,5 \lg x$$

$$C = \lg a = 0,243, \text{ откуда } a = 1,75.$$

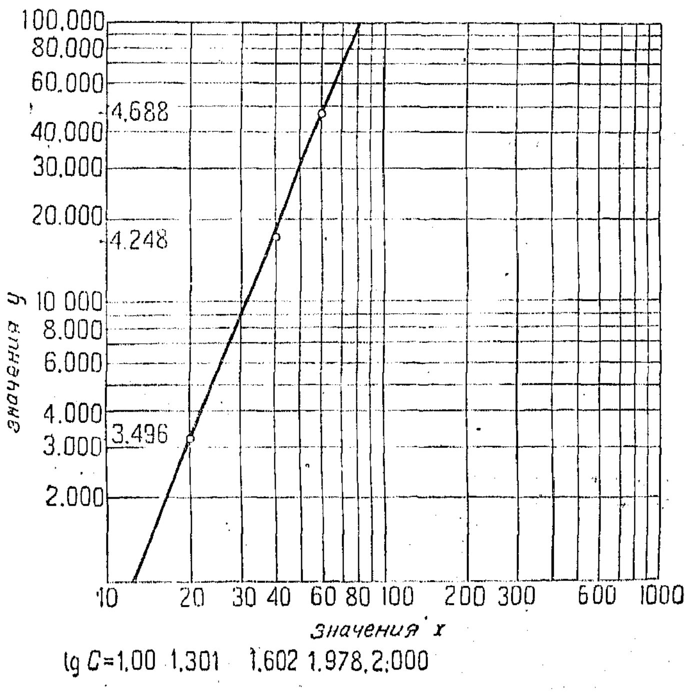


Рис. 469

Таким образом искомая зависимость выражается формулой

$$y = 1,75\,x^{2,5}.$$

Соотношения, выражаемые указанным уравнением, могут быть вычерчиваемы на стандартной логарифмической бумаге. В этом случае вместо логарифмов можно отмечать самые значения переменных, а результаты читаются прямо по шкалам, так как при постановке отметки какой-либо точки здесь автоматически находятся соответствующие логарифмы.

На рис. 469 показан график степенной функции, вычерченный на логарифмической координатной бумаге, причем наклон прямой непосредственно определяет показатель степени при независимой переменной, а точка пересечения с осью X дает значение ее коэффициента при ней.

Пример. Покажем применение метода наименьших квадратов к случаю степенной функции $y = ax^n$.

x	4	7	11	15	21
y	28,6	79,4	182	318	589

Логарифмируя, имеем:

$\lg x = u$	0,602	0,845	1,04	1,18	1,32
$\lg y = v$	1,456	1,900	2,26	2,50	2,77

Составим уравнения вида

$$v = nu + C.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} 1,456 &= 0,602\,n + C \\ 1,900 &= 0,845\,n + C \\ 2,26 &= 1,04\,n + C \\ 2,50 &= 1,18\,n + C \\ 2,77 &= 1,32\,n + C \end{aligned}$$

Умножим каждое уравнение на коэффициент при соответствующем и сложим результаты:

$$\begin{aligned} 0,876 &= 0,362\,n + 0,602\,C \\ 1,606 &= 0,714\,n + 0,845\,C \\ 2,352 &= 1,084\,n + 1,04\,C \\ 2,94 &= 1,383\,n + 1,18\,C \\ 3,662 &= 1,748\,n + 1,32\,C \\ \hline 11,436 &= 5,291\,n + 4,987\,C \end{aligned}$$

Складывая первоначальные уравнения, где коэффициентом при C является во всех случаях единица, имеем:

$$10,886 = 4,986\,n + 5C.$$

Решая оба эти уравнения совместно, получим из

$$\begin{aligned} 11,436 &= 5,294\,n + 4,987\,C \\ 10,886 &= 4,986\,n + 5,000\,C \end{aligned}$$

следующее:

$$n = \mathbf{1,816} \quad C = \lg a = 0,366, \quad \text{откуда} \quad a = 2,32.$$

Таким образом искомое уравнение будет:

$$y = 2,32\,x^{1,816}.$$

832. Степенные функции, в которых n — величина отрицательная. Эти функции называются функциями *гиперболического* типа и могут быть найдены точно таким же образом, как и рассмотренные в предыдущем n°.

Нижеследующая таблица дает объем V в кубических футах одного фунта насыщенного пара, при давлении P фунтов на квадратный дюйм, причем требуется определить зависимость, связывающую эти величины.

На основании опыта можно предположить, что эта зависимость имеет вид

$$PV^n = C$$

или

$$P = CV^{-n}.$$

V	26,43	22,40	19,08	16,32	14,04	12,12	10,51	9,147
P	14,7	17,53	20,80	24,54	28,83	33,71	39,25	45,49

Взяв логарифмы, получим:

$\lg V$	1,4221	1,3502	1,2806	1,2127	1,1473	1,0835	1,0216	0,9612
$\lg P$	1,1673	1,2430	1,3181	1,3900	1,4599	1,5277	1,5938	1,6580

Линейная форма зависимости между переменными будет

$$\lg P = -n \lg V + C.$$

Вместо того чтобы выбирать две точки на прямой и подставлять их координаты в общее уравнение с целью после совместного решения полученных уравнений найти значения постоянных, часто пользуются так называемым *методом средних*, который дает более точное приближение. Однако этот последний все же менее точен, чем метод наименьших квадратов (n° 828).

Суть метода средних состоит в следующем:

Подставляем все отсчеты, полученные из опыта, в уравнения прямых и располагаем полученные уравнения в две группы.

Сложим члены этих групп, причем получим два уравнения. Решаем их совместно, как в предыдущих примерах, причем пользуемся подстановкой

$$\lg P = v, \quad \lg V = u, \quad \lg a = C$$

$$v = nu + C$$

$$\begin{array}{r}
1{,}1673 = 1{,}4221\,n + C \\
1{,}2430 = 1{,}3502\,n + C \\
1{,}3181 = 1{,}2806\,n + C \\
1{,}3900 = 1{,}2127\,n + C \\
\hline
5{,}1184 = 5{,}2656\,n + 4C
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
1{,}4599 = 1{,}1473\,n + C \\
1{,}5277 = 1{,}0835\,n + C \\
1{,}5938 = 1{,}0216\,n + C \\
1{,}6580 = 0{,}9612\,n + C \\
\hline
6{,}2394 = 4{,}2136\,n + 4C
\end{array}$$

Решая полученные уравнения совместно, имеем:

$$n = -1{,}064$$

$$C = \lg a = 2{,}6764,$$

откуда

$$a = 475.$$

Уравнение имеет вид:

$$P = 475\,V^{-1{,}064}$$

или

$$PV^{1{,}064} = 475.$$

Если соответствующие точки не лежат на прямой, в случае, когда мы предположили зависимость $y = ax^n$, но располагаются по кривой, загибающейся вверх при возрастании x, то следует выяснить, нельзя ли преобразовать график к прямолинейной форме путем вычитания некоторой постоянной k из значений y.

Если какая-нибудь из этих попыток покажет, что график выпрямляется, то подбирают значение k, обращающее этот график в линию, которую можно принять за прямую.

Таким образом уравнение можно будет привести к виду

$$y - k = ax^n \quad \text{или} \quad y = ax^n + k,$$

Точно также, если график загибается вниз, то, прибавляя постоянную k, приведем уравнение к виду

$$y + k = ax^n \quad \text{или} \quad y = ax^n - k.$$

Другой метод спрямления графика состоит в прибавлении постоянной k ко всем значениям независимой переменной. При этом все точки графика переместятся справа налево на различные расстояния. Если этот метод окажется удовлетворительным, то уравнение будет иметь вид

$$y = C(x - h)^n.$$

Некоторые кривые могут быть выпрямлены посредством употребления двух добавочных постоянных в тех случаях, когда одна постоянная не приводит к нужному результату.

833. Эмпирические уравнения вида

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots + gx^n.$$

Подставляя в указанное уравнение значения переменных, полученных из опыта, можно получить достаточное число уравнений, составляющих систему и могущих служить для определения величины постоянных a, b, c, d и т. д.

Необходимо иметь по крайней мере столько уравнений, сколько требуется определить постоянных. Для обычно требующейся степени точности достаточно определить три члена. Если же требуется бо́льшая степень точности, то определяют большее число их.

Некоторые члены могут отсутствовать или так незначительно влиять на результат, что ими можно с успехом пренебречь.

Пример Из опыта получены следующие данные:

x	1	2	3	4	5
y	14	64	182	393	742

Пусть требуется определить четыре постоянных; тогда составляем четыре уравнения:

$$\begin{aligned} y &= a + bx + cx^2 + dx^3 \\ 14 &= a + b + c + d \\ 64 &= a + 2b + 4c + 8d \\ 182 &= a + 3b + 9c + 27d \\ 398 &= a + 4b + 16c + 64d. \end{aligned}$$

Решая совместно указанные уравнения, имеем:

$$a = 2,\ b = 3,\ c = 4,\ d = 5.$$

Уравнение имеет вид:

$$y = 2 + 3x + 4x^2 + 5x^3.$$

834. Закон естественного роста или показательный выражается формулами

$$y = ab^x \quad \text{или} \quad y = ae^{kx}.$$

Уравнения этого вида могут быть преобразованы в линейные посредством логарифмирования обеих частей:

$$\lg y = kx \lg e + \lg a,$$

но $\lg e$ — постоянная, равная 0,4343, поэтому

$$\lg y = 0{,}4343\ kx + \lg a.$$

Рис. 470.

Последнее уравнение является линейным по отношению к $\lg y$ и x и дает возможность определить искомую зависимость.

Употребляя полулогарифмическую бумагу, можно начертить соответствующую прямую, так как ординаты будут откладываться на логарифмической шкале, а абсциссы — на обычной, имеющей равные деления.

Пример. Опыты Тоуэра дали следующие соотношения между величиной коэффициента трения и температурой подшипника

$t°$	120	110	100	90	80	70	60
μ	0,0051	0,0059	0,0071	0,0085	0,0102	0,0124	0,0148

Предполагая, что между переменными существует зависимость вида

$$\mu = ae^{kt},$$

имеем

$$\lg \mu = 0{,}4343\,kt + \lg a.$$

Составляя таблицу из приведенных выше данных, имеем:

t	120	110	100	90	80	70	60
$\lg \mu$	$\bar{3},7076$	$\bar{3},7709$	$\bar{3},8513$	$\bar{3},9294$	$\bar{2},0086$	$\bar{2},0934$	$\bar{2},1703$

Составим семь уравнений, в которые подставим соответствующие значения t и $\lg \mu$.

Затем пользуясь методом средних, найдем два уравнения. Решая последние, имеем в результате (рис. 470).

$$\mu = 0{,}2113\,e^{-0{,}0184\,t}$$

Если требуется большая степень точности, то следует пользоваться методом наименьших квадратов.

На рис. 471 показана прямая, нанесенная на полулогарифмической бумаге.

Указанная бумага весьма полезна для коммерческих вычислений. Так как изменение ординаты графика характеризует

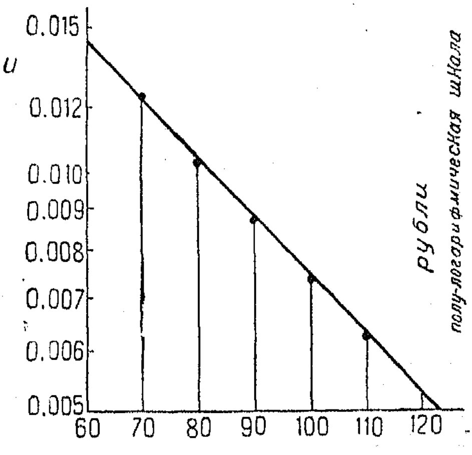


Рис. 471.

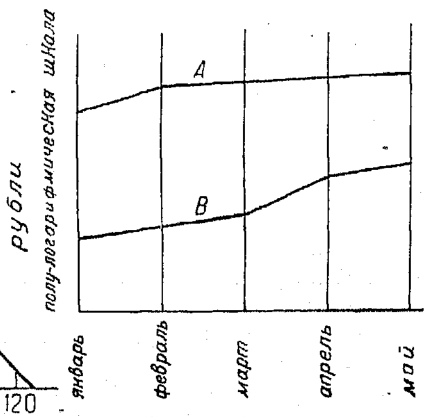


Рис. 472.

относительное изменение функции y, то кривая показывает, в каких случаях был получен наибольший процент прибыли.

Если, например, график A на рис. 472 показывает продажную цену товара, а B — себестоимость в течение известного промежутка времени, то оценка экономического положения может быть сделана с одного взгляда

Глава XXXVIII.

ПРИЛОЖЕНИЕ КООРДИНАТ К ГЕОМЕТРИИ ТРЕХ ИЗМЕРЕНИЙ.

Аналитическая геометрия в пространстве.

835. Аналитическая геометрия в пространстве изучает при помощи аналитического метода тела и поверхности в пространстве, что вызывает необходимость рассматривать три измерения и пользоваться тремя переменными.

Если одна из переменных равна нулю, то аналитические соотношения между оставшимися двумя будут такими же, как в случае, когда мы рассматривали две переменные.

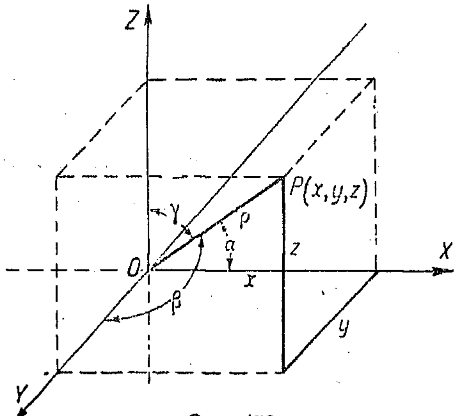


Рис. 473.

Если пользуются прямоугольными координатами, то применяют три пересекающиеся взаимно перпендикулярные плоскости, называемые координатными плоскостями, XOY, YOZ и ZOX.

Указанные координатные плоскости пересекаются по трем взаимно перпендикулярным прямым OX, OY и OZ, называемым координатными осями.

Обычный метод определения положения точки $P(x, y, z)$ показан на рис. 473. Стрелки указывают положительное направление осей.

836. Другой метод определения положения точки в пространстве заключается в том, что задается ее радиус-вектор, т. е. расстояние до начала координат, и углы, образуемые этим радиусом-вектором с координатными осями. Эти углы называются направляющими углами.

В этом случае точка P обозначается условно, таким образом:

$$P(\rho, \alpha, \beta, \gamma).$$

Проектируя радиус-вектор на координатные оси, найдем равенства, связывающие указанную систему с системой прямоугольных координат, а именно:

[418]
$$x = \rho\cos\alpha, \quad y = \rho\cos\beta, \quad z = \rho\cos\gamma.$$

Кроме того из показанного на рисунке параллелепипеда имеем:

[419] $$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Решая совместно эти уравнения, получим:

$$\rho^2 = \rho^2 \cos^2\alpha + \rho^2 \cos^2\beta + \rho^2 \cos^2\gamma,$$

откуда

[420] $$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Так как

$$x = \rho\cos\alpha, \quad y = \rho\cos\beta, \quad z = \rho\cos\gamma$$

и

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

то имеем:

[421] $$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{\rho}$$

[422] $$\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^4 + z^2}} = \frac{y}{\rho}$$

[423] $$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{z}{\rho}.$$

837. Расстояние между двумя точками в пространстве. Пусть заданы две точки P_1 и P_2 (рис. 474). Из рис. 474 имеем

$$\overline{P_1P_2}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{BC}^2$$

$$AB = x_2 - x_1$$

$$BC = y_2 - y_1$$

$$CD = z_2 - z_1.$$

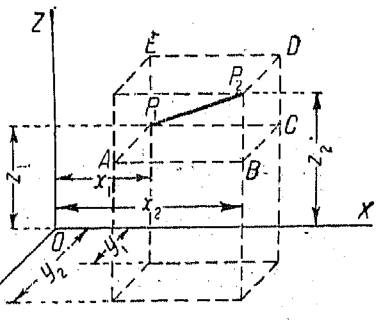


Рис. 474.

Следовательно

$$\overline{P_1P_2}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Обозначив расстояние P_1P_2 через d, получим окончательно

[424] $$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Направление линии P_1P_2, которая не проходит через начало координат, определяется „углами направления" α, β и γ прямой, проходящей через начало и параллельной P_1P_2.

Ребра параллелепипеда, показанного на рис. 474, параллельны координатным осям:

$$\alpha = \angle CP_1P_2,\ \beta = \angle AP_1P_2,\ \gamma = \angle EP_1P_2,$$

поэтому

$$[425] \quad \cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}, \quad \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{d}, \quad \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{d}.$$

Возвышая в квадрат последнее равенство и складывая, найдем попрежнему

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

838. Углы между двумя радиусами-векторами или между двумя прямыми. Пусть через начало координат проведены прямые, параллельные данным прямым OP_1 и OP_2 (рис. 475), причем точка P_1 определяется координатами ρ_1, α_1, β_1, γ_1, а точка P_2 — координатами ρ_2, α_2, β_2 и γ_2 и пусть, кроме того, θ — угол между прямыми OP_1 и OP_2.

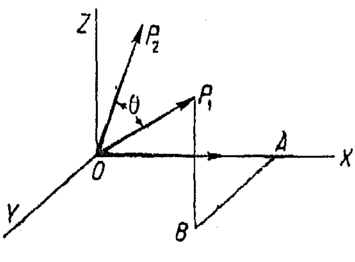


Рис. 475.

Если прямоугольные координаты P_1 суть (x_1, y_1, z_1), то:

$$OA = x_1,\ AB = y_1,\ BP_1 = z_1.$$

Проектируя OP_1 и $OA + AB + BP_1$ на OP_2, имеем:

$$\rho_1 \cos\theta = x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2. \tag{1}$$

Проектируя OP_1 на координатные оси, получим:

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho_1\cos\alpha_1 \\ y &= \rho_1\cos\beta_1 \\ z &= \rho_1\cos\gamma_1 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1) и деля на ρ_1, находим:

$$\cos\theta = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2.$$

Если $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, и $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ суть углы направления двух прямых то в случае их параллельности

$$\alpha_1 = \alpha_2;\ \beta_1 = \beta_2;\ \gamma_1 = \gamma_2,$$

а в случае перпендикулярности

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 = 0.$$

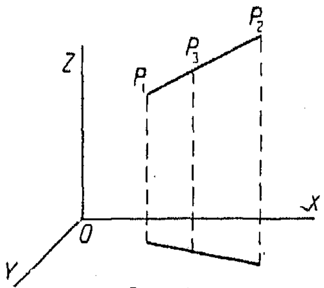


Рис. 476.

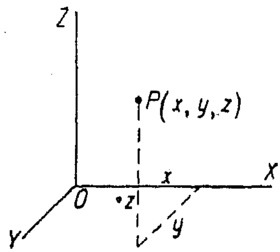


Рис. 477.

839. Деление отрезка прямой в данном отношении. Пусть требуется разделить отрезок P_1P_2 точкой P_3 в отношении $\frac{m_1}{m_2}$, т. е. пусть

$$\frac{P_1P_3}{P_3P_2} = \frac{m_1}{m_2}.$$

Тогда

$$x_3 = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$$

$$y_3 = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$$

$$z_3 = \frac{m_1z_2 + m_2z_1}{m_1 + m_2}$$

840. Поверхности. Геометрическое место точек, соответствующих уравнению с тремя переменными, называется поверхностью. Легко видеть, что если в заданном уравнении, например $x^2 + y^2 - z = 10$, придавать x и y различные значения и находить значения z, то точки P будут располагаться на некоторой поверхности.

841. Некоторые уравнения с одной переменой. Уравнение $z = 0$ определяет координатную плоскость XOY.

Уравнение $y=0$ определяет плоскость XOZ.

Уравнение $x=0$ определяет плоскость YOZ.

Уравнение $z=k$ соответствует плоскости, параллельной XOY и отстоящей от нее на расстоянии k единиц.

Точно также $x=k$ соответствует плоскости, параллельной YOZ и лежащей на расстоянии k единиц от нее, а уравнение $y=k$ соответствует плоскости, параллельной XOZ.

Всякое алгебраическое уравнение с одной переменной соответствует одной или большему числу плоскостей, параллельных координатным.

842. Уравнение с двумя переменными первой степени соответствует плоскости, перпендикулярной к координатной плоскости этих переменных.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$3x+2y=5.$$

В плоскости XOY этому уравнению соответствует прямая AB (рис. 478). Если из какой-либо точки этой прямой P восставить перпендикуляр к плоскости XOY, то каждая точка Q на нем будет иметь те же самые значения x и y, что и другая точка, лежащая на этом же перпендикуляре. Эти значения переменных удовлетворяют уравнению

$$3x+2y=5.$$

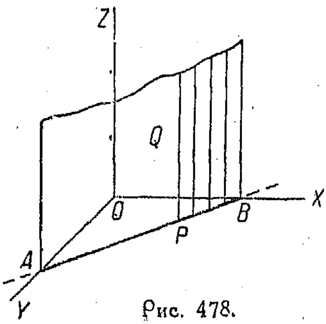


Рис. 478.

Далее, если PQ движется вдоль AB, оставаясь всегда перпендикулярной к плоскости XOY, или параллельной оси Z, то координаты любой точки получаемой при этом поверхности удовлетворяют уравнению $3x+2y=5$, которое очевидно и является уравнением плоскости.

843. Любое уравнение с двумя переменными (рис. 479). Рассмотрим уравнение

$$y^2+z^2=25.$$

Точка $P(y, z)$ принадлежит окружности, лежащей в плоскости YZ. Если провести перпендикулярно плоскости YZ прямую PQ, то любая точка Q, лежащая на ней, будет иметь те же самые y и z, что и точка P, а следовательно будет удовлетворять уравнению $y^2+z^2=25$. Так как мы взяли точку P произвольно, задавшись только условием, чтобы она лежала на окружности, то наше уравнение соответствует прямому круглому цилиндру, образующие которого параллельны оси X, а пересечение с плоскостью YZ представляет собой упомянутую выше окружность.

Совершенно аналогичным образом можно доказать, что геометрические места точек, удовлетворяющих уравнениям

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$y=2pz,$$

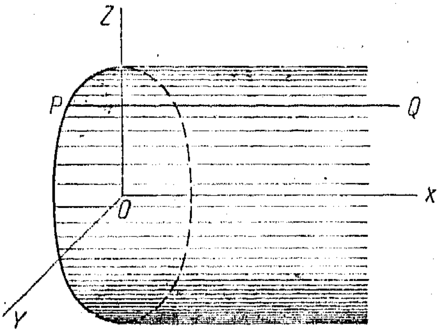


Рис. 479.

суть цилиндрические поверхности, образующие которых перпендикулярны к плоскости, соответствующей этим переменным, а пересечение их с плоскостями суть соответственно эллипс, гипербола и парабола. Вообще же, всякое уравнение с двумя переменными в аналитической геометрии в пространстве соответствует цилиндрической поверхности. Так как образующие перпендикулярны плоскости, к которой относятся переменные, то они параллельны оси третьей переменной. Образующая линия PQ называется *элементом*, а геометрическое место, лежащее в плоскости, — *директрисой* или направляющей цилиндрической поверхности.

844. Кривые в пространстве. Геометрическое место, которому соответствуют два уравнения с тремя переменными, является кривой, расположенной в пространстве.

Так как уравнение с тремя переменными соответствует поверхности, то очевидно, что система из двух уравнений удовлетворяется только координатами тех точек, которые лежат на пересечении этих поверхностей. Пересечение двух поверхностей есть кривая, которая и выражается системой двух уравнений.

Прямые в пространстве. Так как $y=k$ есть уравнение плоскости, параллельной XOZ, и так как $z=k$ соответствует плоскости, параллельной XOY, то их пересечение есть прямая, параллельная оси X.

Точно также:

$z=k$ и $x=k$ выражают линию, параллельную оси Y;

$x=k$ и $y=k$ выражают прямую, параллельную оси Y.

В частности

$x=0, y=0$ — уравнения оси Z; $x=0, z=0$ — уравнения оси Y;

$y=0$ и $z=0$ — уравнения оси X.

Более подробные сведения о прямой см. n⁰ 725.

845. Шар. Пусть $C(h, k, l)$ — центр шара радиуса r.

Так как любая точка шара находится в расстоянии r от центра, то

$$CP=r.$$

Из формулы (424) имеем:

[426] $$r=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2}$$

или

$$(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=r^2.$$

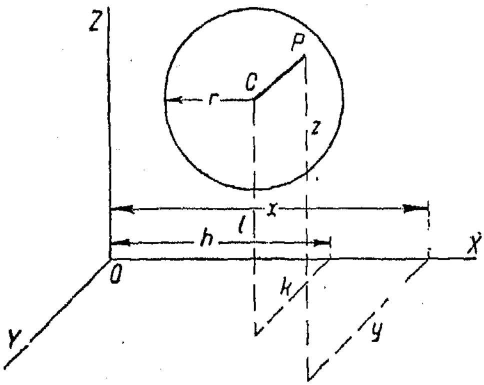


Рис. 480.

Это и есть уравнение шара, центр которого лежит в C (h, k, l), а радиус равен r (рис. 480).

Если центр расположен в начале координат, то $h=0$, $k=0$, $l=0$ и уравнение принимает вид:

[427] $$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

Раскрывая скобки в уравнении

$$(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=r^2,$$

получим

$$x^2+y^2+z^2-2hx-2ky-2lz+h^2+k^2+l^2-r^2=0.$$

Это уравнение можно представить также в виде:

$$x^2+y^2+z^2+Gx+Hy+Kz+L=0.$$

Дополняя соответствующие члены до квадратов, имеем:

[428] $$\left(x+\frac{G}{2}\right)^2+\left(y+\frac{H}{2}\right)^2+\left(z+\frac{K}{2}\right)^2=$$
$$=\frac{1}{4}(G^2+H^2+K^2-4L).$$

Последнее уравнение принадлежит к виду

$$(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=r^2,$$

причем координаты центра суть:

$$h=-\frac{G}{2},\ k=-\frac{H}{2},\ l=-\frac{K}{2},$$

а радиус равен

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{G^2+H^2+K^2-4L}$$

при условии, что $G^2+H^2+K^2-4L>0$.

846. Проекции. Через кривую, расположенную в пространстве, может проходить сколько угодно поверхностей, причем уравнение каждой пары их определяет эту кривую.

Рассмотрим две поверхности

$$x^2+y^2+z^2=25$$
$$z=3.$$

Первое представляет собой уравнение шара радиуса 5 с центром в начале координат. Последнее же соответствует плоскости, параллельной XOY и проходящей над ней в расстоянии 3 единиц (рис. 481).

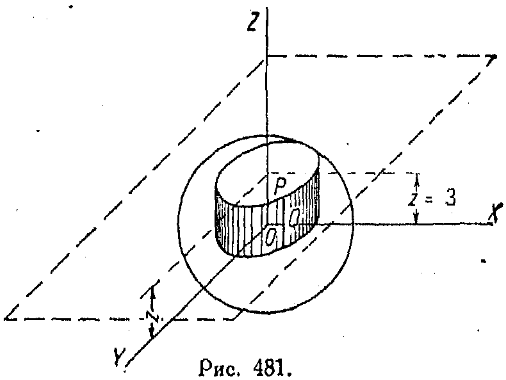


Рис. 481.

Если координаты какой-либо точки удовлетворяют обоим уравнениям, то они удовлетворяют также уравнению $x^2+y^2=16$, полученному из них посредством подстановки $z=3$ в $x^2+y^2+z^2=25$.

Так как $x^2+y^2=16$ соответствует поверхности, проходящей через пересечение указанных ранее поверхностей, то очевидно, что это уравнение соответствует цилиндру с образующей, параллельной плоскости XY. Таким образом можно сказать, что подстановка $z=k$ (где k—постоянная) в уравнение поверхности дает уравнение цилиндра, проходящего через пересечение плоскости $z=k$ и данной поверхности, или уравнения проекции на плоскость XY линии, полученной от пересечения $z = k$ и поверхности.

Описанным способом можно определить характер кривой, получающейся в результате пересечения данной поверхности плоскостью, параллельной координатной.

847. Проекция кривой на координатную плоскость. Повторяя рассуждения, приведенные в предыдущем n°, можно найти уравнение проекции на плоскость XY кривой, определяемой двумя уравнениями, посредством исключения переменной z из этих последних. Уравнение, полученное в результате, и является уравнением искомой проекции.

Точно также для проектирования на плоскость XZ исключаем y, а для проекции на плоскость YZ исключаем из двух уравнений переменную x.

Итак, кривую можно представить двумя уравнениями с двумя переменными в каждом.

Проекция геометрического места на координатную плоскость называется *изображением* его на этой плоскости.

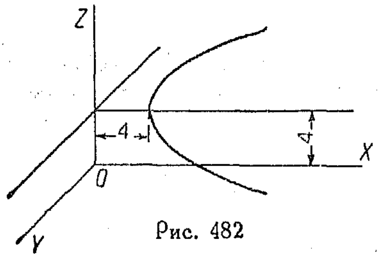


Рис. 482

Для нахождения уравнения кривой, по которой пересекается поверхность с плоскостью XY, примем $z = 0$, для плоскости XZ примем $y = 0$, для плоскости YZ примем $x = 0$.

Пример. Определить вид кривой, по которой поверхность $y^2 + z^2 = 4x$ пересекается с плоскостью $z = 4$ (рис. 482).

Исключая посредством подстановки $z = 4$ переменную z, имеем:

$$y^2 - 4x + 16 = 0.$$

Полученную кривую можно рассматривать как кривую, заданную уравнениями

$$y^2 - 4x + 16 = 0$$
$$z = 4$$

или

$$y^2 - 4x + 16 = 0$$
$$y^2 + z^2 = 4x \text{ }^{1)}.$$

Если взять первое, видим, что $y^2 - 4x + 16 = 0$ есть изображение на плоскости XY, являющееся параболой.

---

1) Система уравнений

$$y^2 - 4x + 16 = 0 \qquad (*)$$
$$y^2 + z^2 = 4x$$

848. Пересечение поверхности с координатными осями. Чтобы найти:

пересечение с осью X, полагаем $y=0$, $z=0$
" " " Y, " $x=0$, $z=0$
" " " Z, " $x=0$, $y=0$.

Рекомендуется исследовать симметричность поверхности, для чего делаем подстановки $(-x)$ вместо x, $(-y)$ вместо y и $(-z)$ вместо z.

Если после такой подстановки уравнение не изменяется, то поверхность соответственно симметрична по отношению к плоскостям YZ, XZ или XY и по отношению к оси X, Y и Z.

849. Поверхность вращения. Поверхность, образующаяся при вращении плоской кривой вокруг прямой, служащей осью, называется *поверхностью вращения*. Отсюда следует, что каждое сечение этой поверхности плоскостью, перпендикулярной к оси, является окружностью, как и путь, проходимый точкой, образующей кривую.

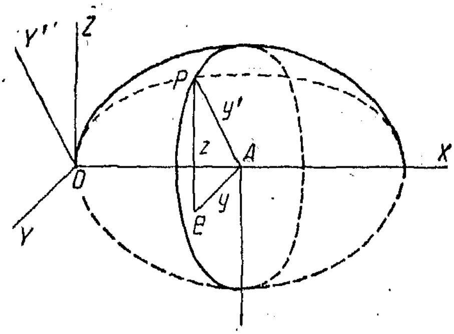


Рис. 483.

Рассмотрим эллипс

$$\begin{cases} x^2+4y^2-12x=0 \\ z=0, \end{cases}$$

который вращается вокруг оси X (рис. 483).

не равносильна системе

$$\begin{matrix} y^2-4x+16=0 \\ z=4. \end{matrix} \qquad (**)$$

В самом деле, исключая y^2 из уравнений (*), приходим к системе

$$\begin{matrix} y^2-4x+16=0 \\ z^2=16, \end{matrix}$$

которая распадается на две

$$\left.\begin{matrix} y^2-4x+16=0 \\ z=4 \end{matrix}\right\} \quad \text{и} \quad \left.\begin{matrix} y^2-4x+16=0 \\ z=-4 \end{matrix}\right\}$$

Первая система есть система (* *).

Прим. ред.

Пусть $P(x, y, z)$ есть точка, принадлежащая поверхности вращения.

Проведем плоскость через ось X и точку P и пусть OY' есть пересечение ее с плоскостью YZ.

Уравнение эллипса, отнесенное к осям OX и OY' как к координатным осям, есть

$$x^2 + 4y'^2 - 12x = 0. \tag{1}$$

Проведем плоскость, перпендикулярную к оси OX и проходящую через P. Из PAB имеем:

$$y'^2 = z^2 + y^2. \tag{2}$$

Подставляя значение y'^2 из (2) в (1), получим:

$$x^2 + 4z^2 + 4y^2 - 12x = 0,$$

которое и является искомым уравнением.

Пример. Вращая прямую $2x + 3z = 12$, $y = 0$ вокруг оси Z, получим конус. Определить его уравнение (рис. 484).

Проведем плоскость через OZ и P, а также плоскость, проходящую через P и перпендикулярную к оси OZ.

Уравнение прямой, лежащей в плоскости ZOX', будет

$$2x' + 3z = 12. \tag{1}$$

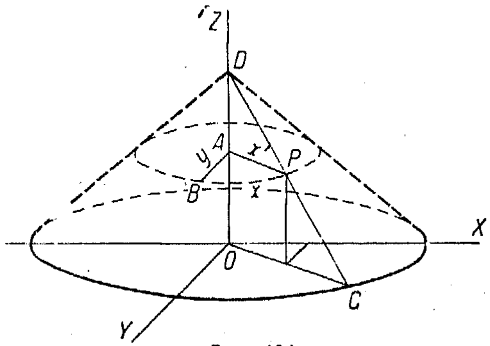


Рис. 484.

Из прямоугольного $\triangle ABP$ имеем:

$$x' = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), получим:

$$2\sqrt{x^2 + y^2} + 3z = 12$$

или

$$\frac{12 - 3z}{2} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

откуда следует, что

$$x^2 + y^2 = \frac{(12 - 3z)^2}{4}.$$

Из первого примера мы видим, что уравнение поверхности вращения получается подстановкой $\sqrt{y^2 + z^2}$ вместо y, а во втором примере мы нашли новое уравнение подстановкой $\sqrt{x^2+y^2}$ вместо x.

Вообще для того, чтобы найти уравнение кривой, следует вычислить корень квадратный из суммы квадратов двух переменных, исключая той, которая откладывается по оси вращения, и подставить его вместо одного из переменных, входящих в уравнение кривой.

Для уравнения, связывающего x и y, при вращении вокруг оси X, следует подставить $\sqrt{y^2+z^2}$ вместо y, так как y и z суть переменные, отличные от x. Величину $\sqrt{y^2+z^2}$ необходимо подставить в уравнение там, где y в него входит.

Сказанное можно формулировать в таком виде:

Если $f(x, y)=0$ есть уравнение кривой в плоскости XY и если ось X является осью вращения, то уравнение поверхности вращения будет

$$f(x, \sqrt{y^2+z^2})=0.$$

Если кривая $f(x, y)=0$ вращается вокруг оси Y, то уравнение соответствующей поверхности будет

$$f(\sqrt{x^2+z^2}, y)=0.$$

Наконец, если кривая $f(y, z)=0$ вращается вокруг оси Z, то получим такое уравнение поверхности вращения:

$$f(\sqrt{x^2+y^2}, z)=0.$$

850. Уравнение конуса. Поверхность конуса получается путем вращения прямой $z=mx+c$ вокруг оси Z.

Подставляя $\sqrt{x^2+y^2}$ вместо x, получим:

$$z=m\sqrt{x^2+y^2}+c \quad \text{или} \quad \sqrt{x^2+y^2}=\frac{z-c}{m},$$

откуда

$$[429] \qquad x^2+y^2=\frac{(z-c)^2}{m^2}.$$

Точно также при вращении прямой $y=mx+k$ вокруг оси X следует сделать подстановку $\sqrt{y^2+z^2}$ вместо y, тогда получим

$$\sqrt{y^2+z^2}=mx+k \quad \text{или} \quad y^2+z^2=(mx+k)^2.$$

851. Сплющенный сфероид. Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

при вращении вокруг малой оси дает сплющенный сфероид. Вращая вокруг оси Z, мы должны сделать подстановку $\sqrt{x^2+y^2}$ вместо x, причем получим:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

или

[430] $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1.$$

852. Вытянутый сфероид. Если вращать эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

вокруг большой оси (оси X), то, подставляя вместо z величину $\sqrt{y^2+z^2}$, получим уравнение вытянутого сфероида

[431] $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1.$$

853. Параболоид вращения есть поверхность, образованная вращением параболы

$$x^2=2pz$$

вокруг ее оси (оси Z).

Подставляя $\sqrt{x^2+y^2}$ вместо x в приведенное уравнение, получим искомое

[432] $$x^2+y^2=2pz.$$

854. Однополый гиперболоид вращения. Однополым гиперболоидом вращения называется поверхность, образованная вращением гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$$

вокруг оси, не пересекающей кривую (оси Z).

Подставляя $\sqrt{x^2+y^2}$ вместо x, получим:

[433] $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1,$$

которое и является искомым уравнением.

855. Двуполый гиперболоид вращения. Двуполым гиперболоидом вращения называется поверхность, образованная вращением гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$$

вокруг оси, пересекающей кривую (оси X).

Подставляя вместо z величину $\sqrt{y^2+z^2}$, найдем искомое уравнение:

[434] $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1.$$

Глава XXXIX.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ТРЕМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ.

Линейные уравнения.

856. Плоскость. Наиболее удобной формой уравнения плоскости является нормальная форма, которую мы сперва и рассмотрим.

Возьмем произвольную плоскость, например ABC (рис. 485).

Проведем прямую ON, перпендикулярную к плоскости ABC, и примем направление от O к N за положительное на этой прямой.

Пусть $OD=p$ есть расстояние от начала координат до плоскости, причем D — точка встречи перпендикуляра ON с этой плоскостью.

Обозначим углы, образуемые ON с осями координат, через α, β и γ и пусть P (x, y, z) — произвольная точка в плоскости. Начертив координаты этой точки, найдем:

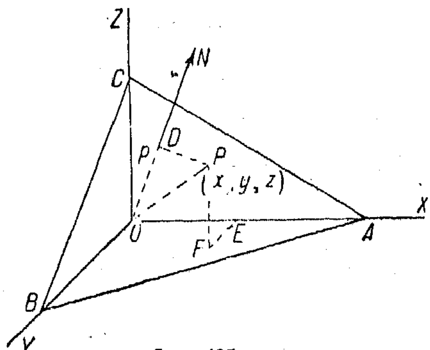


Рис. 485.

$$OE=x,\quad EF=y,\quad FP=z.$$

Проектируя $OE+EF+FP$ и OP на ON, получим:

$$(\text{пр. } OE)+(\text{пр. } EF)+(\text{пр. } FP)=(\text{пр. } OP),$$

откуда

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=p$$

или

[435] $$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.$$

Это и есть нормальная форма уравнения плоскости, где p есть расстояние плоскости от начала координат, α, β и γ — углы, образуемые перпендикуляром, опущенным из начала координат на плоскость, с координатными осями.

857. Общее уравнение первой степени.

[436] $$Ax + By + Cz + D = 0$$

есть уравнение плоскости, потому что его можно привести к нормальной форме.

Умножим уравнение на постоянную k, величину которой определим, сравнивая уравнение

$$kAx + kBy + kCz + kD = 0 \tag{1}$$

с нормальной формой

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \qquad \textbf{[435]}$$

Уравнение (1) совпадает с [435], если можно найти k, удовлетворяющее равенствам:

$$kA = \cos\alpha,\ kB = \cos\beta,\ kC = \cos\gamma \tag{2}$$

$$kD = -p. \tag{3}$$

Возвышая в квадрат (2) и складывая, найдем:

$$k^2(A^2 + B^2 + C^2) = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \text{ (см. n}^0\text{ 837)},$$

откуда

$$k = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Подставляя это выражение в (1), получим:

[437] $$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z = \frac{-D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Следует отметить, что ур-ние [**437**] написано в нормальной форме, причем

$$[438]\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; & \cos\beta=\dfrac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\\ \cos\gamma=\dfrac{C}{\pm\sqrt{A^2+b^2+C^2}}; & p=\dfrac{-D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.\end{cases}$$

Из сказанного ясно, что знак радикала должен быть противоположным знаку при D, так как p должно быть положительным.

Чтобы привести уравнение к нормальному, следует разделить все его члены на

$$\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2},$$

причем знак радикала должен быть противоположен знаку при D.

Коэффициенты при x, y и z в уравнении плоскости пропорциональны косинусам углов α, β и γ, составляемых перпендикуляром к плоскости с осями координат. Таким образом плоскости, выражаемые уравнениями

$$Ax+By+Cz+D=0 \text{ и } A'x+B'y+C'z+D'=0$$

параллельны, если

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}\ ^{1)}$$

и перпендикулярны, если

$$AA'+BB'+CC'=0.$$

---

[1]) Если плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0$$
$$A'x+B'y+C'y+D=0$$

параллельны, то

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'}=\frac{\cos\beta}{\cos\beta'}=\frac{\cos\gamma}{\cos\gamma'}.$$

Отсюда с помощью равенств (438) получаем

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}.$$

Равенство (439) вытекает из равенства

$$\cos 0=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'$$

(см. n⁰ 838), когда в последнем заменим косинусы углов α, β, γ, α', β', γ' их выражениями через коэффициенты.

Прим. ред.

Угол между пересекающимися плоскостями можно найти из формулы

[439] $$\cos\theta = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}.$$

858. Уравнения вида:

$Ax + By + D = 0$ соответствуют плоскости, перпендикулярной к плоскости XY.

$By + Cz + D = 0$ соответствует плоскости, перпендикулярной к плоскости YZ.

$Ax + Cz + D = 0$ соответствует плоскости, перпендикулярной к плоскости XZ.

Уравнение в форме:

$Ax + D = 0$ соответствует плоскости, перпендикулярной к оси X.

$By + D = 0$ соответствует плоскости, перпендикулярной к оси Y.

$Cz + D = 0$ соответствует плоскости, перпендикулярной к оси Z.

Если уравнение имеет вид $D = 0$, то очевидно плоскость проходит через начало координат.

Пример. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $P(2, 3, 4)$ и параллельной плоскости, соответствующей уравнению

$$24x - 15y + 27z - 80 = 0.$$

Пусть требуется представить искомое уравнение в форме

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{1}$$

Так как эта плоскость параллельна заданной, то отношения коэффициентов при неизвестных равны между собой:

$$\frac{A}{24} = \frac{B}{-15} = \frac{C}{27}. \tag{2}$$

Точка P принадлежит искомой плоскости, поэтому ее координаты удовлетворяют уравнению последней.

Подставляя эти координаты в (1), имеем:

$$2A + 3B + 4C + D = 0. \tag{3}$$

Решая (2) и (3) совместно, найдем:

$$A = \frac{8}{9}C, \quad B = -\frac{5}{9}C. \tag{4}$$

Подставляя это в (3), получим:

$$\frac{16}{9}C - \frac{15}{9}C + 4C + D = 0$$

или

$$D = -\frac{37}{9}C. \tag{5}$$

Подставляя (4) и (5) в (1), получим

$$\frac{8}{9}Cx - \frac{5}{9}Cy + Cz - \frac{37}{9}C = 0.$$

Деля на C и умножая на 9, найдем окончательно:

$$8x - 5y + 9z - 37 = 0.$$

Это и есть искомое уравнение.

Лучшее решение указано в n^0 862.

859. Уравнение плоскости в отрезках на осях координат. Если отрезки, отсекаемые плоскостью на осях X, Y и Z, равны соответственно a, b и c, а уравнение плоскости есть

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad [436]$$

причем координаты точек пересечения $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ и $(0, 0, c)$ должны удовлетворять уравнению, то имеем:

$$Aa + D = 0, \quad Bb + D = 0, \quad Cc + D = 0$$

или

$$A = -\frac{D}{a}, \quad B = -\frac{D}{b}, \quad C = -\frac{D}{c}.$$

Подставляя в уравнение плоскости, получим:

$$-\frac{D}{a}x - \frac{D}{b}y - \frac{D}{c}z + D = 0.$$

Разделив уравнение на $(-D)$, найдем:

$$[440] \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Это уравнение называется *уравнением плоскости в отрезках на осях координат.*

860. Расстояние от точки до плоскости. Приведем уравнение плоскости к нормальному виду:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \quad [435]$$

Пусть имеется точка $P_0(x_0, y_0, z_0)$ и пусть d — искомое расстояние от нее до плоскости.

Спроектируем OE, EF и FP_0 на ON (рис. 486), тогда

$$OE = x_0 \cos \alpha$$

$$EF = y_0 \cos \beta$$

$$FP_0 = z_0 \cos \gamma,$$

следовательно

$$p + d = x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma \text{ [1]}$$

или

[441] $$d = x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p.$$

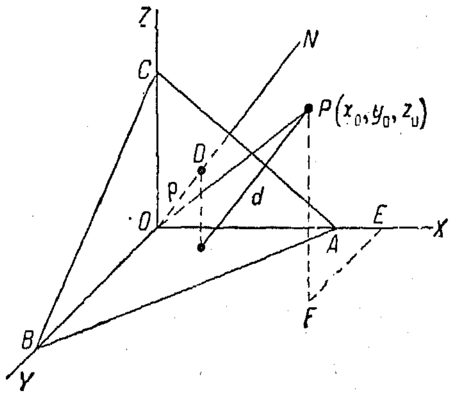


Рис. 486.

Таким образом, чтобы найти расстояние от данной точки до плоскости, следует в нормальное уравнение последней подставить координаты этой точки.

Пример. Определить расстояние от точки $(-1, 2, 3)$ до плоскости $2x + y - 2z + 8 = 0$.

Имеем:

$A = 2,\ B = 1,\ C = -2,\ D = 8.$

Из формулы [438] n⁰ 457 получим:

$$\cos \alpha = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{2}{\pm \sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}.$$

Здесь D — положительно, а потому перед радикалом следует поставить знак минус, чтобы p оказалось положительным.

---

[1]) В зависимости от положения точки P_0 относительно плоскости знак d может быть как плюсом, так и минусом. Если точка P_0 лежит с той же стороны от плоскости, что и начало координат, то d имеет знак $-$. Если точка P_0 и начало координат лежат по разные стороны от плоскости, то d имеет знак $+$

Прим. ред.

Далее

$$\cos\beta=\frac{B}{-\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3}$$

$$\cos\gamma=\frac{C}{-\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{-2}{-3}=\frac{2}{3}$$

$$p=\frac{-D}{-\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{-8}{-3}=\frac{8}{3}$$

$$d=\left(-1\right)\left(-\frac{2}{3}\right)+2\left(-\frac{1}{3}\right)+3\cdot\frac{2}{3}-\frac{8}{3}, \qquad [441]$$

откуда

$$d=-\frac{2}{3}.$$

861. Система плоскостей. Уравнение плоскости заключает в себе две или три постоянных, которые следует определить. Обычно в нем одна из указанных постоянных может быть выбрана произвольно, причем в этом случае уравнение соответствует системе плоскостей. Особенно важны две системы плоскостей, к рассмотрению которых и перейдем.

862. Система параллельных плоскостей. Уравнение системы плоскостей, параллельных данной

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

имеет следующий вид:

$$Ax+By+Cz+k=0, \qquad [442]$$

где k — произвольная постоянная.

Пример. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $P(3, 2, -1)$ и параллельной плоскости

$$7x-y-z-14=0.$$

Уравнение параллельной плоскости будет:

$$7x-y-z+k=0.$$

Подставляя в это уравнение координаты данной точки $P(3, 2, -1)$, лежащей на искомой плоскости, имеем:

$$21-2+1+k=0,$$

откуда

$$k=-20.$$

Таким образом находим уравнение искомой плоскости:

$$7x-y-z-20=0.$$

863. Система плоскостей, проходящих через линию пересечения двух плоскостей. Если заданы две плоскости

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

то система искомых плоскостей выражается уравнением:

$$[443] \quad A_1x+B_1y+C_1z+D_1+k(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

где k — произвольная постоянная.

Действительно, координаты любой точки, находящейся на линии пересечения плоскостей, должны удовлетворять обоим уравнениям, поэтому они удовлетворяют и уравнению системы.

Пример. Найти уравнение плоскости, проходящей через пересечение плоскостей

$$2x+y-4=0$$
$$y+2z=0$$

и перпендикулярной к плоскости

$$3x+2y-3z=6.$$

Уравнение системы плоскостей, проходящих через пересечение двух других, выражается уравнением

$$2x+y-4+k(y+2z)=0$$

или

$$2x+(k+1)y+2kz-4=0.$$

Чтобы искомая плоскость была перпендикулярна к данной $3x+2y-3z=6$, должны существовать следующие соотношения между коэффициентами

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$$
$$A_1=2,\ B_1=k+1,\ C_1=2k$$
$$A_2=3,\ B_2=2,\ C_2=-3.$$

Подставляя, имеем:

$$2\cdot3+(k+1)\cdot2+2k(-3)=0$$
$$6+2+2k-6k=0$$
$$-4k=-8$$
$$k=2.$$

Теперь остается подставить полученное значение k в уравнение системы, причем будем иметь

$$2x+y-4+2(y+2z)=0$$

или

$$2x+3y+4z-4=0.$$

Это и есть искомое уравнение.

864. Система плоскостей, проходящих через данную точку P_0 (x_0, y_0, z_0). Пусть имеем уравнение

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{1}$$

соответствующее некоторой плоскости, проходящей через точку P_0 (x_0, y_0, z_0). Так как координаты последней должны удовлетворять ур-нию (1), то

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0. \tag{2}$$

Вычитая (2) из (1), получим:

[444] $$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Пример. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку (1, — 2, 1) и параллельной плоскости

$$y-3x+4z-5=0.$$

Уравнение плоскости, параллельной данной, будет иметь вид:

$$y-3x+4z+k=0.$$

Но из [444]

$$A(x-1)+B(y+2)+C(z-1)=0.$$

Раскрывая скобки, получим

$$Ax+By+Cz-A+2B-C=0.$$

Сравнивая оба уравнения, видим, что

$$A=-3,\ B=1,\ C=4,\ k=-A+2B-C=3+2-4=1,$$

откуда искомое уравнение можно написать так:

$$3x-y-4z-1=0$$

(см. n⁰ 857 и 862).

865. Плоскость, проходящая через три заданные точки. Если плоскость

$$Ax+By+Cz+D=0$$

должна проходить через три точки:

$$P_1\ (x_1,\ y_1,\ z_1),\ P_2\ (x_2,\ y_2,\ z_2)\ \text{и}\ P_3\ (x_3,\ y_3,\ z_3),$$

то должны быть соблюдены три условия:

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$$
$$Ax_2+By_2+Cz_2+D=0$$
$$Ax_3+By_3+Cz_3+D=0.$$

Для определения четырех коэффициентов решим указанные уравнения, причем лучше всего, пользуясь последними тремя из них, выразить коэффициенты A, B и C через D, а затем подставить в уравнение

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Пример. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки (2, 3, 0) (—2, —3, 4) и (0, 6, 0).

Подставляя значения координат в формулу, получим:

$$2A+3B+D=0 \tag{1}$$

$$-2A-3B+4C+D=0 \tag{2}$$

$$6B+D=0 \tag{3}$$

Из ур-ния (3) $B=-\frac{D}{6}$. (4)

Подставляя утроенное B в (1), получаем:

$$2A-\frac{D}{2}+D=0$$

$$A=-\frac{D}{4}. \tag{5}$$

Подставляя удвоенное A и утроенное B во (2), находим:

$$\frac{D}{2}+\frac{D}{2}+4C+D=0$$

$$4C+2D=0$$

$$C=-\frac{D}{2}. \tag{6}$$

Подставляя найденные выражения A, B, C в $Ax+By+Cz+D=0$, получаем:

$$-\frac{D}{4}x-\frac{D}{6}y-\frac{D}{2}z+D=0.$$

Умножая на $-\frac{12}{D}$, найдем:

$$3x+2y+6z-12=0.$$

Это и есть искомое уравнение.

866. Уравнения плоскостей, делящих пополам углы между двумя пересекающимися плоскостями. Для нахождения указанных уравнений приводим уравнения данных плоскостей к нормальной форме. Так как каждая точка плоскости, делящей пополам угол между данными плоскостями, отстоит на одинаковое (по абсолютной величине) расстояние от последних, то имеем:

$$[445] \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{A_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}x+\frac{B_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}y+ \\ &+\frac{C_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}z+\frac{D_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}= \\ &=\frac{A_2}{\pm\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}x+\frac{B_2}{\pm\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}y+ \\ &+\frac{C_2}{\pm\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}z+\frac{D_2}{\pm\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \end{aligned} \right.$$

Это и есть уравнение плоскостей, делящих пополам угол между плоскостями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

867. Прямая линия. Пересечение двух плоскостей представляет собой прямую линию, поэтому система двух уравнений первой степени

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

выражает прямую в пространстве. Гораздо удобнее, впрочем, привести указанные уравнения к одному уравнению, содержащему две переменные, для чего решаем их совместно.

В этом случае уравнение дает проекцию прямой на одну из координатных плоскостей и является уравнением прямой, лежащей в этой плоскости.

Для того чтобы найти проекцию прямой на плоскость XY, следует исключить z.

В приведенных уравнениях

$$z = \frac{-A_1x - B_1y - D_1}{C_1} = \frac{-A_2x - B_2y - D_2}{C_2},$$

откуда

$$C_2(A_1x + B_1y + D_1) = C_1(A_2x + B_2y + D_2)$$

или

[446] $$(A_1C_2 - A_2C_1)x + (B_1C_2 - B_2C_1)y + (C_2D_1 - C_1D_2) = 0.$$

Уравнение проекции на плоскость XY, представленное в общем виде, будет

[447] $$y = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{B_1C_2 - B_2C_1}x + \frac{C_1D_2 - C_2D_1}{B_1C_2 - B_2C_1}.$$

Проекция на плоскость XZ имеет уравнение

[448] $$x = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}z + \frac{B_1D_2 - B_2D_1}{A_1B_2 - A_2B_1}.$$

Для проекции на плоскость YZ найдем

[449] $$y = \frac{A_1C_2 - A_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}z + \frac{A_1D_2 - A_2D_1}{A_1B_2 - A_2B_1}.$$

Пример. Определить уравнения проекций на координатные плоскости прямой, выражаемой уравнениями

$$3x + 2y + z - 5 = 0$$
$$, x + 2y - 2z - 3 = 0.$$

Здесь

$$A_1 = 3,\ B_1 = 2,\ C_1 = 1,\ D_1 = -5$$
$$A_2 = 1,\ B_2 = 2,\ C_2 = -2,\ D_2 = -3$$
$$y = \frac{1 \cdot 1 \cdot\ - 3 \cdot (-2)}{2 \cdot (-2) - 2 \cdot 1} x + \frac{1 \cdot (-3) - (-2)(-5)}{2(-2) - 2 \cdot 1}$$
$$-y = \frac{7}{6} x - \frac{13}{6} \text{ или } 7x + 6y - 13 = 0$$

есть уравнение проекции на плоскость XY.

Уравнение

$$4y - 7z - 4 = 0$$

есть уравнение прямой на плоскости YZ.

На рис. 487 показано расположение прямой и ее проекций на координатные плоскости.

Из чертежа видно, что прямые AC и DB, проектирующие концы отрезка AB на плоскость XY, параллельны оси Z.

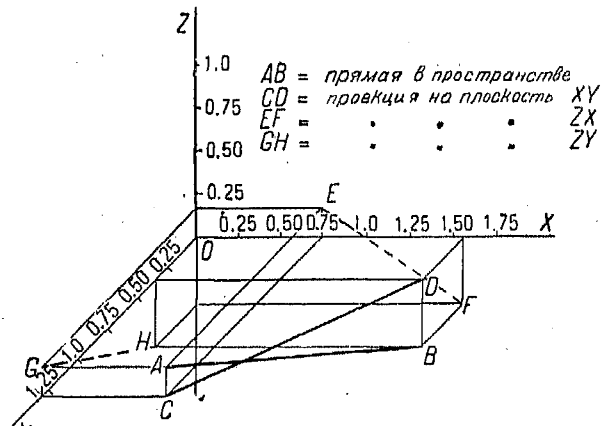


Рис. 487.

Точно также прямые AE и BF, проектирующие отрезок AB на плоскость XZ, параллельны оси Y. Наконец GA и HB, проектирующие AB на плоскость YZ, параллельны оси X.

868. Уравнение прямой, проходящей через данную точку P_0 (x_0, y_0, z_0) и образующей углы α, β и γ с осями. Пусть P (x, y, z) находится на прямой в расстоянии d от P_0.

Из формулы [425] n⁰ 837 имеем:

$$\cos\alpha = \frac{x - x_0}{d}, \quad \cos\beta = \frac{y - y_0}{d}, \quad \cos\gamma = \frac{z - z_0}{d},$$

откуда

[450] $$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma}.$$

869. Прямая, проходящая через две данные точки. Пусть даны точки P_1 (x_1, y_1, z_1) и P_2 (x_2, y_2, z_2).

Из предыдущего n⁰ имеем:

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma}, \tag{1}$$

кроме того

$$\frac{x_1 - x_2}{\cos\alpha} = \frac{y_1 - y_2}{\cos\beta} = \frac{z_1 - z_2}{\cos\gamma}. \tag{2}$$

Для исключения неизвестных косинусов делим (1) на (2):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

или

[451] $$\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{z - z_1}{z_1 - z_2}.$$

870. Прямая, параллельная плоскости. Прямая, образующая углы α, β и γ с осями, параллельна плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

только в случае, если

$$A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma = 0$$ [1]).

---

[1]) Условие параллельности прямой и плоскости, выражаемое уравнением

$$A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma = 0,$$

получается из условия перпендикулярности двух прямых (см. n⁰ 838), если заметить, что косинусы углов, образуемых перпендикуляром к плоскости с координатными осями, пропорциональны коэффициентам A, B, C, а угол между перпендикуляром к плоскости и прямой ей параллельной — прямой.

Прим. ред.

871. Прямая, перпендикулярная к плоскости. Прямая, образующая углы α, β, γ, с осями координат, перпендикулярна к плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

только если

$$\frac{A}{\cos\alpha}=\frac{B}{\cos\beta}=\frac{C}{\cos\gamma}\ ^{1)}.$$

Глава XL.

УРАВНЕНИЯ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ С ТРЕМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ (В ПРОСТРАНСТВЕ).

872. Уравнения второй степени.

[452] $$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fxz+Gx+ \\ +Hy+Kz+L=0.$$

Уравнения этого типа соответствуют так называемым поверхностям второго порядка.

Существуют пять основных видов указанных поверхностей, а именно: эллипсоид, однополый гиперболоид, двуполый гиперболоид, эллиптический параболоид, гиперболический параболоид.

Вырождением этих поверхностей являются: конусы, цилиндры, плоскости, прямые и точки.

873. Эллипсоид. Простейшим уравнением этой поверхности является:

[453] $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Ее можно рассматривать как поверхность, образованную эллипсом переменных размеров, движущимся параллельно плоскости XY, причем центр его всегда находится на оси Z, а концы оси, параллельной оси OX, описывают эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$$

---

1) Условие перпендикулярности прямой и плоскости, выражаемое равенством

$$\frac{A}{\cos\alpha}=\frac{B}{\cos\beta}=\frac{C}{\cos\gamma},$$

вытекает из условия параллельности двух прямых, если заметить, что A, B, C пропорциональны косинусам углов, образуемых перпендикуляром к плоскости с осями координат.

Прим. ред.

концы оси, параллельной оси Y, описывают эллипс

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Координаты точек пересечения эллипсоида с координатными осями суть:

$$X=\pm a, \quad Y=\pm b, \quad Z=\pm c.$$

Следы на координатных плоскостях будут:
на плоскости XY:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ (эллипс)},$$

на плоскости XZ:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ (эллипс)},$$

на плоскости YZ:

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ (эллипс)}.$$

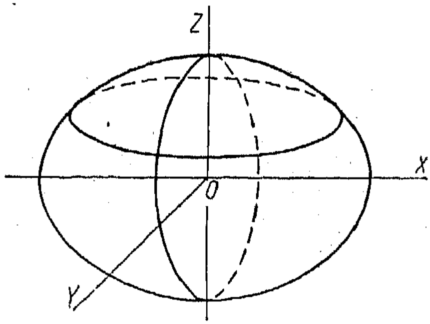


Рис. 488.

Уравнение линии пересечения эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

и плоскости $z=k$, параллельной плоскости XY, получим, подставляя $z=k$ в уравнение эллипсоида:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2}$$

или

$$\frac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(c^2-k^2)}+\frac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(c^2-k^2)}=1.$$

Этот эллипс можно рассматривать как кривую, производящую эллипсоид, при изменении k от $+c$ до $-c$.

Его бо́льшая полуось равна

$$\frac{a}{c}\sqrt{c^2-k^2},$$

а меньшая полуось равна

$$\frac{b}{c}\sqrt{c^2-k^2}$$

(предполагая, что $a > b$).

Другая форма уравнения эллипсоида имеет вид

$$\frac{y^2}{\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}}+\frac{z^2}{\frac{c^2(a^2-x^2)}{a^2}}=1.$$

Из этого уравнения видно, как изменяются длины большей и меньшей оси, так как в знаменателе y^2 и z^2 появляется переменная величина.

874. Однополый гиперболоид (рис. 489). Основное уравнение однополого гиперболоида есть

[454] $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Поверхность эту можно рассматривать как образованную эллипсом переменных размеров, движущимся параллельно плоскости XY, причем центр его все время находится на оси Z. Концы оси, параллельной оси X, описывают гиперболу

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

а концы оси, параллельной оси Y, следуют гиперболе

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

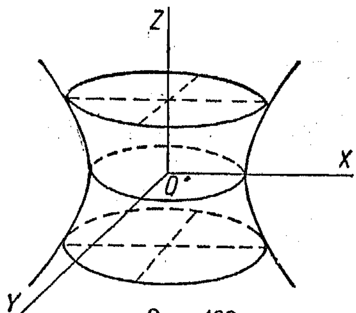


Рис. 489.

Координаты пересечения с осями суть

$$x=\pm a, \quad y=\pm b.$$

Следы на координатных плоскостях суть:
на плоскости XY — эллипс:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$$

на плоскости XZ — гипербола:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;$$

на плоскости YZ — гипербола:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Эта поверхность обладает тем свойством, что через любую ее точку можно провести две прямых, целиком лежащих на ней.

Уравнение однополого гиперболоида может быть переписано в такой форме:

$$\frac{x^2}{\frac{a^2(c^2+z^2)}{c^2}}+\frac{y^2}{\frac{b^2(c^2+z^2)}{c^2}}=1$$

или

$$\frac{y^2}{\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}}-\frac{z^2}{\frac{c^2(a^2-x^2)}{a^2}}=1.$$

Пересечение поверхности

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

и плоскости $z=k$, параллельной XY, получим, подставляя $z=k$ в указанное выше уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2}$$

или

$$\frac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(c^2+k^2)}+\frac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(c^2+k^2)}=1.$$

Последнее выражение можно рассматривать как уравнение эллипса, описывающего в пространстве рассматриваемую поверхность по мере того, как k принимает различные значения, или секущая плоскость перемещается параллельно плоскости XY,

875. Двуполый гиперболоид (рис. 490). Основное уравнение этой поверхности будет

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad [455]$$

Ее можно рассматривать, как образуемую эллипсом переменных размеров, движущимся параллельно плоскости YZ, в то время как центр движется по оси X.

Единственные точки пересечения осей с поверхностью суть

$$x=\pm a,\ y=0,\ z=0.$$

Следы на координатных плоскостях суть:

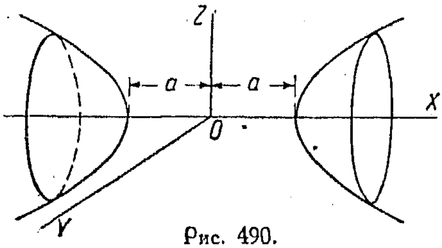


Рис. 490.

на плоскости XY — гипербола:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;$$

на плоскости XZ — гипербола:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;$$

с плоскостью YZ поверхность не пересекается.

Чтобы определить вид кривых, получающихся при пересечении двуполого гиперболоида плоскостью $x=k$, параллельной YZ, подставим это значение x в уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Получаем:

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{k^2}{a^2}-1$$

или

$$\frac{y^2}{\frac{b^2}{a^2}(k^2-a^2)}+\frac{z^2}{\frac{c^2}{a^2}(k^2-a^2)}=1.$$

Это уравнение можно рассматривать как уравнение переменного эллипса, соответствующего различным значениям k.

Если

$$-a<k<a,$$

то эллипс — мнимый, а потому поверхность не существует в пределах от $x=-a$ до $x=a$,

876. Эллиптический параболоид (рис. 491). Основное уравнение этой поверхности

[456]
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z.$$

Ее можно рассматривать как образуемую эллипсом переменных размеров, движущимся параллельно плоскости XY, причем его центр все время находится на оси Z. Концы оси, параллельной оси X, движутся по параболе

$$x^2=a^2z.$$

Концы оси, параллельной оси Y, следуют параболе

$$y^2=b^2z.$$

Точки пересечения с координатными осями суть:

$$X=0,\ Y=0,\ Z=0.$$

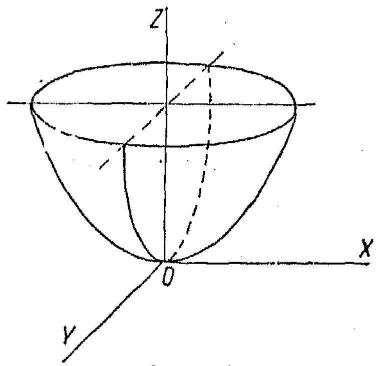


Рис. 491.

Следы на координатных плоскостях суть:
на плоскости XY — точка:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0\cdot$$

на плоскости XZ — парабола:

$$x^2=a^2z;$$

на плоскости YZ — парабола:

$$y^2=b^2z.$$

Пересечение эллиптического параболоида с плоскостью $z=k$, параллельной плоскости XY, определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=k$$

или

$$\frac{x^2}{a^2k}+\frac{y^2}{b^2k}=1.$$

Эти уравнения можно рассматривать как уравнения переменного эллипса, который описывает в пространстве эллиптический параболоид по мере изменения k от нуля до бесконечности.

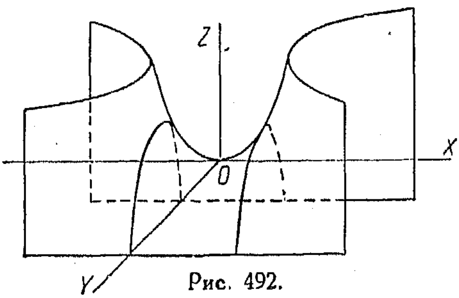


Рис. 492.

877. Гиперболический параболоид (рис. 492). Основное уравнение этой поверхности есть

[457] $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z.$$

Образующей кривой является парабола, лежащая в плоскости $x=k$, параллельной плоскости YZ. Уравнение

$$\frac{k^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$$

или

$$y^2=-b^2\left(z-\frac{k^2}{a^2}\right)$$

есть уравнение образующей параболы. Вершина образующей находится в точке $\left(k,\ 0,\ \frac{k^2}{a^2}\right)$, движущейся по параболе $x^2=a^2z$, лежащей в плоскости XZ. Последняя кривая имеет вершину, обращенную вниз (рис. 492).

Сечения, параллельные плоскости YZ, суть параболы с вершинами, обращенными вверх, сечения же, параллельные плоскости XY, суть гиперболы.

Описанная поверхность обладает тем свойством, что через любую ее точку можно провести прямую, целиком лежащую на поверхности параболоида [1]).

---

[1]) Ур-ние [457] можно рассматривать как результат исключения величины λ по уравнениям

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{z}{\lambda} \qquad (*)$$

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\lambda.$$

Совокупность ур-ний (*) характеризует линию пересечения двух плоскостей, т. е. прямую.

878. Конусы (рис. 493). Общее уравнение конуса есть:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \tag{458}$$

Поверхность конуса можно рассматривать как образованную переменным эллипсом, движущимся параллельно плоскости XY, причем концы большей оси следуют прямой

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Пересечения с осями суть:

$$x=0,\ y=0,\ z=0.$$

Следы на координатных плоскостях суть:

на плоскости XY — точка:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0;$$

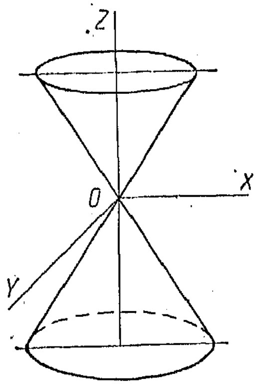


Рис. 493.

Так как ур-ние [457] есть следствие уравнений (*), то координаты любой точки прямой принадлежат поверхности параболоида, на котором прямая лежит целиком.

Чтобы убедиться, что через каждую точку $P_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхности параболоида проходит прямая, достаточно подобрать λ так, чтобы

$$\lambda=\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}.$$

Тогда из уравнения параболоида

$$\left(\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}\right)\left(\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}\right)=z_0$$

следует, что

$$\left(\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}\right)\lambda=z_0,$$

т. е. точка лежит на прямой (*).

Иначе говоря, через любую точку поверхности параболоида проходит прямая (*).

Совершенно так же можно убедиться, что через каждую точку поверхности параболоида проходит прямая вида

$$\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}=\frac{z}{\mu}$$

$$\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}=\mu,$$

Прим. ред.

на плоскости XZ — две прямых:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0;$$

на плоскости YZ — две прямых:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Рассматривая уравнения конуса и однополого гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

видим, что они отличаются лишь тем, что в уравнении гиперболоида имеется свободный член.

Указанные поверхности не имеют общих точек. Если z и y в приведенных уравнениях бесконечно возрастают, то значения x в них приближаются друг к другу.

Говорят, что гиперболоид и конус асимптотичны друг к другу и находятся в той же связи как гипербола и ее асимптоты на плоскости.

879. Цилиндры. В n⁰ 843 было показано, что уравнению с двумя переменными соответствует цилиндрическая поверхность. Цилиндр, образующие которого пересекают данную кривую и параллельны одной из координатных осей, называется *проектирующим цилиндром*. Уравнение его можно найти путем исключения третьей переменной из уравнений кривой.

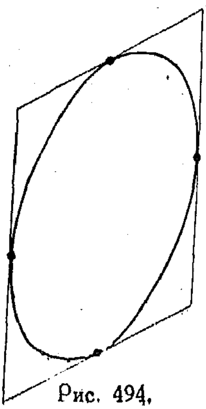


Рис. 494.

Для определения кривой можно пользоваться двумя уравнениями проектирующих цилиндров, рассматривая ее как их пересечение.

Пример. Построить кривую пересечения двух цилиндров

$$x^2+y^2=2y \qquad (1)$$

$$y^2+z^2-8z+7=0. \qquad (2)$$

Начертим след поверхности (1) на плоскости XY, причем образующие цилиндра перпендикулярны к этой плоскости.

Начертим теперь след цилиндра (2) на плоскости YZ. Образующие его перпендикулярны к указанной плоскости.

Чтобы начертить перспективный вид пересекающихся цилиндров, рекомендуется взять по оси Y единицу масштаба вдвое меньше, чем по осям X и Z (например, для последних взять 10 *мм* $= 1$, а для первой 5 *мм* $= 1$). Для построения в перспективе круга или эллипса чертим описанный квадрат или прямоугольник, что дает четыре точки соприкосновения с кругом или эллипсом. Эти точки приходятся в серединах четырех сторон. Указанный способ облегчает вычерчивание эллипса или круга (рис. 494).

Возвращаемся к решению задачи.

Рассмотрим плоскость, уравнение которой $y = k$. Она параллельна плоскости XZ и образующим проектирующих цилиндров. Она пересекает

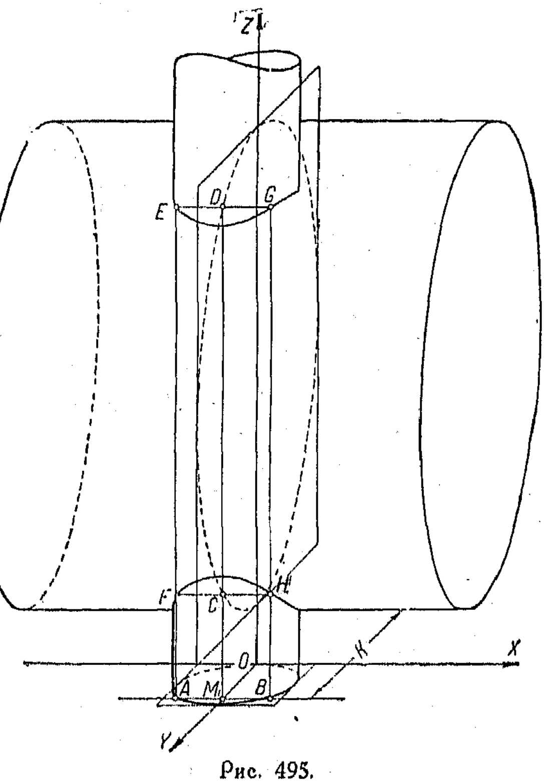


Рис. 495.

ось Y в точке M, проекцию кривой на плоскости XY в точках A и B, а проекцию на плоскость YZ в точках C и D. Эти точки определяют положение образующих проектирующих цилиндров. Точки пересечения образующих EF и GH одного цилиндра с образующими EG и FH другого определяют точки кривой пересечения проектирующих цилиндров. Взяв несколько секущих плоскостей, т. е. придавая k различные значения, построим кривую пересечения поверхностей $x^2 + y^2 = 2y$ и $y^2 + z^2 - 8z + 7 = 0$ (рис. 495).

880. Параметрические уравнения кривой в пространстве. Если координаты в пространстве заданы как функции переменного параметра, то получаются уравнения кривой в параметрической форме, например:

$$x = 4t^2,\ y = 1 - 2t,\ z = t^2 + 2.$$

Хорошим примером таких кривых является винтовая линия, к рассмотрению которой переходим.

Если точка движется по поверхности прямого круглого цилиндра таким образом, что расстояние, проходимое ею в направлении, параллельном оси этого цилиндра, пропорционально углу, на который она поворачивается вокруг оси, то точка описывает винтовую линию.

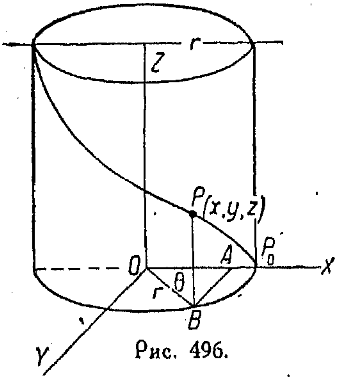


Рис. 496.

Пусть имеется уравнение круглого цилиндра:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

и пусть P_0 — начальная точка кривой, расположенная на оси X, а точка $P\ (x,\ y,\ z)$ лежит на этой кривой.

Согласно условию BP пропорциональна $k\theta$, где k — постоянная, зависящая от шага винтовой линии.

Из рис. 496 имеем:

$$x = OA = OB\cos\theta = r\cos\theta$$
$$y = AB = OB\sin\theta = r\sin\theta,$$

откуда находим параметрические уравнения рассматриваемой кривой:

$$x = r\cos\theta;\ y = r\sin\theta;\ z = k\theta.$$

Глава XLI.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.

Скорости изменения величин.

881. Прежде чем начать изучение дифференциального исчисления, рекомендуется отчетливо восстановить в памяти основные и наиболее важные отделы алгебры, тригонометрии и аналитической геометрии. Хорошее знание указанных отделов математики, а также соответствующее умение пользоваться излагаемыми в них математическими преобразованиями существенно помогут понять должным образом методы дифференциального исчисления.

Весьма существенно вполне понять связь между функцией и независимой переменной или аргументом. При изображении функций мы пользуемся ординатой как мерой величины функции, соответствующей некоторому значению независимой переменной.

Кривая, изображающая функцию, проходит через концы ординат, переменную длину которых мы изучаем, доставляя весьма удобный способ как изображения самих этих длин, так и для интерполирования с целью нахождения промежуточных значений, заключающихся между вычисленными.

При построении графиков функций исключительно важно установить правильным образом, какую из переменных, следует принять за функцию, а какую — за независимую переменную. Этот вопрос решается таким путем: если две переменные величины изменяются так, что значения первой из них зависят от значений второй, то первая величина является функцией второй. Первая из указанных переменных изображается ординатой точки, абсцисса которой выражает вторую, т. е. независимую переменную. Говоря проще, *ординаты представляют собою значения функции, в то время как соответствующие абсциссы — значения независимой переменной.*

882. Скорость изменения величин. Одним из наиболее важных вопросов, предлагаемых физикой и изучающихся в дифференциальном исчислении, является вопрос об определении скорости изменения переменных, т. е. величины изменения функции, соответствующей изменению величины независимой переменной на единицу. Если эта скорость постоянна, график функции является прямою линией и ординаты ее, выражающие значения функции, возрастают (или убывают) на определенную постоянную величину при возрастании независимой переменной на единицу. Однако, вообще говоря, указанная скорость изменения может быть величиной и непостоянной; поэтому необходимо рассмотреть ниже так называемую *среднюю скорость изменения и скорость изменения в данный момент*, последнюю иногда называют *мгновенной скоростью.*

Дифференциальное исчисление изучает указанные скорости изменения величин, причем оно само возникло и развилось из исследования задач такого рода.

883. Средняя скорость изменения. Средняя скорость изменения (возрастания или убывания) функции в любом интервале представляет собою величину изменения (возрастания или убывания) функции, деленную на число единиц аргумента, заключающееся в указанном интервале; другими словами, она является частным от деления величины изменения функции на величину изменения независимой переменной в том же интервале. Таким образом, в функции, изображенной на рис. 497, величина ее возрастания равна 8 в интервале от $x=15$ до $x=25$; величина же возрастания независимой переменной, очевидно, равняется 10, и средняя скорость возрастания функции в этом интервале есть $\frac{8}{10}$ или 0,8.

Точно так же мы найдем и среднюю скорость убывания функции в некотором интервале, или, как это обычно делается, найдем отрицательную скорость возрастания функции, ибо убывание функции можно рассматривать как отрицательное возрастание ее.

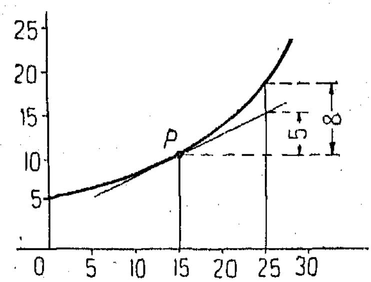


Рис. 497.

884. Скорость изменения в данный момент. Касательная к кривой линии показывает направление этой кривой в точке касания. В том случае, когда функция выражается прямой линией, направление последней или ее наклон является мерой скорости возрастания указанной функции. Поэтому, в свою очередь, наклон касательной к кривой представляет собою скорость возрастания в данный момент функции, выражаемой указанной кривой. Другими словами, касательная указывает те изменения величины функции, которые произошли бы в некотором интервале, если бы функция продолжала возрастать в указанном интервале с той же скоростью, что и в начале его, т. е. в точке касания. Таким образом, скорость изменения в данный момент у функции, изображенной на рис. 497, равна 0,5 для точки с абсциссой $x=15$. Выражение „в данный момент“ может вызвать недоумение, ибо для любого изменения функции, как бы оно мало ни было, требуется некоторый, хотя бы и крайне незначительный, промежуток времени. В виду этого приходится исследовать соотношения между переменными для весьма малых интервалов изменения их значений и предметом изучения является средняя скорость изменения в этих интервалах. При исследовании движения поезда скорость его, в некоторый данный момент, не может быть принята за число километров, пройденных им в течение часа, который включает в себя и рассматриваемый момент времени; скорость поезда в данный момент не может быть взята даже как число метров, пройденных за одну секунду, включающую в себя и рассматриваемый момент времени, несмотря на то, что меньший интервал все значительнее приближает величину средней скорости к величине скорости в данный момент, т. е. к скорости в начале интервала. В этом случае, уменьшая интервал времени и находя соответствующую ему среднюю скорость, мы можем как угодно близко подойти к определению точного значения скорости поезда в данный момент времени, т. е. скорости того момента, с которого интервал начинается. Другими словами, скорость в какой-либо момент является пределом, к которому стремится средняя скорость по мере того, как интервал делается все меньше и меньше, т. е. приближается к нулю.

Чрезвычайно важно уяснить себе, что величина, на которую переменная отличается от ее предела, несущественна, в то время как сам предел имеет первостепенное значение. Разность между переменной и ее пределом может быть сделана как угодно малой и в конце концов ею можно будет пренебречь и не рассматривать ее. Такой вывод может некоторым из читателей показаться неясным или неудовлетворительным. Однако, если рассматриваются только пределы переменных, то никаких затруднений возникнуть не может.

885. Размеры величин. Для того чтобы определить размер какого-либо количества, мы должны сравнить его с принятым за единицу количеством такого же рода, что и данное. Сравнивая $\frac{1}{1\,000\,000}$ с 1, мы должны будем сказать, что первое очень мало. Если же мы сравним 1 с 1 000 000, то здесь придется сказать, что 1 очень мала. В случае же сравнения $\frac{1}{1\,000\,000}$ с 1 000 000 мы несомненно будем считать, что указанная дробь чрезвычайно мала. Вопрос о размере количества имеет весьма важное значение в дифференциальном исчислении и мы позднее познакомимся с ним достаточно близко.

886. Переменные и пределы. Для того чтобы показать, каким образом переменная приближается к пределу, рассмотрим три точки A, B_n и C, находящиеся на прямой линии (рис. 498).

Пусть расстояние между точками A и C равняется 1; предположим, что положение точки B_n изменяется с течением времени и что в течение первого рассматриваемого интервала его B_n лежит посередине между A и C в точке B_1.

В течение следующего интервала положение подвижной точки B_n изменяется от B_1 к B_2, причем точка B_2 находится посередине между A и B_1; в течение третьего интервала точка B_n переходит из положения B_2 в положение B_3, причем B_3, в свою очередь, также находится посередине между A и B_2. Мы можем, очевидно, взяв достаточно большое число интервалов, сделать точку B_n как угодно близкой к точке A. Таким образом, для первого интервала расстояние между A и B_n равняется $\frac{1}{2}$, для второго интервала $\frac{1}{4}$, для третьего $\frac{1}{8}$, для четвертого $\frac{1}{16}$ и т. д. Взяв достаточно большое число интервалов, мы можем дробь, выражающую расстояние между B_n и A, сделать как угодно малой, хотя бы например сделать ее подобной дроби $\frac{1}{1\,000\,000}$. Если какая-либо переменная убывает указанным образом, т. е. так, что ее величина в конце концов делается и остается меньше любой, какой угодно малой, наперед заданной величины, то мы говорим, что данная *переменная стремится* к пределу, равному нулю.

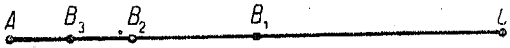


Рис. 498.

Рассмотрим теперь расстояние между точками B_n и C, изменяющееся по мере того, как число интервалов возрастает. В этом случае

для первого интервала	$B_1C = \frac{1}{2} = 0{,}5$
„ второго „	$B_2C = \frac{3}{4} = 0{,}75$
„ третьего „	$B_3C = \frac{7}{8} = 0{,}875$
„ четвертого „	$B_4C = \frac{15}{16} = 0{,}9375$

для пятого интервала . . . . $B_5C = \frac{31}{32} = 0{,}96875$

» шестого » . . . . $B_6C = \frac{63}{64} = 0{,}984375.$

Из предыдущего следует, что величина указанного расстояния от B_n до C постепенно приближается к 1, по мере того как число интервалов возрастает. Чем больше будет рассматриваемых интервалов, тем ближе значение расстояния будет подходить к единице.

Таким образом 1 является предельным значением расстояния от B_n до C. Взяв достаточно большое число интервалов, мы можем сделать значение переменной как угодно близким к единице. Числа 0 и 1 являются соответственно пределами переменных расстояний от B_n до A и от B_n до C, которые сами выражаются дробными числами. Пользование этими пределами гораздо удобнее, чем значениями указанных расстояний.

887. Понятие о пределе. Для иллюстрации связи между переменной и ее пределом служит нижеследующий пример.

Кверху брошен мяч, причем соотношение между высотой его в метрах h и временем подъема в секундах t дано в виде равенства

$$h = 46t - 4{,}9t^2.$$

Найти скорость спустя 3 секунды после начала полета.

Рассмотрим интервал времени, начинающийся в момент после 3 сек.; пусть 0,01 сек. величина интервала.

Если

$$t = 3, \text{ то } h = 46 \cdot 3 - 4{,}9 \cdot 3^2 = 93{,}9 \qquad (1)$$

Если

$$t = 3{,}01, \; h = 46 \cdot 3{,}01 - 4{,}9 \cdot 3{,}01^2 = 94{,}06551. \qquad (2)$$

Разность высот (h), равная 0,16551, соответствует разности времени $t = 0{,}01$ сек. Средняя скорость изменения высоты в интервале от $t = 3$ до $t = 3{,}01$ равна

$$\frac{0{,}16551}{0{,}01} = 16{,}551 \text{ м/сек.}$$

Пусть продолжительность интервала делается все меньше и меньше, т. е. пусть она приближается к пределу, равному нулю. Таким же путем, какой применялся выше, вычислим среднюю скорость изменения высоты (h) для каждого из интервалов и составим таблицу этих средних скоростей; при этом обозначим разность высот через Δh, а интервал времени — через Δt

Δt	Δh	$\frac{\Delta h}{\Delta t}$
0,01	0,16551	16,551
0,001	0,0165951	16,5951
0,0001	0,001659951	16,59951
0,00001	0 000'6599951	16,599951
0,000001	0,0000165999951	16,5999951

По мере того, как Δt берется все меньше и меньше, скорость $\frac{\Delta h}{\Delta t}$ все ближе стремится к некоторому предельному числу. Наблюдая за изменением величины $\frac{\Delta h}{\Delta t}$, можно скорее всего предположить, что указанным предельным числом будет 16,6.

Для того чтобы найти это предельное число, мы можем продолжать рассуждение следующим образом:

Вместо того, чтобы давать символу Δt численные значения, произведем исследование в общем виде при помощи алгебраических действий, рассматривая уравнение

$$h = 46\,t - 4{,}9\,t^2. \tag{1}$$

Если t возрастает до значения $t + \Delta t$, то h соответственно увеличивается до значения $h + \Delta h$, ибо возрастание t вызывает изменение величины h, зависящей от алгебраического соотношения между h и t. Поэтому имеем

$$\left.\begin{aligned} h + \Delta h &= 46(t + \Delta t) - 4{,}9(t + \Delta t)^2 = \\ &= 46t + 46\,\Delta t - 4{,}9\,t^2 - 9{,}8\,t\Delta t - \Delta\,4{,}9\,t^2 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Вычитая (1) из (2), получаем

$$\Delta h = 46\,\Delta t - 9{,}8\,t\Delta t - 4{,}9\,\Delta t^2.$$

Делим это выражение на Δt:

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = 46 - 9{,}8\,t - 4{,}9\,\Delta t.$$

Пусть теперь Δt стремится к нулю. Тогда отношение $\frac{\Delta h}{\Delta t}$ приближается к выражению $(46 - 9{,}8\,t)$, которое и является точным предельным значением средней скорости, к которому последняя стремится при Δt приближающейся к нулю. Другим словами, выражение $46-9{,}8t-4{,}9\Delta t$ дает среднюю скорость возрастания для любого интервала Δt, в то время как выражение $46-9{,}8t$, в свою очередь, дает точное значение скорости возрастания в моменты времени t.

Для момента $t=3$ выражение $46-9{,}8t$ дает $46-29{,}4=$ $=16{,}6$, что и является поэтому пределом отношения $\frac{\Delta h}{\Delta}$, определявшегося в численном примере этого n⁰.

Необходимо заметить, что выражение $\frac{\Delta h}{\Delta t}$, вообще говоря, не стремится к нулю, несмотря на то, что величины Δt и Δh стремятся к пределу, равному нулю.

Совершенно необходимо, чтобы предыдущее объяснение было бы отчетливо понято. Если здесь имеются какие-либо затруднения, следует вернуться к приведенному выше в настоящем n⁰ примеру и продолжить составление таблицы значений Δt, Δh и $\frac{\Delta h}{\Delta t}$ до тех пор, пока не станет очевидным, что Δt и Δh беспредельно уменьшаются, а их отношение $\frac{\Delta h}{\Delta t}$ стремится к некоторой определенной величине, как к своему пределу.

Рассмотрим предел некоторогов ыражения, например:

$$y=10+1\,000\,000\,\Delta x+1\,000\,000\,000\,\Delta x^2.$$

На первый взгляд кажется, что можно не ожидать, что это выражение, имеющее столь большие коэффициенты, будет при Δx, приближающемся к нулю, само приближаться к 10, как к своему пределу. Однако, не доверяя первому впечатлению, исследуем, что будет происходить указанным выражением по мере того, как мы будем брать Δx все меньшим и меньшим. Имеем:

$$\begin{array}{ll}
\Delta x=0{,}1 & y=10+100000+10000000=10100010\\
\Delta x=0{,}01 & y=10+10000+100000=110010\\
\Delta x=0{,}001 & y=10+1000+1000=2010\\
\Delta x=0{,}0001 & y=10+100+10=120\\
\Delta x=0{,}000001 & y=10+1+0{,}001=11{,}001\\
\Delta x=0{,}000000001 & y=10+0{,}001+0{,}000000001=10{,}001000001\\
\Delta x=0{,}000000000001 & y=10+0{,}000001+0{,}000000000000001=\\
 & =10{,}000001000000001.
\end{array}$$

Продолжая уменьшать Δx, т. е. заставляя Δx приближаться к нулю, как к пределу, мы можем сделать величину y как угодно близкой к 10. Приведенный пример должен помочь нам уяснить, каким образом выражение с чрезвычайно большими коэффициентами может приближаться к некоторому малому числу как к пределу в том случае, когда переменная, входящая в выражение, стремится к пределу, равному нулю.

Символ $\Delta x \to 0$ или $\Delta x = 0$ читается таким образом—„дельта x стремится к пределу, равному нулю", или так—„предел дельта x есть нуль".

888. Графическая иллюстрация. Пусть $P(2, 1)$ и $P_1(2+\Delta x, 1+\Delta y)$ — две точки на кривой, уравнение которой есть $y = f(x)$, а прямая CD — секущая, проведенная через точки P и P_1. Тогда, как это видно на рис. 499, выражение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ представляет собою наклон секущей CD.

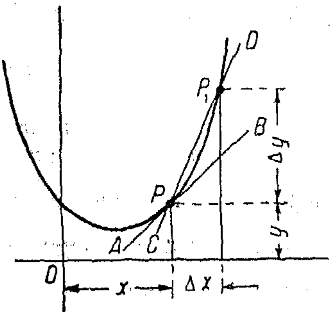


Рис. 499.

Это отношение, кроме того, является средней скоростью возрастания функции на интервале Δx.

По мере того как Δx приближается к пределу, равному нулю, точка P_1 стремится в свою очередь к своему предельному положению P. Тогда секущая, проходящая через точки P и P_1, вращаясь около точки P, приближается к своему предельному положению AB, которая является касательной к данной кривой в точке P. Эта касательная представляет собою *точное предельное положение* секущей, к которому она стремится по мере того, как Δx приближается к нулю; наклон же касательной является *точным значением предела* к которому стремится величина выражения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ в том случае, когда Δx приближается к нулю.

Наклон касательной, проходящей через какую угодно точку кривой, является в то же время и наклоном кривой в точке касания.

Пример. Найти скорость изменения функции y по отношению к независимой переменной x при $x = 3$, если

$$4y = x^2 - 2x + 4. \qquad (1)$$

Пусть (x_0, y_0) — координаты некоторой точки кривой, выражающей функцию y, тогда $4y_0 = x_0^2 - 2x_0 + 4$.

Если на этой кривой взята какая-либо другая точка с координатами $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, то равенство (1) получает вид

$$4(y_0 + \Delta y) = (x_0 + \Delta x)^2 - 2(x_0 + \Delta x) + 4 \qquad (2),$$

$$4y_0 + 4\Delta y = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 2x_0 - 2\Delta x + 4.$$

Вычитая (1) из (2), имеем:

$$4\Delta y = 2x_0\Delta x - 2\Delta x + \Delta x^2.$$

Делим последнее равенство на $4\Delta x$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0}{2} - \frac{1}{2} + \Delta x.$$

Если Δx приближается к нулю, то

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ стремится к } \frac{x_0}{2} - \frac{1}{2}.$$

Тогда, при $x_0 = 3$

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1.$$

Последнее означает, что в той точке рассматриваемой кривой, для которой $x = 3$, скорости изменения y и x одинаковы, или, другими словами, что наклон касательной в этой точке равен 1.

Глава XLII.

ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ.

889. Производная. Дана функция y независимой переменной x, а также два соответствующих друг другу значения x и y; если x получает приращение Δx, которое вызывает появление приращения Δy у переменной y, то предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, при Δx, стремящемся к пределу, равному нулю, называется *производной* y по x.

Символ для обозначения производной y по x пишется так:

$$\frac{dy}{dx}.$$

То же самое выражается и иначе:

[459] $$\frac{d[f(x)]}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right].$$

Таким образом

$$\frac{d(4x^2+3x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[4(x+\Delta x)^2 + 3(x+\Delta x)] - [4x^2+3x]}{\Delta x}$$

или

[460] $$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

890. Значение пределов. Исходя из того, что было уже сказано о пределах, читатель вероятно оценит степень их важности; в противном случае следует восстановить в памяти те отделы, где они разбирались (n⁰ 887).

Если разность между переменной величиной x и постоянной C постоянно делается меньше любого как угодно малого значащего числа и таковой остается, то говорят, что переменная x стремится к пределу C. В этом случае, разумеется, рассматриваются абсолютные значения разности, а знак их во внимание не принимается.

891. Дифференцирование. Действие, посредством которого находят производную функции, называется *дифференцированием*. Это действие равносильно тому, которое производят, чтобы найти выражение для скорости изменения в данный момент, для скорости движения или для наклона линии.

Производная многочленного алгебраического выражения может быть всегда найдена по способу, изложенному в n⁰ 889; однако, ниже будут даны более быстрые и менее сложные методы определения производных, которые охватят все элементарные типы алгебраических, логарифмических и тригонометрических функций.

Так как выражение $\frac{dy}{dx}$ при подстановке в него координат (x_0, y_0) какой-либо точки кривой дает наклон ее в этой точке, то уравнение касательной к указанной кривой, проведенной через точку (x_0, y_0), выражается так:

$$[461] \qquad y - y_0 = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}} (x - x_0),$$

а уравнение нормали — таким образом:

$$[462) \qquad y - y_0 = -\left[\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right]_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}} (x - x_0).$$

См. аналитическую геометрию (nn⁰ 795 и 798).

892. Производная постоянной величины. Производная постоянной

$$\frac{dC}{dx} = 0.$$

Так как постоянная C не изменяется при изменении x на величину Δx, то ее приращение ΔC равно нулю, т. е.

$$\frac{\Delta C}{\Delta x}=0.$$

Поэтому

[463] $$\frac{dC}{dx}=0.$$

Так как равенство $y=C$ является уравнением прямой линии, параллельной оси X, то наклон в этом случае в любой точке равен нулю.

893. Производная переменной, взятая по этой же переменной. *Производная переменной, взятая по ней самой, равна единице.*

Если $y=x$, то

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dx}{dx}=1,$$

ибо $y=x$, и $\Delta y=\Delta x$.

Так как

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x}=1,$$

то

$$\frac{dx}{dx}=1.$$

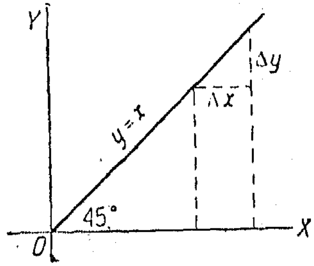


Рис. 500.

Это соотношение можно видеть на рис. 500.

894. Влияние постоянного слагаемого. Пусть выражение $F(x)$ представляет собою некоторую функцию от x.

Рассмотрим равенство

$$y=F(x)+C.$$

Очевидно, что C исчезает при вычитании, производимом для получения Δy (n^0 888). Следовательно, выражение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, а отсюда и $\frac{dy}{dx}$ имеют ту же величину, что и при дифференцировании функции $y=F(x)$, не содержащей величины C.

Наклон касательных к двум кривым, проведенным в точках P и P_1 (рис. 501), одинаков для любого значения x_0, входящего в оба уравнения, выражающие кривые. Прибавленная постоянная величина 5 только передвигает кривую на 5 единиц кверху. Наклон касательной не меняется, так как кривая перемещается параллельно самой себе, а касательная остается параллельной своему первоначальному положению. Следовательно, величина производной одинакова в обоих случаях.

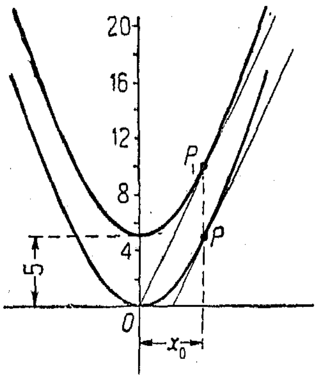


Рис. 501.

895. Производная произведения функции на постоянную величину. *Производная произведения постоянной на функцию от переменной по этой переменной равна произведению постоянной на производную функции*, т. е.

$$\frac{d[Cf(x)]}{dx}=C\frac{d[f(x)]}{dx},$$

что видно из следующего: пусть $y=C\cdot f(x)$, тогда

$$y+\Delta y=Cf(x+\Delta x),$$

и

$$\Delta y=C[f(x+\Delta x)-f(x)],$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=C\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Переходя к пределу, получим

[464] $$\frac{dy}{dx}=C\frac{d[f(x)]}{dx}.$$

896. Производная степени. Имеем выражение $y=x^2$. Пусть $x=x_0$, тогда

$$y_0=x_0^2.$$

$$y_0+\Delta y=(x_0+\Delta x)^2=x_0^2+2x_0\cdot\Delta x+\Delta x^2.$$

Вычитая $y_0=x_0^2$, имеем

$$\Delta y=2x_0\Delta x+\Delta x^2.$$

Разделив на Δx, получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x_0+\Delta x.$$

Пусть Δx стремится к 0; тогда

$$\frac{dy}{dx}=2x_0$$

для любой точки x_0.

Скорость изменения ординат для точки $x=2$ есть отношение 4:1.

Скорость изменения ординат для точки $x=3$ есть отношение 6:1.

Скорость изменения ординат для точки $x=4$ есть отношение 8:1.

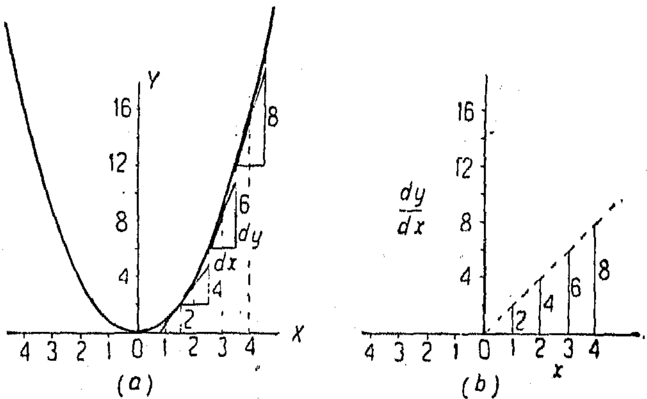


Рис. 502.

Таким же путем, какой мы применяли для разыскания производной выражения $y=x^2$, мы найдем производную и функции $y=x^3$.

$$\frac{dy}{dx}=3x_0^2$$

в любой точке x_0; если $y=x^4$, то

$$\frac{dy}{dx}=4x_0^3$$

в любой точке x_0; вообще, если n — любое положительное целое число и мы имеем $y=x^n$, то

$$\frac{dy}{dx}=nx_0^{n-1} \qquad [465]$$

для любой точки x_0.

Глава XLIII.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ.

897. Дифференцирование суммы. Пусть u есть функция от x (например x^2), а v — какая-либо иная функция от x (например $2x$); кроме того пусть

$$y = u + v.$$

Приращения Δy, Δu, Δv переменных y, u, v соответствуют приращению Δx независимой переменной x.

Пусть

$$y_0 = u_0 + v_0.$$

Положим теперь

$$x = x_0 + \Delta x.$$

При этом имеем

$$y_0 + \Delta y = u_0 + \Delta u + v_0 + \Delta v.$$

Вычитая $y_0 = u_0 + v_0$, получаем

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v.$$

Разделив на Δx, имеем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Пусть Δx стремится к нулю; тогда

[466] $$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

Производная суммы двух функций есть сумма их производных.

Таким же образом, имеем

$$\frac{d(u + v - w)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}.$$

Пример. Найдем производную выражения

$$y = x^3 + 2x^2 - 5x + 9.$$

Такая функция соответствует выражению

$$y = u + v - w + c$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(x^3)}{dx} + \frac{d(2x^2)}{dx} - \frac{d(5x)}{dx} + \frac{d(9)}{dx}$$

$$= 3x^2 \cdot \frac{dx}{dx} + 4x \cdot \frac{dx}{dx} - 5\frac{dx}{dx} + 0$$

$$= 3x^2 + 4x - 5,$$

Производная суммы любого числа функций равна алгебраической сумме их производных.

Эти функции обозначаются весьма разнообразно: иногда через буквы u, v, w, или символами $F(x)$, $f(x)$ и т. д., в других случаях они даются в виде целых выражений, например x^2+2ax, x^3 и т. д. Как бы они ни были заданы, указанное правило определения производной суммы функций остается в силе.

898. Производная степени. Пусть $y=u^n$, где n — положительное целое число, u — любая функция от x

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)^n.$$

Разлагая выражение $(u+\Delta u)^n$ по формуле бинома, получаем

$$y+\Delta y=u^n+n\cdot u^{n-1}\Delta u+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{n-2}\cdot\Delta u^2+\ldots+\Delta u^n.$$

Вычитая $y=u^n$, имеем:

$$\Delta y=n\cdot u^{n-1}\Delta u+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{n-2}\cdot\Delta u^2+\ldots+\Delta u^n.$$

Разделив на Δx, получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=n\cdot u^{n-1}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{n-2}\cdot\Delta u\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+\ldots$$
$$\ldots+\Delta u^{n-1}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

При приближении Δx к 0, Δu также приближается к 0, т. е.

[467] $$\frac{dy}{dx}=n\cdot u^{n-1}\cdot\frac{du}{dx}.$$

Если $u=x$, что представляет собою частный случай, то

$$y=x^n$$

и

$$\frac{dy}{dx}=nx^{n-1}\frac{dx}{dx}=nx^{n-1}.$$ [465]

Можно показать, что эта формула остается справедлива при любом постоянном n, и таким образом мы имеем следующее правило.

Производная функции, возведенной в некоторую степень, показатель которой есть положительное, отрицательное, *дробное или даже иррациональное постоянное число, равна произведению показателя степени на функцию в степени, уменьшенной на единицу, умноженному на производную самой функции.*

Таким образом, если n есть положительная дробь $\frac{p}{q}$, то

$$y = u^{\frac{p}{q}}$$

[468] $$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q} \cdot u^{\frac{p}{q}-1} \times \frac{du}{dx}.$$

Таким же образом, если u — отрицательно и равно $-m$, то

$$y = u^{-m}$$

$$\frac{dy}{dx} = -m \cdot u^{-m-1} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Если $u = x$, а $n = \frac{3}{4}$, то

$$y = x^{\frac{3}{4}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}} \cdot \frac{dx}{dx} = \frac{3}{4} \; x^{-\frac{1}{4}}$$

Если $y = \sqrt{x}$, $y = x^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \; x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Если $y = \frac{1}{x^3}$, $y = x^{-3}$

$$\frac{dy}{dx} = -3 \cdot x^{-4} = \frac{-3}{x^4}.$$

Если $y = (x^2 + 3)^3$, то это выражение можно представить так:

$$y = u^3$$

$$\frac{dy}{dx} = 3u^2 \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d(x^2+3)}{dx} = 2x.$$

Следовательно

$$\frac{dy}{dx}=3(x^2+3)^2\cdot 2x=6x(x^2+3)^2.$$

899. Дифференцирование функции от функции. Пусть u — функция от x, а y — функция от u. В этом случае u изменяется в $\frac{du}{dx}$ раз быстрее, чем x, а y — в $\frac{dy}{du}$ раз быстрее, чем u. Поэтому, очевидно, y изменяется в $\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ быстрее чем x.

Отсюда

[469] $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

Переходя к простому арифметическому примеру, увидим следующее: если y, например, изменяется в 4 раза быстрее, чем u, а u — в 6 раз быстрее, чем x, то y изменяется в $(4\times 6)=24$ раза быстрее, чем x.

Распространим сказанное на функцию от функции, когда последняя также является функцией от функции.

Если x — функция от t, z — функция от x, y — функция от z, то

[470] $$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}.$$

Таким же образом, для любого числа функций от функций производная имеет вид

[471] $$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{}\cdot\frac{}{}\cdot\frac{}{}\cdots\frac{}{dt}.$$

Если t — независимая переменная, y — последняя по порядку функция, то в равенство [471] следует проставить надлежащим образом числители и знаменатели.

Пример. Нагревают стальной стержень. Длина его есть функция его температуры, которая в свою очередь является функцией времени (t). В этом случае длина стержня есть функция от функции при независимой переменной t. Скорость изменения длины стержня в секунду равна произведению скорости изменения длины для одного градуса и скорости увеличения температуры в секунду.

В графике, соответствующем функции от функции, наклон функции y по отношению к независимой переменной x равняется величине наклона y по отношению к u, умноженной на величину наклона u по отношению к x.

900. Графическое изображение функций от функций. При рассмотрении в координатной системе соотношений между тремя переменными y, x и t, из которых x есть функция от t, а y — функция от x, получается весьма простой способ, выясняющий связь между функциями от функций.

Не следует смешивать это соотношение с тем, которое соответствует кривой в пространстве.

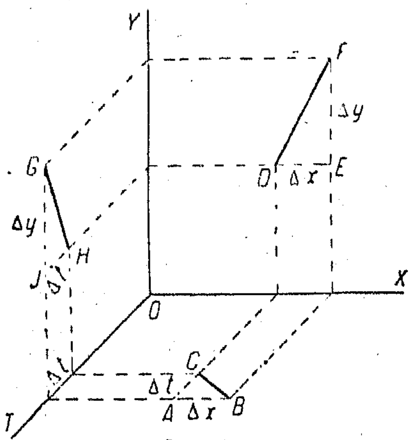


Рис. 503.

Пусть скорость изменения x по отношению t (рис. 503)

$$\frac{AB}{AC}=\frac{\Delta x}{\Delta t},$$

скорость изменения y относительно x

$$\frac{FE}{DE}=\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Скорость же изменения y относительно t

$$\frac{JG}{JH}=\frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Тогда

$$\frac{JG}{JH}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{FE}{DE},\quad \frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Предположим, что скорость изменения x относится к скорости изменения t как $1^1/_2:1$. Примем за единицу длины для измерения наклона отрезок на прямой OT; т. е. пусть $AC=1$, $AB=1\frac{1}{2}$, а также и $DE=1\frac{1}{2}$.

Положим, скорость изменения y относится к скорости изменения x как $2:1$; тогда $EF=1\frac{1}{2}\times 2=3$.

Имеем $EF=JG=3$; кроме того $JH=1$, будучи равно единице длины на оси OT, с которой мы начали наше построение. Отсюда следует

$$\frac{JG}{H}=\frac{3}{1}=1\frac{1}{2}\times 2.$$

Пример. Продифференцируем

$$y = \sqrt{a + x} = (a + x)^{\frac{1}{2}}.$$

Положим $(a + x) = u$. Тогда

$$\frac{du}{dx} = 1 ; \quad y = u^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \times 1.$$

Подставляя значение u, взятое выше, получим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} (a + x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{a + x}}.$$

901. Производная функции, возведенной в некоторую степень, может быть найдена при помощи формулы для производной функции от функции.

Пусть $y = u^n$, где n — положительное целое число, а u — любая функция от x.

Из формулы для производной функции от функции имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}. \qquad [469]$$

Если x получает приращение Δx, то y и u получают соответственно приращения Δy и Δu.

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)^n.$$

Разлагая $(u + \Delta u)^n$ по формуле бинома, получаем

$$y + \Delta y = u^n + n \cdot u^{n-1} \Delta u + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} u^{n-2} \Delta u^2 + \ldots + \Delta u^n.$$

Вычитая $y = u^n$, имеем:

$$\Delta y = n \cdot u^{n-1} \cdot \Delta u + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} u^{n-2} \cdot \Delta u^2 + \ldots + \Delta^n u.$$

Деля на Δu, имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = n \cdot u^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot u^{n-2} \cdot \Delta u + \ldots + \Delta u^{n-1}.$$

При приближении Δu к 0, $\frac{\Delta y}{\Delta u}$ приближается к $n \cdot u^{n-1}$, Поэтому,

$$\frac{dy}{du} = n \cdot u^{n-1}.$$

Подставляя эту величину в выражение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}, \qquad [469]$$

получаем

$$\frac{dy}{dx} = n \cdot u^{n-1} \frac{du}{dx}. \qquad [467]$$

902. Производная произведения двух функций. Рассмотрим две функции от x, например (x^2+3) и (x^2+5x+9).

Произведение их

$$y = (x^2+3)(x^2+5x+9).$$

Мы могли бы конечно сначала произвести указанное перемножение, а затем и найти искомую производную обычным путем (т. е. производную суммы), однако более быстрый способ заключается в следующем:

Пусть $y = u \times v$, где u и v — две функции, являющиеся сомножителями.

Пусть $x = x_0$, т. е. пусть x имеет некоторое определённое значение.

Тогда

$$y_0 = u_0 \times v_0.$$

Пусть x получает приращение Δx, тогда

$$y_0 + \Delta y = (u_0 + \Delta u)(v_0 + \Delta v)$$

$$= u_0 v_0 + v_0 \cdot \Delta u + u_0 \Delta v + \Delta u \Delta v.$$

Вычитая $y_0 = u_0 v_0$, получим

$$\Delta y = v_0 \Delta u + u_0 \Delta v + \Delta u \Delta v.$$

Разделив на Δx, получаем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v_0 \frac{\Delta u}{\Delta x} u_0 + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Пусть Δx приближается к 0.

Тогда $\left(\Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}\right)$ также приближается к 0, причём получается следующее выражение:

[472] $$\frac{dy}{dx} = v \cdot \frac{du}{dx} + u \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Применяем эту формулу к примеру, приведенному в начале n⁰.
Пусть $u = x^2 + 3$; $v = x^2 + 5x + 9$.
Тогда

$$\frac{dy}{dx} = (x^2 + 3)\frac{d(x^2 + 5x + 9)}{dx} + (x^2 + 5x + 9)\frac{d(x^2 + 3)}{dx}.$$

$$\frac{d(x^2 + 5x + 9)}{dx} = 2x + 5; \quad \frac{d(x^2 + 3)}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = (x^2 + 3)(2x + 5) + (x^2 + 5x + 9)(2x) =$$
$$= 4x^3 + 15x^2 + 24x + 15.$$

Перемножение данных функций друг на друга до дифференцирования дает $x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 15x + 27$. При дифференцировании последнего выражения как суммы получаем производную: $4x^3 + 15x^2 + 24x + 15$. Получили такой же самый результат, какой был получен при помощи формулы производной для произведения функций.

Пример. Продифференцируем $y = (x + 1)^5 (2x - 1)^3$.

$$\frac{dy}{dx} = (x + 1)^5 \frac{d(2x - 1)^3}{dx} + (2x - 1)^3 \frac{d(x + 1)^5}{dx}$$
$$= (x + 1)^5 \cdot 3(2x - 1)^2 \cdot \frac{d(2x - 1)}{dx} + (2x - 1)^3 \cdot 5(x + 1)^4 \frac{d(x + 1)}{dx}$$
$$= 6(x + 1)^5 (2x - 1)^2 + 5(2x - 1)^3 (x + 1)^4$$
$$= (2x - 1)^2 (x + 1)^4 (16x + 1).$$

Наклон графика функции $y = u \cdot v$ равняется функции u, умноженной на величину наклона функции $v = f(x)$, плюс функция v, умноженная на величину наклона функции $u = F(x)$.

Производная произведения двух функций равна первой функции, умноженной на производную второй, плюс вторая функция, умноженная на производную первой.

903. Пример произведения двух функций. Пусть x и y — переменные значения двух сторон прямоугольника; нужно узнать, с какой скоростью изменяется величина площади этого прямоугольника, равная произведению двух его сторон, являющихся функциями времени.

Пусть A_0 — величина площади прямоугольника, а x_0, y_0 — значения сторон его в некоторый момент времени t_0. Спустя некоторый промежуток времени Δt, т. е. в момент $t_0+\Delta t$, будем иметь

$$A_0+\Delta A=(x_0+\Delta x)(y_0+\Delta y)=x_0 y_0+x_0\Delta y+y_0\Delta x+\Delta x\Delta y$$

$$\Delta A=x_0\Delta y+y_0\Delta x+\Delta x\cdot\Delta y.$$

Так как каждая переменная изменяется в зависимости от времени t, то

$$\frac{\Delta A}{\Delta t}=x_0\frac{\Delta y}{\Delta t}+y_0\frac{\Delta x}{\Delta t}+\Delta x\frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

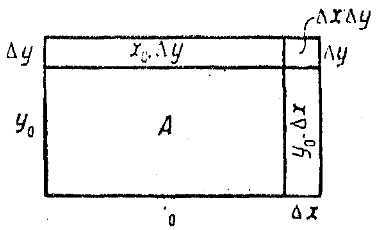


Рис. 504.

Последнее выражение представляет собою среднюю скорость изменения величины площади по отношению ко времени. Скорость изменения площади в данный момент есть предел этого выражения при приближении Δt к нулю (рис. 504).

Указанный предел выражается так:

$$\frac{dA}{dt}=x\cdot\frac{dy}{dt}+y\frac{dx}{dt},$$

т. е. он равен длине прямоугольника, умноженной на скорость изменения ширины его плюс ширина прямоугольника, умноженная на скорость изменения длины.

Пример. Дано

$$y=\sqrt{\frac{x^3}{1+x^2}}.$$

Найдем производную.

Данное выражение можно написать так:

$$y=x^{\frac{3}{2}}\cdot(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Из формулы для дифференцирования произведения имеем

$$\frac{dy}{dx}=x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{d(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{dx}+(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{dx^{\frac{3}{2}}}{dx}.$$

Так как

$$\frac{d(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{dx} = -\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x = -\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{dx^{\frac{3}{2}}}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}},$$

то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x^{\frac{5}{2}}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3x^{\frac{1}{2}}}{2(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{1+x^2}} - \frac{\sqrt{x^5}}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

904. Производная произведения нескольких функций. Производная произведения конечного числа функций есть сумма произведений, получающихся посредством умножения производной каждой из данных функций на произведение всех остальных. Таким образом, если

$$y = u\cdot v\cdot w,$$

то

[473]. $$\frac{dy}{dx} = vw\frac{du}{dx} + uw\frac{dv}{dx} + uv\frac{dw}{dx}.$$

905. Другой вид формулы для производной произведения. Если

$$y = u\cdot v,$$

то

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Разделив обе части последнего равенства на y, получим

[474] $$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{u}{y}\frac{dv}{dx} + \frac{v}{y}\frac{du}{dx} = \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{u}\frac{du}{dx}.$$

Таким же образом, если

$$y = u\cdot v\cdot w,$$

то

[475] $$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{w}\frac{dw}{dx}.$$

Каждый член этого равенства заключает в себе только одну переменную, что упрощает составление производной для произведения любого числа переменных.

906. Производная частного от деления двух функций. Дано

$$y=\frac{u}{v}. \tag{1}$$

Положим $x=x_0$; тогда

$$y_0+\Delta y=\frac{u_0+\Delta u}{v_0+\Delta v}. \tag{2}$$

Вычитая (1) из (2), получаем:

$$\Delta y=\frac{u_0+\Delta u}{v_0+\Delta v}-\frac{u_0}{v_0}=\frac{v_0\Delta u-u_0\Delta v}{v_0(v_0+\Delta v)}.$$

Разделив на Δx, получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v_0\frac{\Delta u}{\Delta x}-u_0\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v_0(v_0+\Delta v)}.$$

Пусть Δx приближается к нулю. Тогда

[476] $$\frac{dy}{dx}=\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx}=\frac{v\cdot\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

Пример 1. Продифференцировать выражение

$$y=\frac{x-1}{2x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x\frac{d(x-1)}{dx}-(x-1)\frac{d(2x)}{dx}}{4x^2}$$

$$\frac{d(x-1)}{dx}=1,\quad \frac{d(2x)}{dx}=2,$$

следовательно

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x-2(x-1)}{4x^2}=\frac{1}{2x^2}.$$

Пример 2. Продифференцировать выражение

$$y=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Дасм нашему выражению такой вид

$$y=\frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}.$$

Так как данное выражение есть частное от деления двух функций, то

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}\frac{d(1-x)^{\frac{1}{2}}}{dx}-(1-x)^{\frac{1}{2}}\frac{d(1+x)^{\frac{1}{2}}}{dx}}{1+x},$$

так как

$$\frac{d(1-x)^{\frac{1}{2}}}{dx}=\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{dx}{dx}\right)=\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$$

$$\frac{d(1+x)^{\frac{1}{2}}}{dx}=\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{dx}{dx}\right)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}},$$

то

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x}(1+x)}-\frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1+x}(1+x)}$$

$$=\frac{-1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}.$$

907. Наклон кривой, заданной уравнением в общем виде

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$

в некоторой ее точке $P_1(x_1, y_1)$.

Возьмем какую-либо другую точку на данной кривой, например точку $Q(x_1+\Delta x_1, y_1+\Delta y_1)$, лежащую вблизи первой точки P_1, и подставим значения координаты обеих точек в уравнение. Имеем:

$$Ax_1^2+Bx_1y_1+Cy_1^2+Dx_1+Ey_1+F=0. \tag{1}$$

$$A(x_1+\Delta x)^2+B(x_1+\Delta x)(y_1+\Delta y)+C(y_1+\Delta y)^2+$$
$$+D(x_1+\Delta x)+E(y_1+\Delta y)+F=0. \tag{2}$$

Раскрывая скобки в выражении (2) и вычитая затем (1) из (2), получим:

$$\Delta y(Bx_1+B\Delta x+2Cy_1+C\Delta y+E)=$$
$$=-\Delta x(2Ax_1+A\Delta x+By_1+B\Delta y+D),$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2Ax_1 + A\Delta x + By_1 + B\Delta y + D}{Bx_1 + B\Delta x + 2Cy_1 + C\Delta y + E}.$$

По мере того, как точка Q приближается к точке P_1, Δx и Δy приближаются к нулю, а предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, равный некоторому числу m, представляет собою наклон касательной к нашей кривой в точке P_1.

Итак

[477] $$m = \frac{dy}{dx} = -\frac{2Ax_1 + By_1 + D}{2Cy_1 + Bx_1 + E}$$

есть наклон кривой в точке $P_1(x_1, y_1)$.

Уравнение касательной к кривой $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ в точке (x_1, y_1) поэтому выражается так:

[478] $$y - y_1 = -\frac{2Ax_1 + By_1 + D}{2Cy_1 + Bx_1 + E}(x - x_1),$$

откуда

$$2Cy_1y + Bx_1y + Ey - 2Cy_1^2 - Bx_1y_1 - Ey_1 = \\ = -2Ax_1x - By_1x - Dx + 2Ax_1^2 + Bx_1y_1 + Dx_1.$$

Преобразуя далее, имеем

$$2Ax_1x + B(x_1y + y_1x) + 2Cy_1y + Dx + Ey = \\ = 2Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + 2Cy_1^2 + Dx_1 + Ey_1.$$

Прибавляя выражение $Dx_1 + Ey_1 + 2F$ к обеим частям последнего равенства, получим:

$$2Ax_1x + B(x_1y + y_1x) + 2Cy_1y + D(x + x_1) + E(y + y_1) + 2F = \\ = 2Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + 2Cy_1^2 + 2Dx_1 + 2Ey_1 + 2F.$$

Разделив это равенство на 2, имеем

$$Ax_1x + B\frac{x_1y + y_1x}{2} + Cy_1y + D\frac{x + x_1}{2} + E\frac{y + y_1}{2} + F = 0 \\ = Ax_1^2 + Bx_1y_1 + Cy_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F.$$

Так как точка (x_1, y_1) лежит на кривой и стало быть правая часть последнего равенства равна нулю, то уравнение касательной должно иметь следующий вид:

$$[479] \qquad Ax_1x + B\frac{x_1y + y_1x}{2} + Cy_1y + D\frac{x + x_1}{2} + \\ + E\frac{y + y_1}{2} + F = 0.$$

Это уравнение получится из уравнения данной кривой, если в нем заменить x^2 через x_1x, y^2 через y_1y, xy через $\frac{y_1x + x_1y}{2}$, x через $\frac{x + x_1}{2}$, y через $\frac{y + y_1}{2}$.

Изложенное в этом n^0 представляет собою доказательство правила, приведенного в n^0 793. Все возможные примеры касательных к кривым 2-го порядка могут быть разобраны при помощи последнего способа более просто, чем каким-либо другим путем.

Пример. Найти уравнение касательной к кривой

$$x^2 + xy + 4y^2 - 2x - 2y - 12 = 0$$

в точке $x = 2$.

Чтобы найти значение y, соответствующее $x = 2$, подставим последнее в наше уравнение:

$$4 + 2y + 4y^2 - 4 - 2y - 12 = 0$$

$$4y^2 = 12; \qquad y = \pm\sqrt{3}.$$

Тогда уравнения касательной в точке $(2, \sqrt{3})$ таково:

$$2x + \frac{2y + \sqrt{3}x}{2} + 4\sqrt{3}y - (x + 2) - (y + \sqrt{3}) - 12 = 0, \quad [479]$$

в точке же $(2, -\sqrt{3})$ оно такое же самое, но знак при $\sqrt{3}$ изменяется на обратный.

908. Дифференцирование неявных функций. Во всех предыдущих случаях, за исключением последнего n^0, функция всегда задавалась как явная функция от независимой переменной. Предположим теперь, что y есть неявная функция x и задается например уравнением

$$x^2 + y^2 = 9.$$

Мы можем это выражение представить в явном виде

$$y = \pm\sqrt{9 - x^2}$$

или

$$x = \pm\sqrt{9 - y^2}.$$

В первом уравнении y есть явная функция x, а во втором x — явная функция y. Для возможности дифференцирования вовсе нет необходимости выражать соотношение между переменными явным образом.

Продифференцируем, например, обе части данного уравнения по x; при этом получим:

$$\frac{dx^2}{dx} + \frac{dy^2}{dx} = 0$$

$$2x\frac{dx}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}.$$

Если переменные входят в уравнение таким образом, что y без затруднений нельзя выразить как функцию x, мы можем найти производную y по x, применяя следующий порядок действий.

Переносим все члены уравнения в одну часть равенства, а затем дифференцируем каждый член его в отдельности.

Все члены полученного после дифференцирования выражения, содержащие $\frac{dy}{dx}$, переносим в левую часть равенства: все остальные члены — в правую часть. Выносим $\frac{dy}{dx}$ за скобку в левой части равенства и делим обе части его на множитель левой части, стоящий при $\frac{dy}{dx}$.

Применение этого способа будет понятно из решения следующего примера.

Пример. Продифференцировать

$$3x^3 + 5x^2y + 7xy^2 + 10y^3 + 25 = 0.$$

Дифференцируем каждый член в отдельности:

$$\frac{d(3x^3)}{dx} = 9x^2$$

$$\frac{d(5x^2y)}{dx} = 5x^2\frac{dy}{dx} + 10xy$$

$$\frac{d(7xy^2)}{dx} = 7x\cdot 2y\frac{dy}{dx} + 7y^2 = 14xy\frac{dy}{dx} + 7y^2$$

$$\frac{d(10y^3)}{dx} = 30y^2\frac{dy}{dx}.$$

Перенося все члены с $\frac{dy}{dx}$ в одну сторону равенства, а остальные в другую, получим

$$5x^2\frac{dy}{dx}+14xy\frac{dy}{dx}+30y^2\frac{dy}{dx}=-(9x^2+10xy+7y^2).$$

Вынося $\frac{dy}{dx}$ за скобку, имеем:

$$\frac{dy}{dx}(5x^2+14xy+30y^2)=-(9x^2+10xy+7y^2),$$

откуда

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{9x^2+10xy+7y^2)}{5x^2+14xy+30y^2}.$$

909. Дифференцирование общего уравнения кривой второго порядка. Общее уравнение имеет вид

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

Так как второй член уравнения является произведением двух переменных, то его дифференцирование дает

$$B\left[x\frac{dy}{dx}+y\frac{dx}{dx}\right].$$

Производя дифференцирование данного уравнения, имеем:

$$A\frac{dx^2}{dx}+Bx\frac{dy}{dx}+By\frac{dx}{dx}+C\frac{dy^2}{dx}+D\frac{dx}{dx}+E\frac{dy}{dx}+0=0,$$

откуда получим:

$$2Ax\cdot\frac{dx}{dx}+Bx\frac{dy}{dx}+By\frac{dx}{dx}+2Cy\cdot\frac{dy}{dx}+D\frac{dx}{dx}+E\frac{dy}{dx}=0$$

или

$$2Ax+Bx\cdot\frac{dy}{dx}+By+2Cy\frac{dy}{dx}+D+E\frac{dy}{dx}=0.$$

Окончательно имеем для $\frac{dy}{dx}$ выражение

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2Ax+By+D}{2Cy+Bx+E},$$

совпадающее с результатом, полученным в n⁰ 907.

910. Производная от производной. Производная, вообще говоря, есть некоторая функция независимой переменной, следовательно может быть найдена ее производная; такая производная от производной называется *второй производной* от первоначальной функции.

Если $y = f(x)$, то

$$\frac{d(f[x])}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$

Выражение

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} \text{ обозначается символом } \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Этот символ не означает, что вторая производная есть квадрат первой производной; он лишь указывает на то обстоятельство, что было произведено повторное дифференцирование, при котором производная первоначальной функции рассматривалась как зависимая переменная, дифференцируемая по независимой.

Для выражения функции и ее производных обыкновенно употребляется и другое обозначение, а именно:

$f(x)$ означает функцию,

$f'(x)$ означает ее производную, а

$f''(x)$ означает производную функции, $f'(x)$,

$f''(x)$ называется второй производной функции $f(x)$.

Таким же образом производная от $f''(x)$ называется третьей производной от $f(x)$ и обозначается символом $f'''(x)$ или $\frac{d^3y}{dx^3}$.

Пример. Если

$$y = x^6 + \frac{1}{x^3},$$

то

$$\frac{dy}{dx} = 6x^5 - 3x^{-4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 30x^4 + 12x^{-5}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 120x^3 - 60x^{-6}.$$

911. Последовательное дифференцирование. Процесс нахождения производных от производных называется *последовательным дифференцированием.*

Пример.

$$y = x^n$$

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

$$\frac{d^ry}{dx^r} = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-r+1)x^{n-r}.$$

Если n является положительным целым числом и $r = n$, то

$$\frac{d^ny}{dx^n} = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 1 = n!$$

912. Графики производных. В отделе аналитической геометрии были приведены общие формы квадратного, кубичного и степенного уравнений, а также были показаны изменения в их виде, происходящие вследствие перемещения кривых, выражаемых этими уравнениями. Те же самые принципы, что и в аналитической геометрии, можно применить для определения соотношения между кривой, соответствующей некоторой функции, и кривой, соответствующей ее производной.

При дифференцировании функции вида y равен полиному от x мы установили, что кривая ее производной представляет собою кривую на одну степень ниже чем сама функция. Кривая производной от функции 2-ой степени есть прямая, а кривая производной от кубической функции есть кривая второго порядка, так как производная является функцией второго порядка от x.

Рис. 505 показывает кривые производных, получившихся в результате последовательного дифференцирования простой степенной функции.

913. График производной от общего вида квадратного уравнения $y = ax^2 + bx + c$. Дифференцируя данное уравнение, имеем

$$\frac{dy}{dx} = 2ax + b.$$

Последнее выражение указывает на то, что кривая, соответствующая производной данной нам функции, представляет собой прямую линию, уравнение которой

$$y = 2ax + b.$$

Эта прямая имеет наклон, равный $2a$, и отсекает на оси Y отрезок b, а на оси X $\left(-\frac{b}{2a}\right)$ (рис. 506).

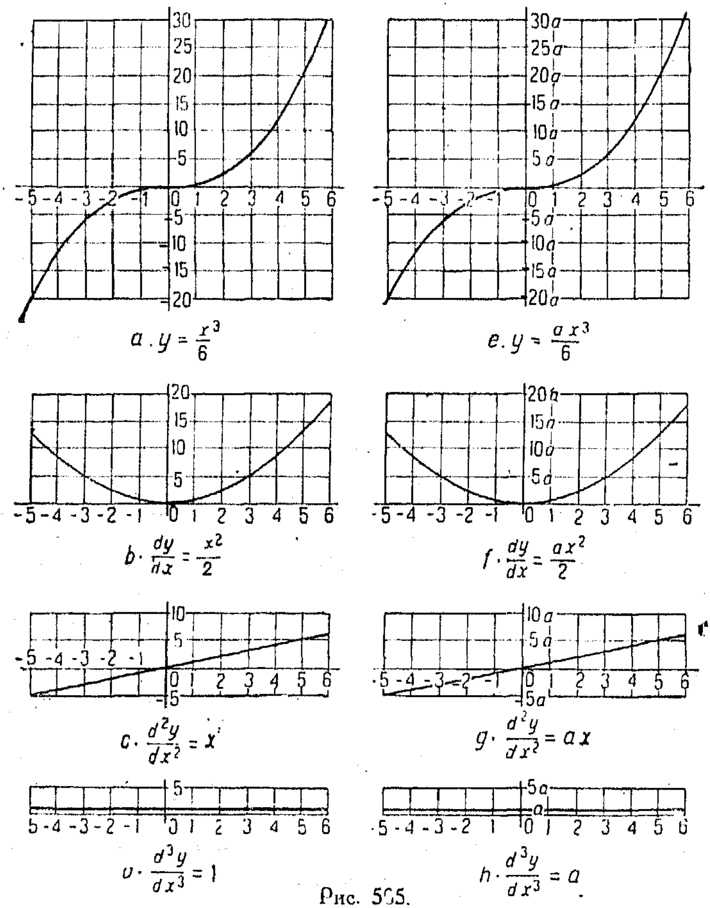


Рис. 505.

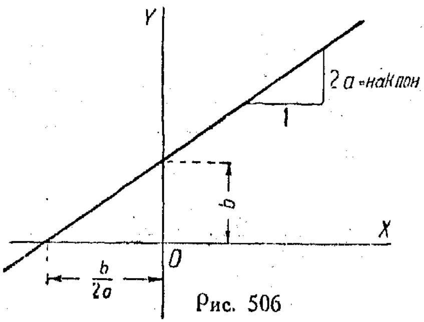


Рис. 506

Пример (рис. 507). Построить кривую производной функции

$$y = x^2 + 12x + 32$$

$$a = 1,\ b = 12,\ c = 32$$

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2} = -6.$$

Наклон $m = 2$.

914. График производной кубической функции

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Дифференцируя, получаем:

$$\frac{dy}{dx} = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Если мы нанесем на рис. 508 значения $\frac{dy}{dx}$ в виде ординат, то полученная при этом кривая представляет собою параболу, ибо равенство

$$y = 3ax^2 + 2bx + c$$

есть уравнение параболы в явной форме.

Взяв основной график $y = x^2$ и перенеся начало координат в точку (h, k), а затем умножив ординаты на a', мы получим кривую, выражаемую уравнением

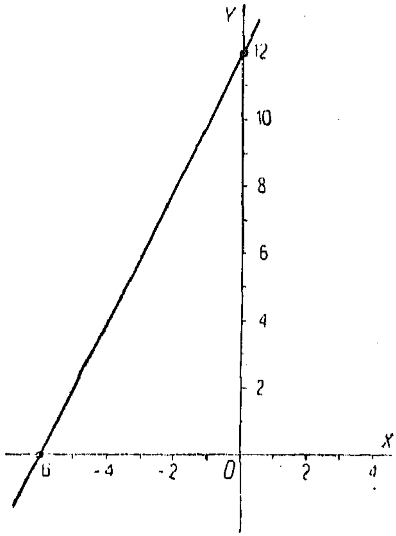


Рис. 507.

$$y = a'x^2 + b'x + c',$$

в котором

$$h = \frac{b'}{2a'}, \; [4] \quad k = \frac{b'^2 - 4a'c'}{4a'} \; [5].$$

Сравнивая полученное в общем виде уравнение с уравнением кривой производной данной кубической функции, мы видим, что

$$a' = 3a, \quad b' = 2b, \quad c' = c.$$

Подставив эти значения коэффициентов в [4] и [5], получим

[480] $$h = \frac{b}{3a}, \quad k = \frac{b^2 - 3ac}{3a}.$$

С помощью преобразований можно основной график $y = x^2$ превратить в график, выражающий кривую производной любого кубического уравнения.

Если h положительно, получаем новое начало координат посредством перенесения старого в положительном направлении. Положение k точно также указывается ее знаком.

Заметим, кроме того, что вертикальная шкала для $y = x^2$ умножается на $3a$, а величины h и k вычисляются соответственно этой новой шкале.

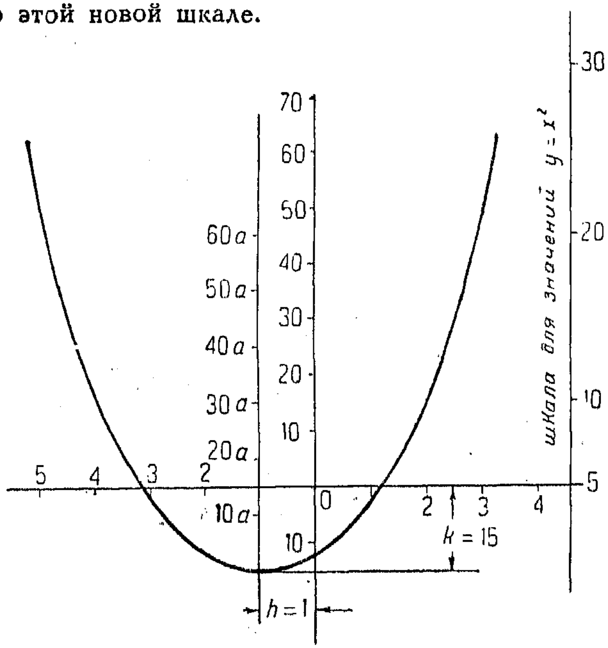


Рис. 508.

Имея в запасе несколько готовых графиков $y = x^2$, можно легко построить кривую производной любого кубического уравнения указанного вида, найдя предварительно новое начало координат и новую шкалу. Рис. 508 показывает кривую производной функции $y = x^3 + 3x^2 - 12x$.

915. График производной уравнений вида

$$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e.$$

Дифференцируя, имеем

$$\frac{dy}{dx} = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d.$$

Выражение, стоящее в правой части равенства, представляет собою кубическую функцию.

Из n⁰ 237 следует, что посредством переноса начала координат и сдвига график $y = x^3$ может быть использован для получения графиков уравнений вида

$$y = a'x^3 + b'x^2 + c'x + d'.$$

Подставляя в соответствующие равенства вместо a величину $4a$, $3b$ вместо b, $2c$ вместо c, мы можем найти также

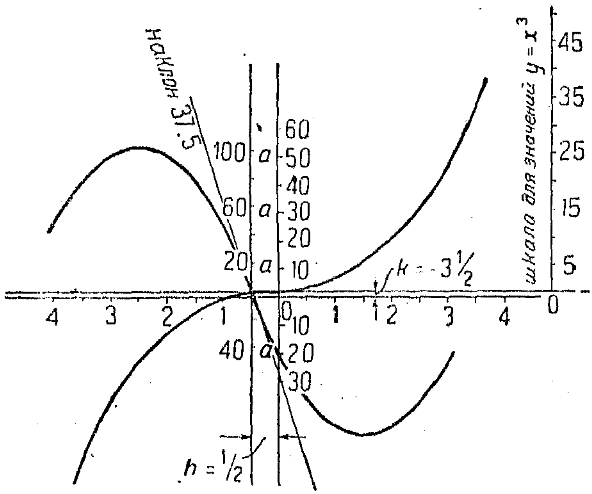


Рис. 509.

новое начало координат и необходимое смещение данного графика, для которых наш график будет представлять собою кривую производной уравнения четвертой степени.

Равенства, служащие для преобразования, получают в этом случае вид:

$$h = \frac{b}{4a}, \quad k = \frac{bc}{2a} - \frac{b^3}{8a^2} - d = -\frac{b}{2a}\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) - d$$

[481] $$m = \text{наклон линии смещения} = 2c - \frac{3b^2}{4a}.$$

Пример (рис. 509). Продифференцировать графическим путем

$$y = \frac{x^4}{2} + x^3 - 18x^2 - 15x.$$

916. Графическое дифференцирование. Графическое дифференцирование состоит в простом построении некоторой новой кривой путем проведения ординат, величина которых находится для различных точек из выражения для наклона данной кривой.

Для того чтобы графически продифференцировать данную кривую (рис. 510), следует тщательно провести касательные к ней в точках 1, 2, 3 и т. д., а затем составить отношение вертикальной стороны треугольников, показанных на рис. 510,

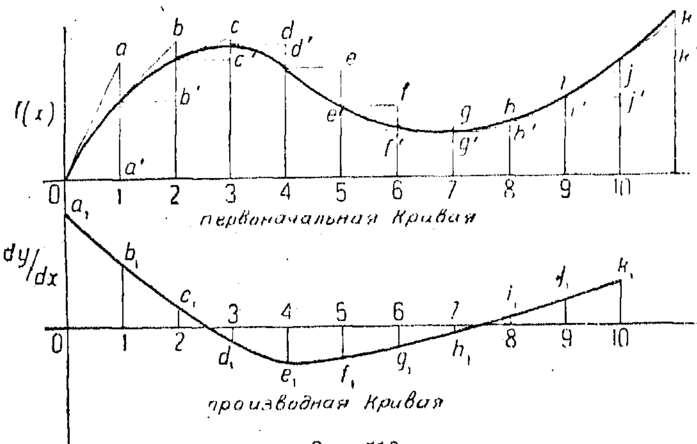


Рис. 510.

к горизонтальной стороне их. Величины этих отношений (т. е. наклонов), нанесенных на рисунке в виде ординат соответствующих точек, определят положение кривой производной данной функции. В разбираемом случае горизонтальный отрезок в каждом из треугольников равен единице; поэтому вертикальные высоты их представляют собою ординаты.

Таким образом ордината, соответствующая $x=0$, есть aa', а соответствующая точке $x=1$ есть bb' и т. д.

Кривая производной получается проведением кривой через концы этих ординат. Следует иметь в виду, что здесь могут иметь место как положительные, так и отрицательные наклоны.

К сожалению, достаточно точное проведение касательной к кривой весьма затруднительно. Существуют другие способы, основанные на том же самом принципе, но лучше достигающие указанной цели. Они будут рассмотрены ниже.

Не следует упускать из виду, что ординаты графика производной, в сущности, показывают ту *скорость изменения в данный момент*, с которой возрастает ордината первоначальной кривой при возрастании абсциссы на единицу.

917. Проведение касательной к кривой в некоторой ее точке. Возьмем простой или пропорциональный циркуль и

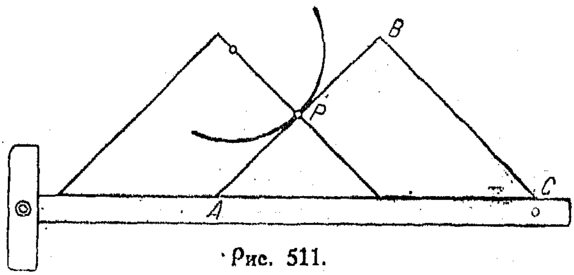


Рис. 511.

найдем центр кривизны. Совместим катет треугольника с прямой, проходящей через точку касания и найденный центр; приложим линейку к гипотенузе треугольника, а затем передвинем треугольник в положение ABC и проведем в точке P касательную AB (рис. 511).

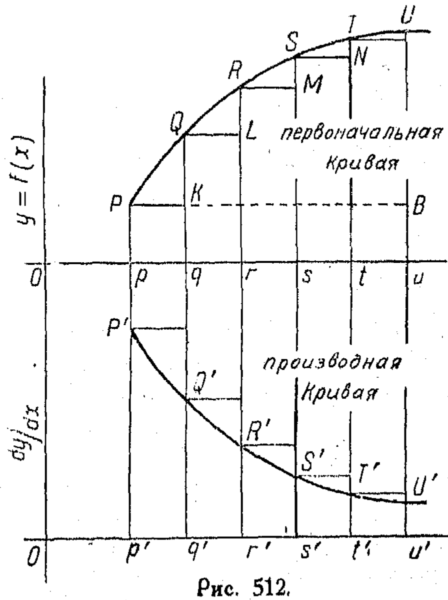


Рис. 512.

918. Сравнение графика функции с графиком ее производной. Рассмотрим точки P и Q (рис. 512), лежащие весьма близко друг от друга. Из n⁰ 888 мы узнали, что по мере того, как Q приближается к точке P, секущая PQ стремится к положению касательной к кривой в точке P (наклон секущей стремится к наклону кривой в этой точке и представляет собою среднюю скорость изменения ординат в весьма малом интервале PK).

Таким образом отношение

$$\frac{QK}{PK}=\frac{QK}{pq}=p'P'$$

представляет собою среднюю скорость изменения.

Поэтому

$$QK=pq\cdot p'P'..$$

Из этого соотношения следует, что отрезок QK по численной величине равен площади полосы со сторонами $p'P'$ и pq. Точно так же площади последующих полос численно равны отрезкам RL, SM, TN и т. д., т. е.

$$QK+RL+SM+TN+\ldots=\text{площади всех полос,}$$

$$\text{вместе взятых}=p'P'\cdot p'q'+q'Q'\cdot q'r'+r'R'\cdot r's'+\ldots$$

Если ширина полос непрерывно уменьшается, а число их возрастает (сумма указанных частей ординат будет при этом оставаться равной отрезку BU, находящемуся при первоначальной кривой), то площадь всех полос, вместе взятых, будет стремиться к площади, расположенной под графиком производной, как к своему пределу.

Это весьма важное сравнение показывает, что разность ординат первоначальной кривой по численной величине равняется площади, заключенной между указанными ординатами, графиком производной и осью X.

$$UB=\text{площадь } p'P'U'u'.$$

Это соотношение используется при графическом дифференцировании.

В этом случае, исходя из разности ординат первоначальной кривой, строят площади полос, а затем проводят кривую.

Пример. Дана кривая $OABCD$ (рис. 513). Продифференцировать ее графически.

Прежде всего, делим расстояние между крайними ее ординатами на полосы, каждая шириною 0,5 единиц. Первая ордината находится у точки A, находящаяся же против нее ордината кривой производной должна быть такой величины, чтобы площадь соответствующей полосы, выраженная в квадратных единицах, равнялась бы численно длине ординаты у точки A. Устанавливаем на циркуле для пропорционального деления отношение $2:1$ и откладываем высоту прямоугольников в два раза больше, чем отрезки Aa, Bb, Cc и т. д.

Можно провести плавную кривую, которая образует равные треугольные площадки, расположенные над кривой и под нею,

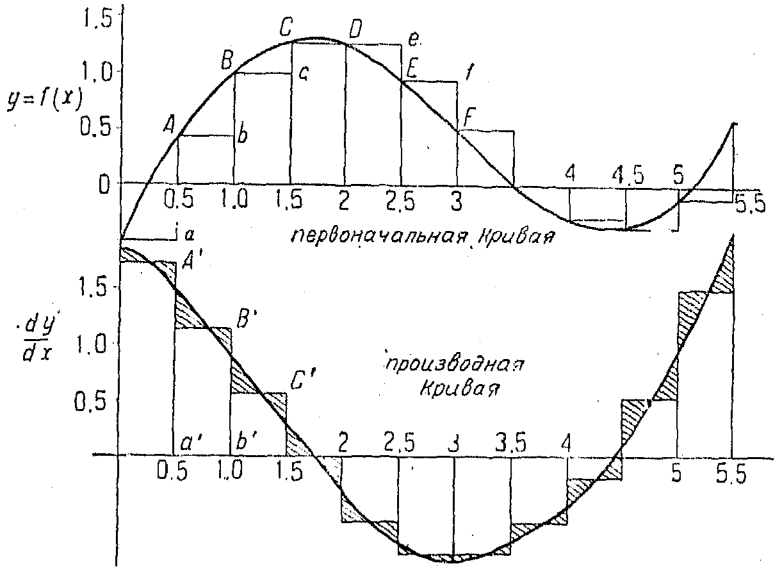


Рис. 513.

в результате чего наши прямоугольники и полоски, находящиеся под кривой и получившиеся после ее проведения, будут иметь равные площади. Проведенная таким образом кривая и есть кривая производной.

На рис. 514 проведена горизонтальная прямая так, чтобы заштрихованные площади C и D были равны друг другу. Таким образом наша кривая делит всю заштрихованную площадь на равные части.

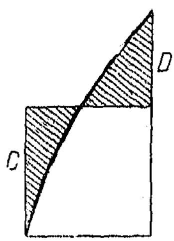


Рис. 514.

Отложим отрезок $a'A'$ (рис. 513), равный удвоенной длине aA. Это можно выполнить при помощи циркуля для пропорционального деления, установленного на отношение $2:1$. Затем отложим отрезок $b'B'$, равный удвоенному — bB, и т. д.

Проведем кривую через точки, расположенные указанным выше образом. Эта кривая будет представлять собою искомый график производной.

Глава XLIV.

ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ.

919. Вычисление приближенных значений корней уравнения по методу Ньютона. Покажем применение метода Ньютона на каком-либо примере.

Положим, нам дано уравнение

$$x^3+3x^2-2x-14=0.$$

Прежде всего начертим его график (n⁰ 252).

Этот график покажет, что корень данного уравнения немного больше, чем 2:

Подставим в данное уравнение, а также в его первую производную, $x=2$:

$$y=8+12-4-14=+2$$

$$\frac{dy}{dx}=3x^2+6x-2$$

$$\frac{dy}{dx}=12+12-2=22=\text{наклон}.$$

Пусть Δx есть весьма малое расстояние от точки $x=2$ до пересечения оси X с касательной, проведенной к кривой в той же точке, для которой абсцисса $x=2$.

Примем, что часть графика от указанной точки касания до пересечения с осью X является прямой линией, т. е. график совпадает с касательной; тогда наклон его

$$\frac{2}{\Delta x}=22,$$

откуда

$$\Delta x=\frac{2}{22}=0{,}09.$$

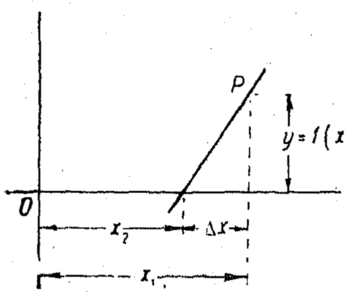


Рис. 515.

В этом случае (т. е. считая, что график совпадает с касательной), график пересечет ось X в некоторой точке, находящейся на расстоянии в 0,09 единицы от точки $x=2$ (вправо от $x=2$), поэтому

$$x\approx 2{,}09.$$

Если x_1 есть первое приближенное значение корня уравнения $f(x)=0$, то выражение

[482] $$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

представляет собою другое значение его, вообще говоря более близкое к действительному. Это действие можно повторить любое число раз.

Для доказательства справедливости высказанного положения поступаем так: строим график данного уравнения и находим первое приближенное значение x_1. После подстановки x_1 в $y=f(x)$ получаем $y=f(x_1)$.

Обозначаем весьма малое расстояние от точки пересечения оси X с касательной, проведенной через точку $P(x_1, y)$ кривой, до точки $x=x_1$, через Δx.

Тогда наклон кривой в точке, соответствующей $x=x_1$, равен

$$f'(x_1) = \frac{f(x_1)}{\Delta x} \text{ приближенно,}$$

следовательно

$$\Delta x = \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Но так как $x_2 = x_1 - \Delta x$, то

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \qquad [482]$$

Пример. Найти приближенное значение корня уравнения

$$x + \sin x - 3 = 0.$$

Пусть

$$y_1 = x - 3, \text{ а } y_2 = \sin x.$$

Тогда

$$y = y_1 + y_2.$$

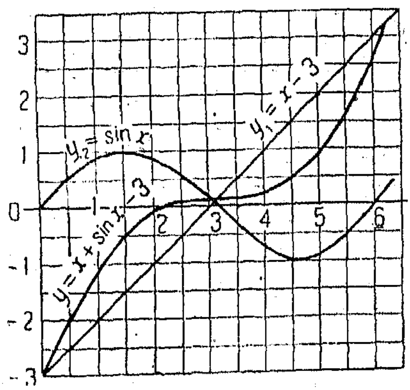


Рис. 516.

Проводим графики выражений $y_1 = x - 3$ и $y_2 = \sin x$ (x берется в радианах); складывая соответствующие ординаты этих двух графиков, получим график выражения

$$y = x + \sin x - 3.$$

Из рис. 516 видно, что значение корня близко к $x_1 = 2{,}2$.

Тогда

$$f(x_1) = 2{,}2 + \sin 2{,}2 - 3 = 0{,}009$$
$$f'(x_1) = 1 + \cos 2{,}2 = 1 - 0{,}588 = 0{,}412$$
$$x_2 = 2{,}2 - \frac{0{,}009}{0{,}412} = 2{,}2 - 0{,}022.$$
$$x_2 = 2{,}178$$

есть искомое приближенное значение корня.

Применение метода Ньютона к решению уравнений, не представляющих собою многочленов, дает весьма благоприятные результаты, в то время как для решения многочленных уравнений более пригоден способ Хорнера (n^0 253).

920. Скорость (в обычном смысле) и векториальная скорость. Термин „скорость" имеет двоякий смысл. В одном случае под словом „скорость" понимают скорость движения (т. е. скорость, с которой изменяется проходимый движущимся телом путь) независимо от направления. В других же случаях слово „скорость" означает скорость в определенном направлении; здесь, следовательно, последняя представляет собою векториальную величину, обладающую как определенным направлением, так и определенными размерами.

921. Перемещение. Изменение положения некоторой частицы называется ее *перемещением*.

Пусть A и B (рис. 517) представляют собою два перемещения одной и той же точки, причем P_1 есть ее первоначальное положение. Проведя сначала отрезок P_1P_2, равный и параллельный A, а затем из точки P_2 отрезок P_2P_3,

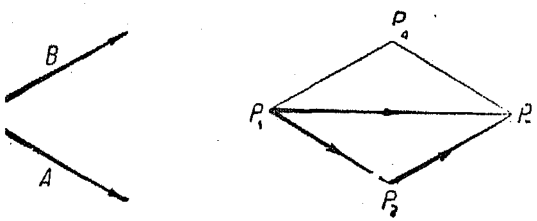


Рис. 517.

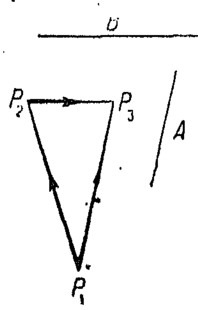


Рис. 518.

равный и параллельный B, мы найдем такое одно перемещение P_1P_3, которое эквивалентно данным двум, A и B.

Это результирующее перемещение может быть выражено диагональю параллелограмма, построенного на отрезках A и B, как на его сторонах. Оно изображено на рис. 517 как замыкающая сторона треугольника, стороны которого суть A и B, и отмечено стрелкой, направленной в сторону, прямо противоположную направлению замыкающей стороны треугольника.

Перемещение можно разложить на какое угодно число составляющих перемещений. Так, например, перемещение P_1P_2 (рис. 518) можно разложить на составляющие, параллельные прямым A и B.

922. Прямолинейное движение. Рассмотрим движение точки P по прямой линии AB (рис. 519).

Пусть s есть расстояние точки P до некоторой неподвижной точки A; пусть, кроме того, t — время, за которое движущаяся точка проходит расстояние AP, обозначаемое через s. Так как t почти всегда принимается за независимую переменную, то каждому значению t соответствует некоторое положение точки P, а следовательно и некоторое расстояние s. s есть функция t, или

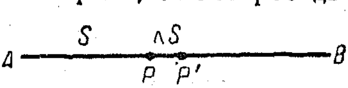


Рис. 519.

$$s = f(t).$$

Положим, что t получает приращение Δt, тогда s также получит приращение Δs.

В таком случае $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ = средняя скорость за промежуток времени Δt.

Если P движется равномерно, это отношение представляет собою постоянную величину и имеет одно и то же значение в любой момент времени.

Если P движется неравномерно, то скорость в данный момент (скорость изменения s по отношению к t) есть предел отношения $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, когда Δt стремится к нулю. Таким образом

[483] $$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

Указанная скорость есть первая производная пути по времени.

Из опыта известно, что тело, падающее в пустоте вблизи земной поверхности, подчиняется следующему закону:

$$s = \frac{9{,}81 \cdot t^2}{2} = 4{,}905t^2,$$

где s — пройденный путь в метрах, t — время в секундах.

Дадим t приращение Δt. Тогда s получит приращение Δs.

$$s+\Delta s=\frac{9{,}81\,(t+\Delta t)^2}{2}=4{,}905\,(t+\Delta t)^2=$$
$$=4{,}905\,t^2+9{,}81\cdot t\cdot\Delta t+4{,}905\,\Delta t^2.$$

Вычитая $s=4{,}905\,t^2$, получим

$$\Delta s=9{,}81\cdot t\cdot\Delta t+4{,}905\cdot\Delta t^2.$$

Разделив на Δt, имеем среднюю скорость в интервале времени Δt:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=9{,}81\,t+4{,}905\,\Delta t.$$

Скорость в данный момент времени:

$$\frac{ds}{dt}=9{,}81\cdot t.$$

Например, скорость в конце 10-ой секунды

$$\frac{ds}{dt}=9{,}81\cdot 10\approx 98{,}1\ \text{м/сек.}$$

923. Ускорение в прямолинейном движении. Скорость изменения скорости точки, движущейся по прямой, в зависимости от времени, называется *ускорением*; последнее мы будем обозначать буквой a. Таким образом

[484] $$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Пример. Вертикальная высота мяча, брошенного кверху со скоростью 50 *м/сек*, в конце t сек. равняется

$$h=50\,t-4{,}905\,t^2.$$
$$v=\frac{dh}{dt}=50-9{,}81\,t\ \text{м/сек.}$$
$$a=\frac{d^2h}{dt^2}=-9{,}81\ \text{м/сек}^2.$$

Заметим, что скорость уменьшается по мере того, как поднимается мяч; это происходит вследствие того, что ускорение отрицательно.

Мяч поднимается до того момента, когда скорость становится равной нулю, т. е.

$$\frac{dh}{dt}=0.$$

Тогда

$$50 - 9{,}81\,t = 0$$

$$t = 5{,}1 \text{ сек.}$$

Мяч поднимается 5,1 сек. после того, как его бросили.

Чтобы определить высоту, с которой он начнет падать обратно, найдем h для $t = 5{,}1$ сек.

$$h = 50\,t - 4{,}905\,t^2$$

$$= 255 - 127{,}58 = 127{,}42 \text{ м.}$$

924. Кривые расстояний. Наклон кривой расстояний выражает скорость:

$$v = \frac{ds}{dt} = k = \text{скорость изменения } s \text{ в зависимости от } t.$$

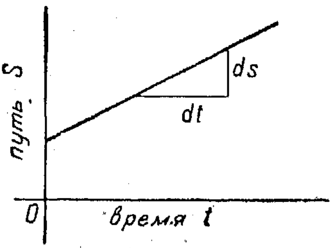


Рис. 520.

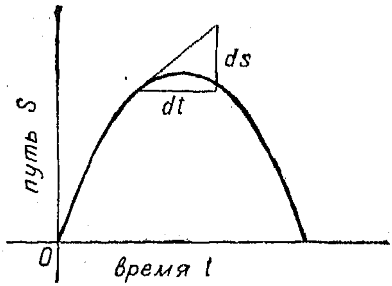


Рис. 521

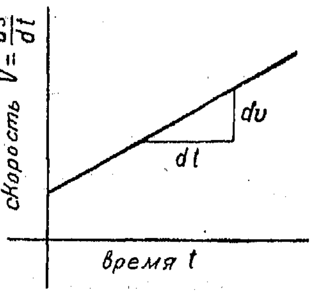


Рис. 522.

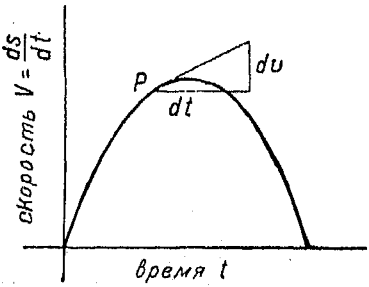


Рис. 523.

Если наклон представляет собою постоянную величину, скорость также постоянна (рис. 520).

Если наклон изменяется, то и скорость представляет собою также переменную величину (рис. 521).

925. Кривые скоростей. Наклон кривой на рис. 522 выражает ускорение, т. е. степень изменения скорости по отношению ко времени.

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Если наклон имеет постоянную величину, то и ускорение постоянно.

Если же $\frac{d^2s}{dt^2}$ есть переменная, наклон изменяется, поэтому и ускорение также изменяется (рис. 523).

926. Угловая скорость и угловое ускорение. Рассмотрим точку, вращающуюся около центра O (рис. 524).

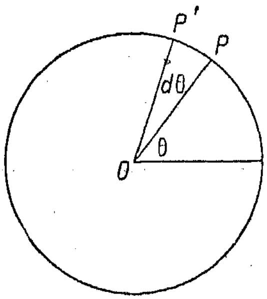


Рис. 524.

Пусть θ угол, на который повернется отрезок OP за время t, а ω — угловая скорость, т. е. скорость изменения θ в зависимости от времени (θ выражено в радианах).

Тогда

[485] $$\text{угловая скорость}=\omega=\frac{d\theta}{dt}.$$

Угловое ускорение α, т. е. скорость изменения угловой скорости по отношению ко времени, выражается так:

[486] $$\text{угловое ускорение}=\alpha=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}{dt}=\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

В этом случае, когда задается число оборотов в минуту n, вместо угловой скорости ω можно пользоваться равенством

$$\omega=\frac{2\pi n}{60}\text{ радиан в секунду.}$$

Пример. Колесо, выходя из состояния покоя, начинает вращаться вокруг своей оси под действием постоянного момента, причем оно будет за t сек поворачиваться на угол

$$\theta=kt^2,$$

где k — некоторая постоянная. Найдем угловую скорость и ускорение колеса в момент времени t.

$$\text{Скорость} = \omega = \frac{d\theta}{dt} = 2k \cdot t \text{ радиан/сек.}$$

$$\text{Ускорение} = a = \frac{d\omega}{dt} = 2k \text{ радиан/сек}^2.$$

927. Средняя скорость. Средняя скорость точки, передвинувшейся из положения P_1 в положение P_2 за некоторый промежуток времени, есть частное от деления длины хорды P_1P_2 на число единиц времени, соответствующих этому промежутку.

По мере того как промежуток времени движения нашей точки уменьшается, перемещение P_1P_2 становится все меньше и меньше, а направление средней скорости приближается к направлению касательной в точке P_1, и мы, в конце концов, имеем как по величине, так и по направлению скорость в данный момент.

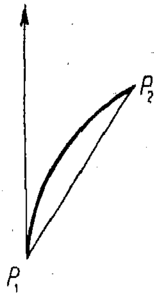


Рис. 525.

Величина средней скорости точки есть частное от деления длины дуги P_1P_2 на число единиц интервала времени, в течение которого произошло перемещение точки из положения P_1 в P_2.

Если точка двигается по кривой, величина скорости представляет собою скорость изменения длины пройденного пути в зависимости от времени. Сама же скорость в данной точке P определяется вектором PT, касательным к траектории в указанной точке. Такая скорость есть векториальная величина, ибо она имеет и направление и размеры. Скорость, когда идет речь о ее направлении, следует всегда выражать указанным выше образом. Величина скорости точки, понимая ее, как путь, пройденный в единицу времени, независимо от направления, не может быть выражена вектором, ибо в этом случае нет никаких указаний относительно ее направления.

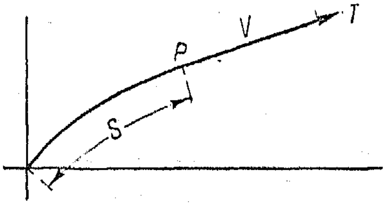


Рис. 526.

По мере того как интервал времени Δt приближается к нулю, величина средней скорости, не характеризуемой направлением, стремится к величине скорости в данный момент в данной точке P как к пределу. Такой предел также не характеризуется направлением.

Средняя, не характеризуемая направлением величина скорости для данного интервала Δt стремится к величине скорости в данный момент t по мере того как Δt приближается к нулю.

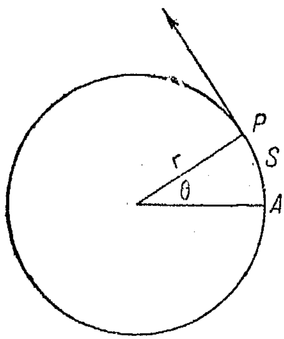


Рис. 527.

Вектор, выражающий скорость точки P в данный момент и являющийся касательной к траектории в указанной точке, представляет собою направление и путь, который прошла бы точка за единицу времени, если бы ее движение продолжалось без действия сил, начиная с указанного момента.

Пример. Колесо радиуса r вращается со скоростью N оборотов в минуту. Найти величину и направление скорости точки, находящейся на ободе колеса (рис. 527).

Пусть s — дуга AP (от A до движущейся точки P). Тогда

$$s = r\theta,$$

где r — радиус, θ — угол вращения в радианах.

Величина скорости, вычисляемая независимо от ее направления, есть

$$\frac{ds}{dt} = r \cdot \frac{d\theta}{dt} = 2\pi r \cdot N \ \text{м/мин},$$

так как 2π есть угол одного поворота, а $\frac{d\theta}{dt} = 2\pi N$ для N оборотов.

Векториальная скорость также равняется $2\pi r N$ *м/мин* и направлена она по касательной в точке P. Величина скорости, вычисленная независимо от направления, одинакова для всех точек, скорость же векториальная для данной точки отличается по направлению от скорости для других точек, хотя последняя имеет везде одну и ту же численную величину.

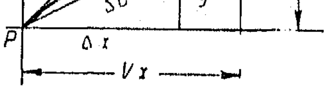


Рис. 528.

928. Величина скорости в данный момент и направление движения точки. Пусть Δs — длина дуги PQ, пройденная точкой за весьма малый промежуток времени Δt, который имеет место непосредственно вслед за некоторым рассматриваемым моментом (рис. 528).

Тогда скорость v есть предел средней скорости $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. Квадрат хорды $(\Delta c)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$, откуда

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)^2 \left(\frac{\Delta c}{\Delta s}\right)^2 = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2.$$

Пусть Δt приближается к нулю. Тогда:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \text{ приближается к } \frac{ds}{dt} = v$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \text{ приближается к } \frac{dx}{dt} = v_x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} \text{ приближается к } \frac{dy}{dt} = v_y$$

$$\frac{\Delta c}{\Delta s} \text{ приближается к } 1.$$

Произведя подстановку, получим

[487] $$v = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2}\ .$$

Направление движения есть направление касательной, или

[488] $$\operatorname{tg} A = \frac{dy}{dx}\ .$$

Разделив числитель и знаменатель на dt, получим:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{v_y}{v_x} = \text{направление движения.}$$

Пример. Рассмотрим x и y как функции времени t. Выпущено ядро в таком направлении, что за t сек. оно проходит по горизонтали путь

$$x = 153\sqrt{3}\,t,$$

а по вертикали

$$y = 153t - 4{,}905t^2$$

Найти скорость в конце 10-ой секунды.

$$\frac{dx}{dt} = 153\sqrt{3}$$

$$\frac{dy}{dt} = 153 - 9{,}81\,t.$$

Подставив $t = 10$, получим

$$\frac{dy}{dt} = 153 - 9{,}81 \times 10 = 54{,}9$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{(153\sqrt{3})^2 + (54{,}9)^2} = 270{,}6$$

Пример. Рассмотрим уравнения движения проекций снаряда на оси X и Y.

$$x = 307\,t;\; y = 153\,t - 4{,}9\,t^2.$$

Скорость возрастания высоты снаряда в любой момент есть скорость движения его вертикальной проекции, т. е.

$$\text{вертикальная скорость} = \frac{dy}{dt} = 153 - 9{,}81\,t.$$

Таким образом в момент $t = 10$ снаряд поднимается по вертикали кверху со скоростью

$$153 - 9{,}81 \times 10 = 54{,}9 \text{ м/сек.}$$

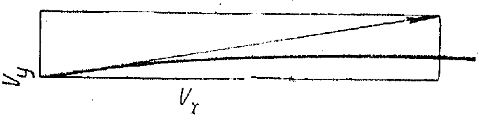


Рис. 529.

Точно так же, так как

$$\frac{dx}{dt} = 307,$$

снаряд будет двигаться в горизонтальном направлении со скоростью 307 *м/сек.*

Если мы начертим в некотором масштабе *векторы*, представляющие собою составляющие скорости, то действительная скорость как по величине, так и по направлению будет выражаться диагональю прямоугольника.

Поэтому

$$v = \sqrt{(307)^2 + (54{,}9)^2} \approx 312$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{54{,}9}{307} = 0{,}18.$$

$$A = 10°20'.$$

Таким образом в момент времени $t = 10$ снаряд будет двигаться со скоростью 312 *м/сек* в таком направлении, которое образует с горизонтом угол в $10°20'$.

929. Соотношение между угловой и линейной скоростями в круговом движении точки.

Из рис. 530

$$\Delta s = r\Delta\theta,$$

откуда

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = r \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta t}.$$

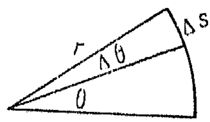


Рис. 530.

Тогда при Δt, стремящемся к нулю,

[488a] $$\frac{ds}{dt} = r \cdot \frac{d\theta}{dt}.$$

Скорость любой точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, есть произведение расстояния данной точки от оси на угловую скорость тела.

Аналогичный закон существует и для касательного ускорения.

$$v = r \cdot w$$

$$\frac{dv}{dt} = r\,\frac{dw}{dt}. \qquad [489]$$

Касательное ускорение некоторой точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, есть угловое ускорение относительно указанной оси, умноженное на расстояние данной точки от оси.

930. Криволинейное движение на плоскости. Выше пояснялось, что термин „скорость" имеет двоякий смысл: в одних случаях его применяют в виде скорости точки, движущейся по некоторой траектории безотносительно к направлению движения, и здесь скорость является величиной невекториальной. В других случаях термин „скорость" выражает скорость движения в некотором данном направлении.

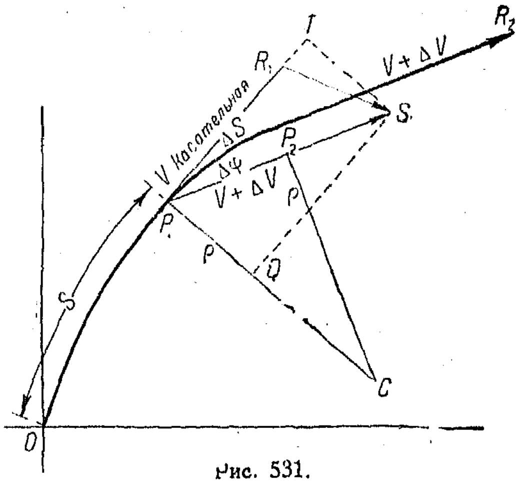


Рис. 531.

Положим точка перемещается по криволинейной траектории из P_1 в P_2 за интервал времени Δt, причем v и $v+\Delta v$ выражают скорости нашей точки в положениях P_1 и P_2. Направления скоростей в указанных точках совпадают с направлением соответствующих касательных к данной кривой, ибо движущаяся точка продолжала бы двигаться по касательной, если некоторая сила не заставила ее итти по данной криволинейной траектории. Если Δs выражает путь, пройденный за время Δt, то $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ представляет собою величину средней скорости за время Δt.

Проведем $P_1S = P_2R_2 \doteq v + \Delta v$.

R_1S выражает собою изменение скорости за интервал времени Δt, а $\frac{R_1S}{\Delta t}$ дает среднюю скорость этого изменения, т. е. ускорение.

Так как скорость и ускорение являются величинами векториальными, то вектор R_1S можно разложить в любых направлениях, однако для удобства его составляющие берутся по нормали и по касательной к данной кривой. Изменение скорости от v до $v+\Delta v$ указывается направлением вектора R_1S.

Проведем нормали P_1C и P_2C и спроектируем R_1S на касательную и нормаль в точке R_1. Проекция вектора R_1S на эту касательную есть R_1T, а на нормаль — отрезок P_1Q. Интервал времени есть Δt.

Из рис. 531 следует, что

$$P_1Q = TS = P_1S \cdot \sin\Delta\varphi,$$

т. е.

$$\text{нормальная составляющая} = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{P_1Q}{\Delta t}\right] = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{P_1S \cdot \sin\Delta\varphi}{\Delta t}\right].$$

Подставляем $v+\Delta v$ вместо P_1S, затем одновременно умножаем и делим на $\Delta\varphi$ и Δs, что не изменяет величину выражения. Тогда:

$$\text{нормальная составляющая:} = \lim_{\Delta t \to 0}\left[(v+\Delta v)\cdot\frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi}\cdot\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t}\right].$$

По мере того как Δt становится все меньше и меньше, т. е. приближается к нулю,

$v+\Delta v$ приближается к v

$\frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi}$ стремится к 1 (n⁰ 936)

$\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ стремится к $\frac{1}{\rho}$ (n⁰ 975),

$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ стремится к $\frac{ds}{dt} = v$.

Таким образом

490] $$\text{нормальная составляющая} = v\cdot 1\cdot\frac{1}{\rho}\cdot v = \frac{v^2}{\rho},$$

где ρ есть радиус кривизны данной кривой в точке P_1.

Если траектория есть окружность, $\rho = r$ и [491] нормальное ускорение для траектории — окружности, есть $\frac{v^2}{r}$.

Если скорость по величине постоянна, касательное ускорение равно нулю, а нормальное все же равняется $\frac{v^2}{r}$ и направлено к центру окружности.

Касательное ускорение есть

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{R_1 T}{\Delta t}\right].$$

$$R_1 T = P_1 T - P_1 R_1.$$

Но $P_1 T = P_1 S \cdot \cos \Delta\varphi = (v + \Delta v) \cos \Delta\varphi$ и $P_1 R_1 = v$, поэтому

$$\text{касательное ускорение} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{(v + \Delta v)\cos \Delta\varphi - v}{\Delta t}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{(\cos \Delta\varphi - 1)\ v + \Delta v \cdot \cos \Delta\varphi}{\Delta t}\right].$$

А так как

$$1 - \cos \Delta\varphi = 2 \sin^2 \frac{1}{2} \Delta\varphi,$$

$$\text{то касательное ускорение} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[-\frac{2 v \sin^2 \frac{1}{2} \Delta\varphi}{\Delta t} + \frac{\Delta v}{\Delta t} \cos \Delta\varphi\right].$$

Умножив и разделив первый член этого выражения на $\Delta\varphi$, а затем произведя в нем соответствующие преобразования, получим:

касательное ускорение =

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left[-\frac{\sin \frac{1}{2} \Delta\varphi}{\frac{1}{2} \Delta\varphi}\, v \cdot \sin \frac{1}{2} \Delta\varphi \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} + \frac{\Delta v}{\Delta t} \cdot \cos \Delta\varphi\right]$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta\varphi}{\frac{1}{2}\Delta\varphi}\ \text{стремится к 1.}$$

$$\sin\frac{1}{2}\Delta\varphi\ \text{стремится к 0.}$$

$$\cos\Delta\varphi\ \text{стремится к 1.}$$

Следовательно,

[492] $$\text{касательное ускорение} = -1\cdot 0\cdot\frac{d\varphi}{dt}+\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Тело весом W, перемещающееся по криволинейной траектории, имеет в любой момент своего движения:

$$\text{касательное ускорение} = \frac{dv}{dt}$$

$$\text{нормальное ускорение} = \frac{v^2}{\rho}.$$

Согласно основным законам движения, сила, вызывающая движение, $\frac{W}{g}a$ [1]), должна быть равнодействующей двух сил составляющих, т. е.

$$\text{касательной силы} = \frac{W}{g}\cdot\frac{dv}{dt},$$

$$\text{нормальной силы} = \frac{W}{g}\cdot\frac{v^2}{\rho}.$$

[493] Равнодействующее ускорение равняется

$$\sqrt{(\text{нормальное ускорение})^2+(\text{касательное ускорение})^2}$$

или

$$\text{равнодействующее ускорение} = \sqrt{\frac{v^4}{\rho^2}+\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}$$

и оно имеет направление, определяемое углом

[494] $$\theta = \operatorname{arctg}\frac{v^2}{\rho\frac{dv}{dt}},$$

---

1) Буквой a обозначено ускорение движения.

где θ есть угол между касательной к кривой в точке P_1 и направлением равнодействующего ускорения.

Задачи.

931. Вследствие повышения температуры ребро металлического куба удлиняется на 0,04 *см* за один час.

Как быстро возрастает объем его за час, если длина ребра обозначена через x, а объем куба через V?

Нам известно соотношение

$$V = x^3.$$

Длина ребра x, а следовательно, и V являются функциями другой переменной величины—времени, которую мы обозначим через t (в часах).

Тогда

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}, \qquad [469]$$

из соотношения $V = x^3$,

$$\frac{dV}{dx} = 3x^2.$$

Мы знаем, кроме того, что скорость изменения x по отношению ко времени есть 0,04 *см/час*, т. е.

$$\frac{dx}{dt} = 0{,}04 .$$

Подставляя эти величины, получим

$$\frac{dV}{dt} = 3x^2 \times 0{,}04 = 0{,}12x^2 .$$

Если мы теперь пожелаем узнать, с какой скоростью изменяется объем при x, имеющем какое либо определенное значение, нам следует только подставить это значение x в приведенное выше выражение. Так например, когда $x = 10$,

$$\frac{dV}{dt} = 0{,}12\,(10)^2 = 12 \text{ см}^3/\text{час}.$$

932. Один конец 20-метровой пожарной лестницы находится на земле в 12 *м.* от основания здания; другой конец покоится на стене. Первый конец отодвигают от здания по прямой, перпендикулярной к нему, с постоянной скоростью в 4 *м/сек.* Найти закон движения второго конца лестницы.

Первый способ. Рассматриваем высоту второго конца как функцию горизонтального расстояния от основания нашей лестницы до здания, а расстояние это рассматриваем как функцию времени. Такое соотношение вводит функцию от функции.

Из прямоугольного треугольника получается

$$x^2 + y^2 = 20^2. \qquad (1)$$

Из условий задачи следует, что расстояние от основания лестницы до здания есть функция времени:

$$x = 12 + 4\,t. \qquad (2)$$

Дифференцируя (1), получаем

$$2x + 2y\,\frac{dy}{dx} = 0,$$

откуда скорость изменения y по отношению к x есть

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{400 - x^2}}.$$

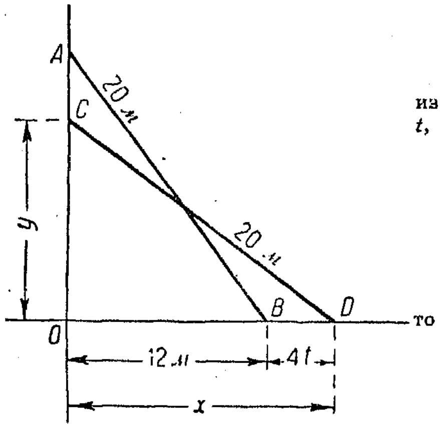


Рис. 532.

Из (2) найдем скорость, с которой x изменяется в зависимости от времени t, т. е.

$$\frac{dx}{dt} = 4.$$

Так как

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}, \qquad [469]$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{\sqrt{400 - x^2}} \times 4 = -\frac{4x}{\sqrt{400 - x^2}}. \qquad (3)$$

Предположим теперь, что мы желаем знать, с какой скоростью перемещается верхушка лестницы в момент времени $t = 1$ сек.

Подставим $t = 1$ во (2), получим

$$x = 12 + 4\cdot 1 = 16.$$

Подставляя же $x = 16$ в (3), получаем

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{4\times 16}{\sqrt{400 - 256}} = -\frac{64}{12} = -5\,\frac{1}{3}\ \text{м/сек.}$$

Знак минус указывает на то, что высота уменьшается со скоростью $5\frac{1}{3}$ *м/сек.*

Надо заметить, что в этой задаче мы имеем такое геометрическое соотношение, которое позволяет выразить неявным образом связь между x и y посредством уравнения

$$x^2 + y^2 = 20^2,$$

Кроме того, исходя из условий задачи, мы можем выразить x как явную функцию третьей переменной t и найти производную от y по t, применяя формулу для разыскания производной функции от функции.

Второй способ (рис. 533). Напишем высоту y в виде функции горизонтального расстояния, выраженного через время t, тогда мы будем просто иметь функцию y независимой переменной t, т. е.

$$y = \sqrt{400 - (12 + 4t)^2}$$
$$= 4\sqrt{16 - 6t - t^2}$$
$$= 4(16 - 6t - t^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$\frac{dy}{dt} = 4 \times \frac{1}{2}(16 - 6t - t^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{d(16 - 6t - t^2)}{dt}$$
$$= \frac{2(-6 - 2t)}{\sqrt{16 - 6t - t^2}} = \frac{-12 - 4t}{\sqrt{16 - 6t - t^2}}.$$

Если $t = 1$, как и выше, то

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-12 - 4}{\sqrt{16 - 6 - 1}} = -\frac{16}{3} = -5\frac{1}{3} \text{ м/сек.}$$

Если задача требовала бы найти формулу движения верхушки лестницы относительно начальной точки A, то искомое уравнение этого движения имело бы вид

$$y = 16 - 4\sqrt{16 - 6t - t^2}.$$

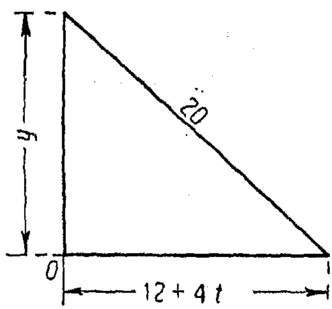


Рис. 533.

Доказательство последнего предоставляется читателю.

При решении задачи по второму способу, геометрическое соотношение и соотношение между расстоянием и временем были объединены в одном уравнении. Это было сделано простой подстановкой независимой переменной t вместо расстояния x соответственно уравнению, выражавшему связь между ними.

Говоря другими словами, если y выражено через x, а x через t, то y может быть выражено непосредственно через t. В виде примера возьмем

$$y = x^5 \text{ и } x = t^2.$$

Тогда

$$y = t^{10}.$$

Мы можем продифференцировать y как функцию от функции

$$\frac{dy}{dx}=5x^4 \text{ и } \frac{dx}{dt}=2t$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=5x^4\times 2t=5t^8\times 2t=10t^9, \quad [469]$$

или можно также продифференцировать y по независимой переменной непосредственно:

$$y=t^{10}$$

$$\frac{dy}{dt}=10\,t^9.$$

В некоторых случаях часто бывает неудобно применять последний способ и поэтому первый, хотя и требует большего количества времени, является более надежным, чем второй.

933. Вода втекает с постоянной скоростью, равной 10 *см*^{3}/*мин* в сосуд, имеющий форму прямого конуса. Половина вертикального угла при вершине его равна 45°, ось вертикальна, конус обращен вершиной книзу.

С какой скоростью поднимается поверхность воды в конусе и увеличивается площадь этой поверхности?

Вычислить скорость, с которой поднимается поверхность воды, когда глубина ее равна 25 *см*.

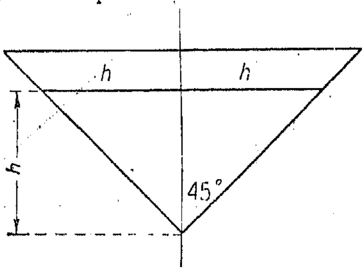


Рис. 534.

$$\text{Объем}=\frac{1}{3}\,h\cdot\pi\,h^2=\frac{1}{3}\,\pi h^3.$$

$$\frac{dV}{dh}=\pi h^2= \text{скорость изменения}$$

объема по отношению к высоте.

Из условия задачи

$$\frac{dV}{dt}=10 \text{ см}^3/\text{мин}.$$

Но

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dh}\cdot\frac{dh}{dt} \quad \text{или} \quad 10=\pi h^2\cdot\frac{dh}{dt}, \quad [469]$$

откуда

$$\frac{dh}{dt}=\frac{10}{\pi h^2}.$$

Когда $h=25$,

$$\frac{dh}{dt}=\frac{10}{\pi\cdot 625}=0{,}0051 \text{ см/мин}.$$

Вычисленная величина есть скорость, с которой возрастает высота воды в тот момент, когда она равна 25 *см*.

Чтобы определить скорость, с которой увеличивается площадь поверхности воды, рассмотрим выражение для площади

$$A = \pi h^2.$$

Дифференцируя, получаем

$$\frac{dA}{dh} = 2\pi h = \text{скорости изменения площади.}$$

Скорость изменения площади по отношению ко времени есть

$$\frac{dA}{dt}, \text{ но } \frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}. \qquad [469]$$

Из первой части задачи знаем, что

$$\frac{dh}{dt} = \frac{10}{\pi h^2}.$$

Поэтому

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi h \times \frac{10}{\pi h^2} = \frac{20}{h}.$$

Когда $h = 25$,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{20}{25} = 0{,}8 \ \textit{см}^2/\textit{мин}.$$

Вычисленная величина и есть та скорость, с которой увеличивается площадь поверхности в тот момент, когда высота воды равна 25 *см*.

934. Корабль A, плывущий на восток со скоростью 12 *км/час*, покинул некоторую точку за 5 часов до того момента, когда другой корабль B прибыл в нее с севера, плывя со скоростью 16 *км/час*. Как быстро изменялось расстояние между кораблями в момент времени, спустя 2 часа после того как A покинул данную точку?

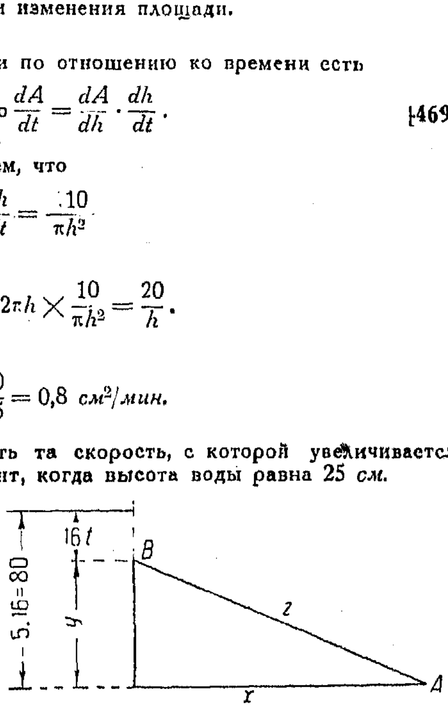


Рис. 535.

Пусть x равно расстоянию от A до указанной точки, а y — от B до нее. Пусть, кроме того, z — расстояние между данными кораблями. Из рис. 535 видно, что

$$z^2 = x^2 + y^2.$$

Дифференцируя это выражение по времени, получаем

$$2z \cdot \frac{dz}{dt} = 2x\,\frac{dx}{dt} + 2y\,\frac{dy}{dt},$$

или

$$z\,\frac{dz}{dt} = x\,\frac{dx}{dt} + y\,\frac{dy}{dt}. \qquad (1)$$

Но $x = 12t$, следовательно

$$\frac{dx}{dt} = 12,$$

а $y = 80 - 16t$, откуда

$$\frac{dy}{dt} = -16^{1)}.$$

В тот момент, когда $t = 2$ (2 часа после выхода A из указанной точки),

$$x = 12 \times 2 = 24$$

$$y = 80 - 16 \cdot 2 = 48$$

$$z = \sqrt{(24)^2 + (48)^2} = \sqrt{2880} = 53{,}66.$$

Подставляя эти значения в (1), получим

$$53{,}66 \frac{dz}{dt} = 24 \times 12 + 48 \times (-16) = -480.$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{-480}{53{,}66} = -8{,}95 \text{ км/час}.$$

Отсюда мы видим, что расстояние между кораблями уменьшается со скоростью 8,95 *км/час* в момент времени, имеющий место спустя 2 часа после того, как A покинул данную точку.

935. Сила, масса и ускорение. Ньютон показал, что ускорение тела прямо пропорционально действующей силе и обратно пропорционально его массе. Этот закон известен под названием второго закона Ньютона и выражается в математических обозначениях таким образом:

$$a = k\frac{F}{m}. \qquad [495]$$

---

[1]) Уравнение

$$y = 80 - 16t$$

получается из следующих соображений.

При равномерном движении зависимость между y и t выражается равенством

$$y = at + b.$$

При $t = 0$, т. е. в начальный момент, расстояние корабля от гавани равно 80 *км*, $b = 80$.

Скорость движения 16 *км/час*, при этом движение происходит в направлении, обратном направлению оси OY:

$$a = -16.$$

Прим. ред.

За единицу силы мы принимаем силу в 1 *г*, а за единицу ускорения 1 *см/сек*^{2}. Последнее обозначается так: $\frac{см}{сек^2}$.

Если сила в 1 *г* действует на массу в 1 *г*, то ускорение, вызываемое этой силой, равно 9,81 *м/сек*^{2}. Это соотношение справедливо как в случае падающего тела, так и в любом другом случае, причем следует рассматривать только силу, вызывающую ускорение, все же остальные можно не рассматривать. Рассмотрим, в виде примера, тело массой в 1 *г*, скользящее по столу, на краю которого прикреплен блок. Через блок перекинута нить, один конец которой привязан к данному телу, а другой конец к грузу, уравновешивающему трение данного тела о стол. Если к телу приложена сила в 1 *г* в горизонтальном направлении, то она дает ему ускорение в 9,81 *м/сек* для всякой секунды своего действия. Другими словами, возрастание скорости данного тела в секунду будет равно 9,81 *м/сек*. Это возрастание скорости в одну секунду не зависит от времени действия силы и не зависит также от первоначального положения тела, т. е. от того обстоятельства, была ли данная масса в покое или в движении.

Для удобства единица массы принимается такой, чтобы коэффициент пропорциональности k сделать равным 1. Тогда, если единица силы, т. е. сила в 1 *г*, действует на массу в 9,81 *г* (вместо того чтобы действовать на массу в 1 *г*), то ускорение будет равно 1 *см/сек*^{2}. Итак, для того чтобы $k = 1$, за единицу массы следует принять массу в 9,81 *г*. Тогда

$$\text{масса} = \frac{\text{вес}}{9{,}81}.$$

Указанную единицу массы 9,81 *г* обозначаем буквой g, а вес буквой W. Тогда

$$\text{масса } M = \frac{W}{g},$$

или

$$a = \frac{F}{M} = \frac{F}{\frac{W}{g}} = \frac{F \cdot g}{W},$$

откуда

$$F = Ma = \frac{Wa}{g}.$$

Сила, действующая на тело, вызывает движение этого тела в том направлении, в каком она сама действует.

Сила и ускорение являются векторными величинами, обладающими как размерами, так и направлением, в то время как масса — величина скалярная, т. е. она никакого направления не имеет.

Из n⁰ 923:

$$\text{ускорение} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Тогда

$$[496] \qquad F = M\frac{dv}{dt} = \frac{W}{g}\cdot\frac{dv}{dt} = M\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{W}{g}\cdot\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Если силу F разлагают на две составляющие F_1 и F_2 и если a_1 и a_2 представляют собою соответствующие составляющие ускорения, то

$$F_1 = Ma_1 \text{ и } F_2 = Ma_2.$$

Таким образом, составляющие какой-либо силы, взятые по осям X и Y, таковы:

$$F = Ma_x \text{ и } F_y = Ma_y.$$

Глава XLV.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ.

936. Производная функции $y = \sin u$. Рассмотрим функцию

$$y = \sin u,$$

где u — некоторая функция x.

Пусть x_0 — некоторое конечное значение x, а u_0 и y_0 — соответствующие значения u и y.

Тогда

$$y_0 = \sin u_0.$$

Пусть теперь $x = x_0 + \Delta x$. Тогда

$$y_0 + \Delta y = \sin(u_0 + \Delta u).$$

Вычитая $y_0 = \sin u_0$, получим

$$\Delta y = \sin(u_0 + \Delta u) - \sin u_0.$$

Из тригонометрии известно, что разность синусов двух разных углов

$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cdot\sin\frac{1}{2}(A-B). \qquad [283]$$

Положим $A = u_0 + \Delta u$, $B = u_0$. Тогда получаем:

$$\Delta y = \sin(u_0 + \Delta u) - \sin u_0 = 2\cos\frac{1}{2}(2u_0 + \Delta u)\sin\frac{1}{2}\Delta u$$

$$\Delta y = 2\cos\left(u_0 + \frac{\Delta u}{2}\right)\cdot\sin\frac{1}{2}\Delta u.$$

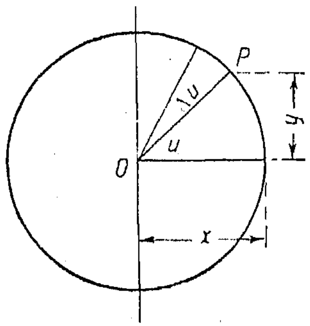


Рис. 536.

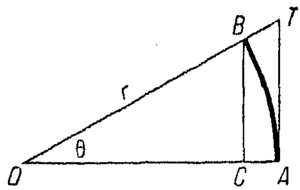


Рис. 537.

Разделив на Δu,

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = 2\cos\left(u_0 + \frac{\Delta u}{2}\right)\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta u}{\Delta u}.$$

Так как

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}, \qquad [469]$$

то

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2\cos\left(u_0 + \frac{\Delta u}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta u}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x} =$$

$$= \cos\left(u_0 + \frac{\Delta u}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta u}{\frac{1}{2}\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Так как Δx стремится к нулю, то

$$\frac{dy}{dx} = \cos u_0 \cdot \frac{du}{dx} \times \lim_{\Delta u \to 0} \left[\frac{\sin \frac{1}{2} \Delta u}{\frac{1}{2} \Delta u} \right].$$

Из последнего выражения видно, что необходимо найти предел выражения дроби

$$\frac{\sin \frac{1}{2} \Delta u}{\frac{1}{2} \Delta u}.$$

По мере того как Δx стремится к нулю, Δu также стремится к нулю.

Рассмотрим весьма малый угол и определим, что происходит с величиной отношения синуса этого угла к самому углу, по мере того как угол стремится к нулю, т. е. определим

$$\lim_{\theta \to 0} \left[\frac{\sin \theta}{\theta} \right].$$

Пусть AT касательная к окружности в точке A, а BC перпендикуляр к прямой OA (рис. 537). Площадь треугольника OCB меньше площади сектора OAB, который в свою очередь меньше площади треугольника OAT, т. е.

$$\frac{1}{2} BC \cdot OC < \frac{1}{2} \theta r^2 < \frac{1}{2} AT r$$

$$\frac{BC}{r} \cdot \frac{OC}{r} < \theta < \frac{AT}{r} \text{ или } \frac{OC}{r} \cdot \sin \theta < \theta < \operatorname{tg} \theta$$

$$\cos \theta < \frac{\theta}{\sin \theta} < \frac{1}{\cos \theta}.$$

По мере того как θ приближается к нулю, OC стремится к r, $\frac{OC}{r}$ стремится к 1, $\cos \theta$ стремится к 1 и $\frac{1}{\cos \theta}$ стремится к 1.

Так как первый и третий члены неравенства оба стремятся к 1, то

$$\frac{\theta}{\sin \theta} \text{ стремится к } 1,$$

а следовательно и

$$\frac{\sin \theta}{\theta} \text{ стремится к } 1.$$

Отсюда при Δu, стремящемся к 0,

$$\frac{\sin \frac{1}{2} \Delta u}{\frac{1}{2} \Delta u}$$

стремится к 1 и поэтому

[497] $$\frac{dy}{dx} = \cos u \cdot \frac{du}{dx}, \text{ или } \frac{d(\sin u)}{dx} = \cos u \cdot \frac{du}{dx}.$$

Если $u = x$, то

[498] $$\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x \cdot \frac{dx}{dx} = \cos x.$$

Далее, если $y = \sin(Bx + C)$, где B и C — постоянные, то

[499] $$\frac{d[\sin(Bx + C)]}{dx} = B \cdot \cos(Bx + C) \cdot \frac{dx}{dx} = B \cdot \cos(Bx + C).$$

Таким же образом

[500] $$\frac{d[A \cdot \sin(Bx + C)]}{dx} = AB \cdot \cos(Bx + C).$$

Пример. Продифференцировать по x

$$y = 5 \sin^2 x.$$

Пусть $u = \sin x$, тогда

$$y = 5u^2 \text{ и } \frac{dy}{du} = 10u.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{и} \quad \frac{du}{dx} = \cos x.$$

Подставив эти значения, получим

$$\frac{d[5 \sin^2 x]}{dx} = 10 \cdot \sin x \cdot \cos x = 5[2 \sin x \cdot \cos x].$$

Из тригонометрии известно, что

$$2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x, \qquad [290]$$

откуда

$$\frac{d[5 \sin^2 x]}{dx} = 5 \cdot \sin 2x.$$

937. Производная функции $y = \cos u$. Из тригонометрии известно, что (n^0 603)

$$\cos u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right).$$

Поэтому,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right]}{dx} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \frac{d\left(\frac{\pi}{2} - u\right)}{dx} =$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \frac{du}{dx}.$$

Из тригонометрии известно, что

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sin u.$$

Поэтому

[501] $$\frac{d(\cos u)}{dx} = -\sin u \cdot \frac{du}{dx}.$$

Далее, если $u = x$, т. е. $y = \cos x$, то

[502] $$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x,$$

а если $y = \cos[Bx + C]$, где B и C — постоянные, то

[503] $$\frac{d[\cos(Bx + C)]}{dx} = -B \cdot \sin(Bx + C).$$

Таким же образом, если $y = A \cdot \cos[Bx + C]$, то

[504] $$\frac{dy}{dx} = \frac{d[A \cdot \cos(Bx + C)]}{dx} = -AB \sin(Bx + C).$$

938. Производная функции $y = \text{vers}\, u$ [1]) приводится ниже, но без вывода ее, ибо эта функция употребляется весьма редко.

[505] $$\frac{d(\text{vers}\, u)}{dx} = \sin u \, \frac{du}{dx}.$$

939. Графическое дифференцирование функции $y = \sin x$. Если кривая производной функции синуса тща-

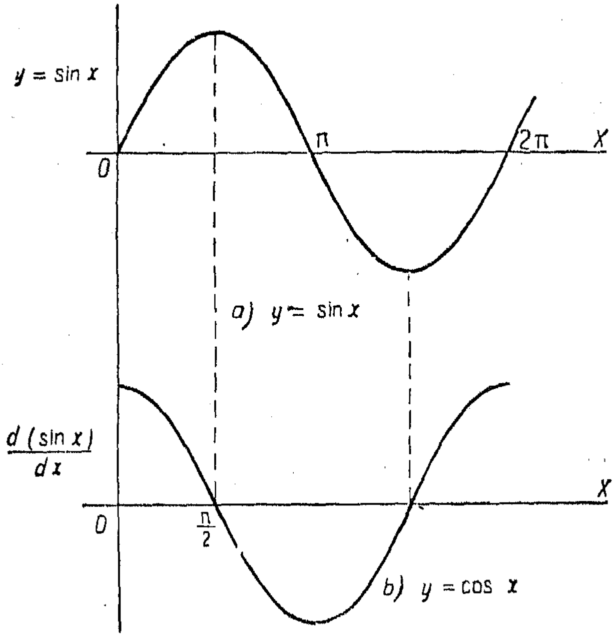


Рис. 538.

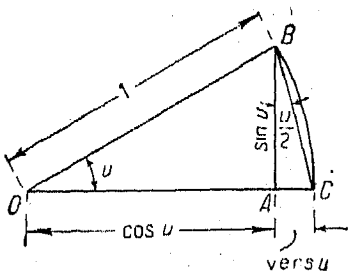
---

1) Функция vers u определяется равенством

$$\text{vers}\, u = 1 - \cos u.$$

Происхождение самого наименования sinus verus u будет понятно из рисунка. На прилагаемом рисунке отрезок AC играет для угла ABC такую же роль, как отрезок AB, изображающий синус угла AOB, играет в отношении этого угла.

Прим. ред.



тельно вычерчена в соответствии с указаниями, данными в n⁰ 916, то она одинакова с кривой синуса, но сдвинута влево относительно последней на половину волны, т. е. на

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3{,}1416}{2} = 1{,}57 \text{ единицы.}$$

Эта кривая, разумеется, есть кривая косинуса, как было показано в nn⁰ 622 и 623.

940. Графическое дифференцирование функции $y = \cos x$. Кривая производной функции $y = \cos x$ одинакова

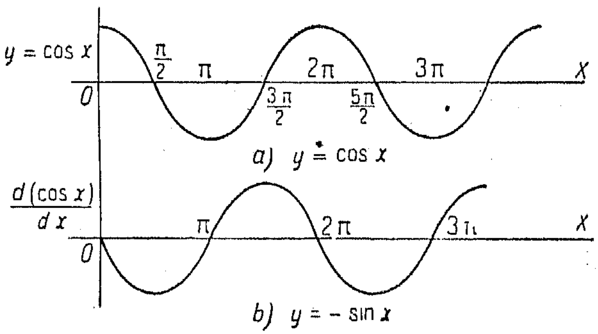


Рис. 539.

с кривой производной функции $y = \sin x$, но также сдвинута влево на половину волны. Это обстоятельство означает, что последняя кривая представляет собою одно и то же, что и график $y = \sin x$, но она сдвинута относительно указанного графика влево на одну волну, т. е. на отрезок, равный 3,1416 единицам. Такое положение кривой обращает ее в кривую функции синуса со знаком минус, т. е. в график $y = -\sin x$ (рис. 539).

Чтобы найти кривые последовательных производных функции $y = \sin x$ или $y = \cos x$, следует только передвигать начало координат вправо на расстояние, равное $\frac{1}{2}\pi$, т. е. на 1,57 единицы при каждом последовательном дифференцировании (рис. 540).

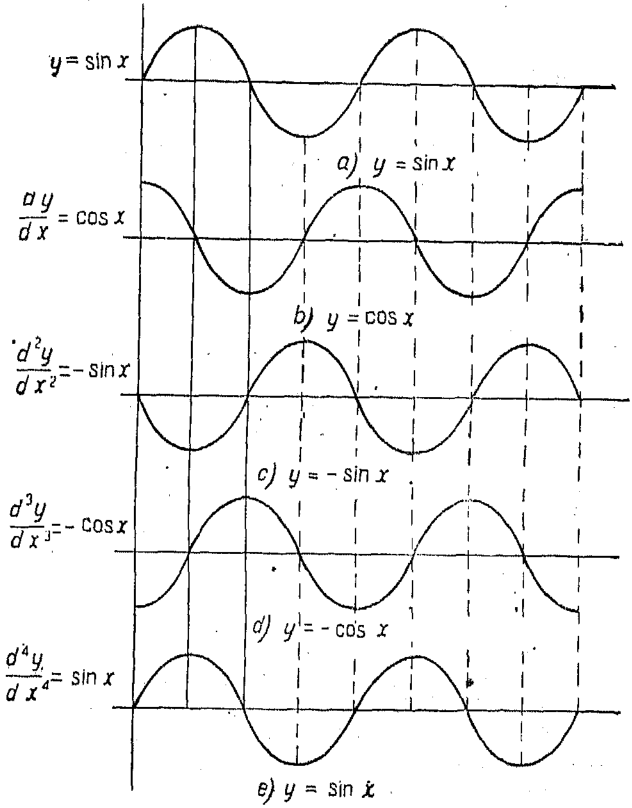


Рис. 540.

941. Кривошипно-кулисный механизм. При рассмотрении паровой машины с кулисным механизмом, подобным показанному на рис. 541, мы можем применить закон косинуса.

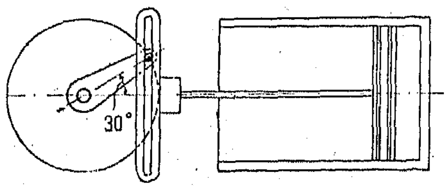


Рис. 541.

Для первоначальной кривой $y = a \cdot \cos \omega t$.

Пример. Положим, 1-метровый кривошип делает 6 об./мин. Каковы скорость и ускорение поршня в момент поворота кривошипа на угол в 30° от среднего положения?

Аналитический способ

$\omega = 2\pi$ [так как один оборот 2π делается за 1 сек.]

$a = 1$ (длина кривошипа в метрах).

Тогда

$$y = \cos 2\pi t.$$

$$\frac{dy}{dt} = -2\pi \sin 2\pi t = \text{скорость поршня}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -4\pi^2 \cdot \cos 2\pi t = \text{ускорение поршня.}$$

Так как кривошип поворачивается на 360° в 1 сек., а $30° = \frac{1}{12}$ оборота, то

$$t = \frac{1}{12} \text{ сек.}$$

$$\frac{dy}{dt} = -2\pi \sin 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot \pi = -2\pi \sin \frac{\pi}{6} = -3{,}14 \text{ м/сек} = \text{скорость.}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -4\pi^2 \cos 2\pi \cdot \frac{1}{12} = -4\pi^2 \cdot \cos \frac{\pi}{6} = -39{,}47 \times 0{,}886 =$$

$$= -34{,}18 \text{ м/сек}^2 = \text{ускорение поршня}$$

942. Графическое решение задачи n⁰ 941. Начертим кривую косинуса в подходящем горизонтальном и вертикальном масштабе и нанесем время на оси абсцисс. Так как кривошип делает один полный оборот в 1 сек., то наш период равен 1 сек. Разделим этот период на некоторые число делений, например на 12 (рис. 542).

Кривошип проходит 1 сек. в одну окружность длиной $(2 \times 3{,}1416)$, т. е. 6,28 *м* в 1 сек. Поэтому, отношение пути ко времени есть отношение 6,28 : 1.

Первая производная пути по времени дает скорость, поэтому, чтобы получить значения скорости, мы графически дифференцируем данную кривую. Из n⁰ 940 следует, что передвигание начала координат вправо на расстояние, равное $\frac{1}{2}\pi$, равносильно дифференцированию первоначальной кривой; при этом следует определить новый масштаб для вертикальной оси, т. е. для ординат. Кривая производной одинакова с графиком самой функции, но начало координат в ней получено в результате перенесения его из первоначального положения, а масштаб ординат — путем изменения также первоначального масштаба. Последнее происходит вследствие того, что данная функция была умножена на 2π, т. е. на 6,28; поэтому вертикальный масштаб для кривой производной надо взять таким, чтобы значения производной находились бы в отношении 6,28 : 1 к значениям первоначальной функции. Другими словами, единица расстояния выражает 1 единицу

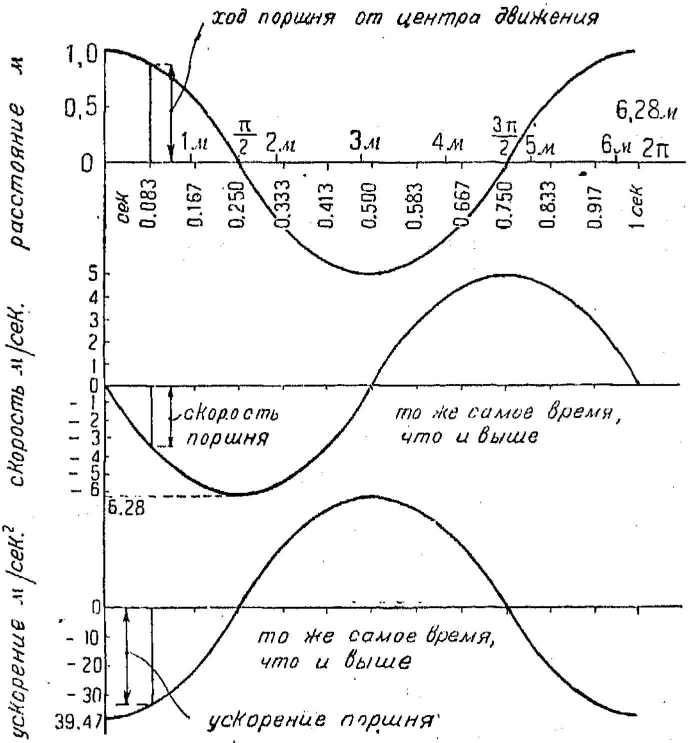


Рис. 542.

в графике первоначальной функции и 6,28 единиц в графике производной. Таким образом наибольшее значение первоначальной функции есть 1, в то время как наибольшее значение производной составляет 6,28 единиц.

В качестве кривой ускорений, т. е. кривой второй производной, употребляется опять та же самая кривая, но, будучи вторично перенесена влево на расстояние, равное $\frac{1}{2}\pi$, причем значения второй производной в 6,28 раза больше соответствующих значений первой производной. Изложенное выше становится ясным при рассмотрении рис. 542, где изображены кривые первоначальной функции, а также ее первой и второй производных. Здесь мы видим, что наибольшая высота петли кривой, выражающей вторую производную, составляет $6{,}28 \times 6{,}28 = 39{,}47$ единиц; это означает, что данное расстояние, будучи в действительности измерено по вертикали, в графике второй производной, в 39,47 раза больше такового, имеющего место в графике первоначальной функции.

Ускорение представляет собою весьма важное понятие в учении о движении тел, и приведенный пример поясняет метод его вычисления.

943. Простое гармоническое движение (П. Г. Д.). Если точка P движется по окружности с постоянной угловой скоростью, равной ω радианам в секунду, т. е. за t сек. поворачивается на угол в ωt радиан, то ее проекция Q на какой-либо диаметр совершает некоторое колебательное движение вперед и назад, которое называется *простым гармоническим движением*.

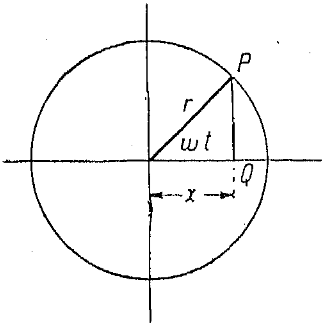


Рис. 543.

Пусть x равно расстоянию от центра вращения до указанной проекции точки. Тогда

$$x = r \cdot \cos \omega t.$$

Если величина данного угла есть C в момент времени $t = 0$, то

$$x = r \cos (\omega t + C).$$

Это выражение есть общая формула простого гармонического движения, показывающая расстояние колеблющейся точки от центра.

Продифференцировав, получим

[506] $$\frac{dx}{dt} = -\omega r \sin (\omega t + C) = \text{скорость точки } Q.$$

Продифференцировав вторично,

[507] $$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 r \cos (\omega t + C) = -\omega^2 x = \text{ускорение точки } Q.$$

Отсюда следует, что ускорение это всегда прямо пропорционально перемещению x, но обратно ему по знаку.

Многие случаи движений, как например колебания частиц воды, световые и звуковые волны, переменный ток, колебание пружин, можно представить в виде простых гармонических движений, которые и выражаются посредством приведенной выше формулы.

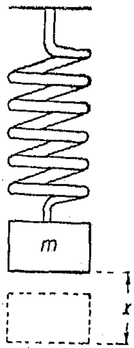


Рис. 514.

944. Другая задача на простое гармоническое движение. Если тело m, подвешенное на пружине, оттянуть книзу от его положения равновесия на расстояние x, то неуравновешенная сил F будет действовать на это тело по направлению кверху. Эта сила прямо пропорциональна x по величине и обратна по знаку, ибо она действует в направлении, противоположном x.

Таким образом

$$F = -kx,$$

где k есть некоторая постоянная величина, зависящая от свойств пружины. Когда тело будет отпущено, оно начнет колебаться вверх и вниз, а x будет изменяться в зависимости от времени t.

Так как скорость здесь равна $\frac{dx}{dt}$, ускорение равно $\frac{d^2x}{dt^2}$, а неуравновешенная сила $F = ma$, то

$$F = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \text{ (ибо } F = -kx),$$

откуда

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x.$$

Таким образом, вторая производная данной функции равна самой функции, умноженной на постоянную величину $\left(-\frac{k}{m}\right)$.

Если обратимся к n⁰ 943, то мы увидим, что косинус представляет собою функцию такого же характера, что и рассматриваемая здесь.

Поэтому, все законы, выведенные для косинуса, можно приложить и к настоящему случаю.

Начнем с общей формы функции косинуса, в которой время является независимой переменной. Тогда

$$x = a \cdot \cos(\omega t + \theta)$$

$$\frac{dx}{dt} = -\omega a \sin(\omega t + \theta)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 a \cos(\omega t + \theta).$$

Подставляя x вместо $a\cos(\omega t + \theta)$, получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x.$$

Но так как

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x,$$

то

$$\omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Если отсчет времени производится с того момента, когда пружина была отпущена и начала колебаться, то $\theta = 0$ и наше уравнение получает вид

$$x = a \cdot \cos \omega t,$$

где $x = a$ в момент начала колебательного движения.

915. Производная функции $x = \operatorname{tg} u$. Из тригонометрии известно, что

$$\operatorname{tg} u = \frac{\sin u}{\cos u}. \quad [274]$$

Мы можем продифференцировать это выражение, применяя формулу для нахождения производной частного

$$\frac{d(\operatorname{tg} u)}{du} = \frac{\cos u \dfrac{d(\sin u)}{du} - \sin u \dfrac{d(\cos u)}{du}}{\cos^2 u}.$$

Но

$$\frac{d(\sin u)}{du} = \cos u; \qquad \frac{d(\cos u)}{du} = -\sin u,$$

Поэтому

$$\frac{d(\operatorname{tg} u)}{du}=\frac{\cos^2 u+\sin^2 u}{\cos^2 u}.$$

Из тригонометрии известно, что

$$\sin^2 u+\cos^2 u=1. \quad [265]$$

Поэтому

$$\frac{d(\operatorname{tg} u)}{du}=\frac{1}{\cos^2 u}=\sec^2 u.$$

Но так как

$$\frac{d(\operatorname{tg} u)}{dx}=\frac{d(\operatorname{tg} u)}{du}\cdot\frac{du}{dx}, \quad [469]$$

то

[508] $$\frac{d(\operatorname{tg} u)}{dx}=\sec^2 u\cdot\frac{du}{dx}.$$

Если $y=\operatorname{tg} x$, то $x=u$ и

[509] $$\frac{d(\operatorname{tg} x)}{dx}=\sec^2 x.$$

Далее, производная данной функции, выраженной в общем виде:

[510] $$\frac{d[\operatorname{tg}(Bx+C)]}{dx}=B\sec^2(Bx+C).$$

Точно также

[511] $$\frac{d[A\operatorname{tg}(Bx+C)]}{dx}=AB\sec^2(Bx+C).$$

946. Производные других тригонометрических функций $y=\operatorname{ctg} u$.

[512] $$\frac{dy}{dx}=\frac{d(\operatorname{ctg} u)}{dx}=-\operatorname{cosec}^2 u\cdot\frac{du}{dx}.$$

Для функции же, выраженной в общем виде,

[513] $$\frac{d[A\operatorname{ctg}(Bx+C)]}{dx}=-AB\operatorname{cosec}^2(Bx+C).$$

$$y=\sec u.$$

[514] $$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\sec u)}{dx} = \sec u \cdot \operatorname{tg} u \cdot \frac{du}{dx}.$$

Для функции, выраженной в общем виде

[515] $$\frac{d[A \sec(Bx + C)]}{dx} = AB \sec(Bx + C) \operatorname{tg}(Bx + C),$$

$$y = \operatorname{cosec} u.$$

[516] $$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\operatorname{cosec} u)}{dx} = -\operatorname{cosec} u \operatorname{ctg} u \frac{du}{dx}.$$

Для функции, представленной в общем виде, $y = A \operatorname{cosec}(Bx + C)$:

[517] $$\frac{dy}{dx} = \frac{d[A \operatorname{cosec}(Bx + C)]}{dx} =$$

$$= -AB \operatorname{cosec}(Bx + C) \cdot \operatorname{ctg}(Bx + C).$$

947. Примеры дифференцирования тригонометрических функций.

Пример 1. Продифференцировать $y = \cos^3 \Theta$. Данное выражение напишем в таком виде: $(\cos \Theta)^3 = y$. Пусть $u = \cos \Theta$; тогда

$$\frac{du}{d\Theta} = -\sin \Theta.$$

$$y = u^3 \text{ и } \frac{dy}{du} = 3u^2.$$

Так как

$$\frac{dy}{d\Theta} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{d\Theta}, \qquad [469]$$

то

$$\frac{dy}{d\Theta} = -3\cos^2 \Theta \cdot \sin \Theta.$$

Пример 2. Продифференцировать $y = \sqrt{1 + 3 \operatorname{tg}^2 \Theta} = (1 + 3 \operatorname{tg}^2 \Theta)^{\frac{1}{2}}$. Пусть $u = 3 \operatorname{tg}^2 \Theta$, откуда

$$\frac{du}{d\Theta} = 6 \operatorname{tg} \Theta \cdot \frac{d(\operatorname{tg} \Theta)}{d\Theta} = 6 \operatorname{tg} \Theta \cdot \sec^2 \Theta.$$

$$y = (1 + u)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\frac{dy}{du} = (1 + u)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d(1 + u)}{du} = \frac{1}{2\sqrt{1 + u}} = \frac{1}{2\sqrt{1 + 3 \operatorname{tg}^2 \Theta}}.$$

$$\frac{dy}{d\Theta} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{d\Theta} = \frac{6 \operatorname{tg} \Theta \sec^2 \Theta}{2\sqrt{1 + 3 \operatorname{tg}^2 \Theta}}.$$

Пример 3. Продифференцировать $y = \sin x \cdot \cos x$. Дифференцируем данное выражение как произведение двух функций:

$$\frac{dy}{dx} = \sin x \frac{d(\cos x)}{dx} + \cos x \frac{d(\sin x)}{dx} = \sin x(-\sin x) +$$
$$+ \cos x(\cos x) = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

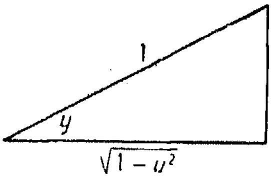


Рис. 545.

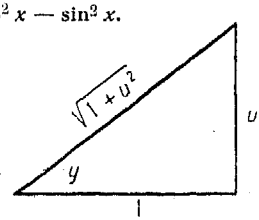


Рис. 546.

948. Производные обратных тригонометрических функций. Продифференцируем $y = \operatorname{arc} \sin u$. Здесь,

$$u = \sin y$$
$$\frac{du}{dy} = \cos y.$$

Рассмотрим треугольник, изображенный на рис. 545. Из него следует, что $u = \sin y$, а $\cos y = \sqrt{1 - u^2}$, откуда

$$\frac{du}{dy} = \cos y = \sqrt{1 - u^2},$$

но так как

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{\frac{du}{dy}} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}},$$

то

[518] $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{1 - u^2}}.$$

Продифференцируем $y = \arccos u$.

Идя тем же самым путем, что и выше, т. е. пользуясь треугольником рис. 545, дифференцирование функции $y = \arccos u$ дает

[519] $$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{1 - u^2}}.$$

949. Применяя основной треугольник, изображенный на рис. 546, таким же образом, как это делалось в предыдущих случаях, мы можем найти производные функции $\operatorname{arctg} u$.

Дифференцируя функцию $y = \operatorname{arctg} u$, получаем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{1+u^2}. \tag{520}$$

Так как мы показали общий метод дифференцирования обратных тригонометрических функций, то приведенные ниже производные даны без выводов

$$\frac{d(\operatorname{arcctg} u)}{dx} = -\frac{\frac{du}{dx}}{1+u^2}. \tag{521}$$

$$\frac{d(\operatorname{arcsec} u)}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{u\sqrt{u^2-1}}. \tag{522}$$

$$\frac{d(\operatorname{arccosec} u)}{dx} = -\frac{\frac{du}{dx}}{u\sqrt{u^2-1}}. \tag{523}$$

$$\frac{d(\operatorname{arc\,vers} u)}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{2u-u^2}}. \tag{524}$$

950. Графическое исследование обратных функций

Переход данной функции в обратную является простой перестановкой переменных, которая может быть произведена графическим путем посредством вращения графика данной функции вокруг прямой, проходящей через начало координат и образующей с координатными осями углы в 45° (n° 629). Поэтому графики данной функции $y = \sin x$ и обратной формы $y = \arcsin x$ располагаются таким образом, как это изображено на рис. 547.

Выражение $y = \arcsin x$ означает, что y есть угол в радианах, синус которого равен x.

Поворот данной кривой вокруг прямой линии, составляющей углы в 45° с осями координат, равносилен перестановке переменных x и y. При этом кривая производной находится вместо горизонтального в вертикальном положении.

Другими словами, мы можем графически дифференцировать по y вместо того, чтобы дифференцировать по x, в результате чего получим производную от x по y, т. е. например $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\cos x}$ вместо $\frac{dy}{dx}$.

Но так как мы переставили переменные посредством поворота кривой

$$x=\sin y \text{ или } y=\arcsin x,$$

то

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}.$$

Так как $\sin y = x$, то

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

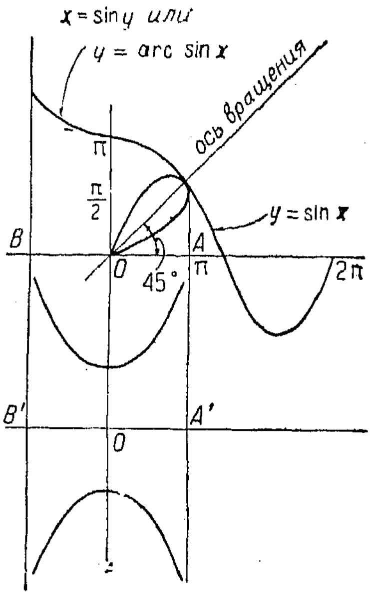


Рис. 547.

Для того чтобы придать y из всевозможных только одно значение, мы рассматриваем y в интервале между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$ т. е. $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$ (n°629). Поэтому значение радикала берется со знаком плюс.

Если значение y находится в интервале между 0 и π, т. е.

$$0\leqslant y\leqslant\pi,$$

то функция $y=\arccos x$ имеет только одно значение и для производной ее берется радикал $\sqrt{1-x^2}$ с отрицательным знаком.

951. Производные гиперболических функций. Так как в работе инженера гиперболические функции встречаются весьма редко, то производные их приводятся ниже без вывода.

[525] $$\frac{d(\operatorname{sh} u)}{dx}=\operatorname{ch} u\cdot\frac{du}{dx}.$$

[526] $$\frac{d(\operatorname{ch} u)}{dx} = \operatorname{sh} u \cdot \frac{du}{dx}.$$

[527] $$\frac{d(\operatorname{th} u)}{dx} = \operatorname{sech}^2 u \cdot \frac{du}{dx}.$$

[528] $$\frac{d(\operatorname{cth} u)}{dx} = -\operatorname{cosech}^2 u \cdot \frac{du}{dx}.$$

[529] $$\frac{d(\operatorname{cosech} u)}{dx} = -\operatorname{cosech} u \cdot \operatorname{ctgh} u \cdot \frac{du}{dx}.$$

[530] $$\frac{d(\operatorname{sech} u)}{dx} = -\operatorname{sech} u \cdot \operatorname{tgh} u \cdot \frac{du}{dx}.$$

[531] $$\frac{d(\operatorname{Arsh} u)}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{u^2+1}}.$$

[532] $$\frac{d(\operatorname{Arch} u)}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{u^2-1}}.$$

[533] $$\frac{d(\operatorname{Artgh} u)}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{1-u^2}$$

[534] $$\frac{d(\operatorname{Arctgh} u)}{dx} = -\frac{\frac{du}{dx}}{u^2-1}.$$

[535] $$\frac{d(\operatorname{Arcosech} u)}{dx} = -\frac{\frac{du}{dx}}{u\sqrt{1+u^2}}.$$

[536] $$\frac{d(\operatorname{Arsech} u)}{dx} = -\frac{\frac{du}{dx}}{u\sqrt{1-u^2}}.$$

Глава XLVI.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ И ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ.

952. Производные функции $\lg_a u$. Пусть $y=\lg_a u$, где u есть некоторая функция x.

Положим x_0 есть некоторое определенное значение x, а y_0 и u_0 — соответствующие значения y и u.

Тогда, $y_0=\lg_a u_0$.

Пусть x получает приращение Δx, т. е.

$$x=x_0+\Delta x \text{ и } y=y_0+\Delta y=\lg_a(u_0+\Delta u).$$

Вычитая, получим

$$\Delta y=\lg_a(u_0+\Delta u)-\lg_a u_0$$

$$=\lg_a\left(\frac{u_0+\Delta u}{u_0}\right)=\lg_a\left(1+\frac{\Delta u}{u_0}\right).$$

Разделим на Δu:

$$\frac{\Delta y}{\Delta u}=\frac{\lg_a\left(1+\frac{\Delta u}{u_0}\right)}{\Delta u}=\frac{1}{\Delta u}\lg_a\left(1+\frac{\Delta u}{u_0}\right).$$

Одновременно умножим и разделим правый член равенства на u_0, имеем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta u}=\frac{1}{u_0}\frac{u_0}{\Delta u}\lg_a\left(1+\frac{\Delta u}{u_0}\right).$$

Так как $m\cdot\lg_a N=\lg_a N^m$, то

$$\frac{\Delta y}{\Delta u}=\frac{1}{u_0}\lg_a\left(1+\frac{\Delta u}{u_0}\right)^{\frac{u_0}{\Delta u}}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta y}{\Delta u}\right]=\frac{dy}{du}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{u_0}\left[\lg_a\left(1+\frac{\Delta u}{u_0}\right)^{\frac{u_0}{\Delta u}}\right].$$

Найдем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left[\lg_a\left(1+\frac{\Delta u}{u_0}\right)^{\frac{u_1}{\Delta u}}\right].$$

Пусть $\frac{u_1}{\Delta u}=z.$

По мере того как Δx приближается к нулю, Δu также стремится к нулю, а $\frac{u_0}{\Delta u}$, т. е. z, стремится к бесконечности.

Подставив z вместо $\frac{u_0}{\Delta u}$ в приведенное выше выражение, получим

$$\lim_{z \to \infty}\left[\lg_a\left(1+\frac{1}{z}\right)^z\right].$$

Известно, что

$$\left(1+\frac{1}{z}\right)^z = 1 + z\cdot\frac{1}{z} + \frac{z(z-1)}{2!}\left(\frac{1}{z}\right)^2 + \\ + \frac{z(z-1)(z-2)}{3!}\left(\frac{1}{z}\right)^3 + \ldots,$$

откуда

$$\left(1+\frac{1}{z}\right)^z = 1+1+\frac{1-\frac{1}{z}}{2!}+\frac{\left(1-\frac{1}{z}\right)\left(1-\frac{2}{z}\right)}{3!}+\ldots$$

и

$$\lim_{z \to \infty}\left[\left(1+\frac{1}{z}\right)^z\right] = \lim_{z \to \infty}\left[1+1+\frac{\left(1-\frac{1}{z}\right)}{2!}+ \right. \\ \left. +\frac{\left(1-\frac{1}{z}\right)\left(1-\frac{2}{z}\right)}{3!}+\ldots\right].$$

По мере того как z приближается к бесконечности, выражения $\left(1-\frac{1}{z}\right)$, $\left(1-\frac{2}{z}\right)$ и т. д. приближаются к единице, и

$$\lim_{z \to \infty}\left[\left(1+\frac{1}{z}\right)^z\right] = \lim_{n \to \infty}\left[1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\right].$$

Поэтому

[537] $$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u_0}\lg_a\left[1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots\right].$$

Выражение, находящееся в скобках, обозначается буквой e и представляет собою сходящийся бесконечный ряд (n° 343, 462).

[538] $$\frac{dy}{du}=\frac{1}{u_0}\lg_a e.$$

Так как

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx},\quad [469],$$

то

[539] $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}\lg_a e$$

или

$$\frac{d(\lg_a u)}{dx}=\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}\lg_a e.$$

Если основание a равняется e, то $\lg_e e=1$ и

[540] $$\frac{d(\lg_e u)}{dx}=\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}.$$

Предел суммы членов указанного выше бесконечного ряда e есть основание неперовой системы логарифмов, он равняется 2,71828...

Если $y=\lg x$, то

[541] $$\frac{dy}{dx}=\frac{\lg e}{x}.$$

Если же основание равно e, то $\lg_e e=1$, откуда, в случае $y=\lg_e x$,

[542] $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}.$$

Но если основание есть 10, то $\lg_{10} e=0{,}43429=M$, откуда при $y=\lg_{10} x$,

[543] $$\frac{dy}{dx}=\frac{M}{x}.$$

Приведенные выше формулы показывают, что скорость возрастания логарифма данного числа обратно пропорциональна последнему. В геометрическом смысле это означает, что график функции $y = \lg_e x$ имеет наклон, равный 1 в точке $x = 1$, наклон, равный $\frac{1}{2}$ — в точке $x = 2$, наклон, равный $\frac{1}{3}$ — в точке $x = 3$, и т. д.

Рассмотренный случай противоположен случаю показательной функции, ибо в последнем скорость возрастания функции прямо пропорциональна значению ее в любой точке.

953. Дифференцирование логарифма, данного в общем виде.

[544] $$\frac{d[\lg_e(Ax+B)]}{dx} = \frac{A}{Ax+B}.$$

[545] $$\frac{d[\lg_{10}(Ax+B)]}{dx} = \frac{0{,}4343\,A}{Ax+B}.$$

Пример 1. Продифференцируйте

$$y = \lg_e(a + bx + cx^2).$$

Положим $y = \lg_e u$, где $u = a + bx + cx^2$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx} \qquad [540]$$

$$\frac{du}{dx} = b + 2cx.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}(b + 2cx) = \frac{b + 2cx}{a + bx + cx^2}.$$

Пример 2. Найти посредством логарифмирования производную функции

$$y = \frac{u^n v^m}{w^p},$$

где u, v и w — функции от x, а n, m и p — постоянные величины.

В данном случае

$$\lg_e y = n\lg_e u + m\lg_e v - p\lg_e w.$$

$$\frac{d(\lg_e y)}{dx} = \frac{d(\lg_e y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Но

$$\frac{d(\lg_e y)}{dy} = \frac{1}{y}.$$

Следовательно,

$$\frac{d(\lg_e y)}{dx} = \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Продолжаем далее:

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=n\frac{d(\lg_e u)}{dx}+m\frac{d(\lg_e v)}{dx}-p\frac{d(\lg_e w)}{dx}$$

$$=\frac{n}{u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{m}{v}\cdot\frac{dv}{dx}-\frac{p}{w}\cdot\frac{dw}{dx},$$

$$\frac{dy}{dx}=y\left[\frac{n}{u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{m}{v}\cdot\frac{dv}{dx}-\frac{p}{w}\cdot\frac{dw}{dx}\right]$$

$$=\frac{u^n\cdot v^m}{w^p}\left[\frac{n}{u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{m}{v}\cdot\frac{dv}{dx}-\frac{p}{w}\cdot\frac{dw}{dx}\right]$$

954. Сравнение методов дифференцирования.

Пример. Продифференцировать

$$y=(2x^3-1)(1+x^3)^2.$$

Применим формулу для производной произведения

$$\frac{dy}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}. \quad [472]$$

Положим $u=2x^3-1$, а $v=(1+x^3)^2=z^2$, где $z=1+x^3$.

$$\frac{du}{dx}=6x^2;\ \frac{dv}{dz}=2z;\ \frac{dz}{dx}=3x^2.$$

$$\frac{dv}{dx}=\frac{dv}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=2(1+x^3)\cdot 3x^2=6x^2(1+x^3).$$

Тогда

$$\frac{dy}{dx}=(2x^3-1)\cdot 6x^2\cdot(1+x^3)+(1+x^3)^2\cdot 6x^2$$

$$=6x^2(2x^3-1)(1+x^3)+6x^2(1+x^3)^2,$$

упростив последнее выражение, получим

$$\frac{dy}{dx}=18x^8+18x^5.$$

Рассмотрим ту же задачу, применяя

$$\lg y=\lg u+\lg v,$$

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{dx}. \quad [474]$$

Так как выше мы имели

$$\frac{du}{dx}=6x^2 \text{ и } \frac{dv}{dx}=6x^2(1+x^3)$$

то

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2x^3-1}\cdot 6x^2+\frac{1}{(1+x^3)^2}\cdot 6x^2\,(1+x^3)$$
$$=\frac{6x^2}{2x^3-1}+\frac{6x^2}{1+x^3}.$$

Умножив обе части равенства на y, т. е. на $(2x^3-1)\,(1+x^3)^2$, получим

$$\frac{dy}{dx}=\frac{6x^2\,(2x^3-1)\,(1+x^3)^2}{2x^3-1}+\frac{6x^2\,(2x^3-1)\,(1+x^3)^2}{1+x^3}$$
$$=6x^2\,(1+x^3)^2+6x^2\,(2x^3-1)\,(1+x^3)$$
$$=18x^8+18x^5.$$

Из сравнения приведенных здесь двух методов нахождения производной произведения следует, что логарифмический метод является более простым, что становится особенно ясным в практической работе.

955. Сравнение графиков функции $y=\lg x$ с графиком ее производной $y=\frac{1}{x}$. Если ординаты графика указанной производной, т. е. $y'=\frac{dy}{dx}$, обозначаются через y', то уравнение ее имеет вид

$$xy'=1.$$

Это равенство есть уравнение равносторонней гиперболы. Отсюда следует, что в этом случае имеется зависимость между данной логарифмической кривой и указанной гиперболой. Поэтому иногда натуральные логарифмы называются *гиперболическими логарифмами*. Так как десятичные логарифмы составляют 0,4343 от значения соответствующих натуральных (т. е. значение натуральных логарифмов в 2,303 раза больше значения соответствующих десятичных), то эти две системы логарифмов могут быть выражены посредством одного и того же графика путем изменения масштаба ординат, как это показано на рис. 548.

Указанное изменение производится и в масштабе ординат графика производной. В этом случае уравнение графика производной для десятичных логарифмов (т. е. при основании 10) имеет следующий вид:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{0{,}4343}{x}.$$

График этот поясняет соотношение между указанными двумя системами логарифмов. Если мы вычертим график десятичных логарифмов в том же вертикальном масштабе, что и логарифмов натуральных, то получим кривую, подобную пунктирной линии, нанесенной на рис. 548.

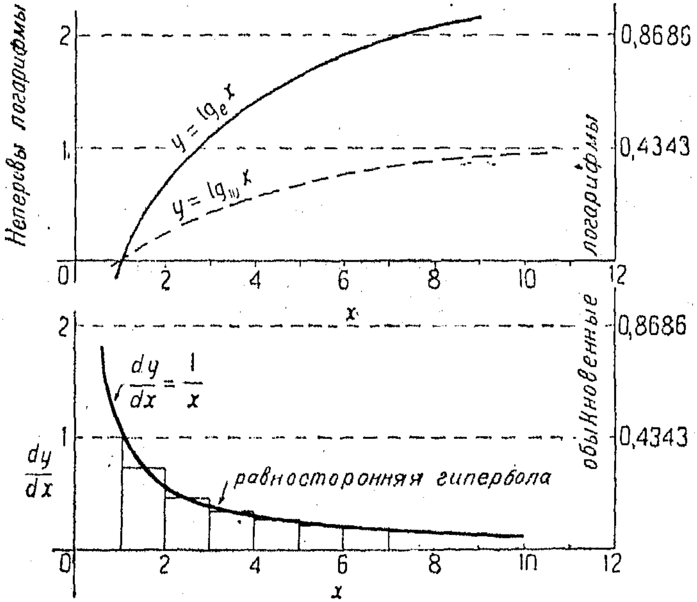


Рис. 548.

Следует заметить, что ординаты кривой натуральных логарифмов в 2,303 раза больше ординат логарифмов десятичных.

График производной десятичных логарифмов, так же, как и график производной натуральных, представляет собою равностороннюю гиперболу.

956. Производная показательной функции. Пусть $y = a^u$, где u есть некоторая функция от x.

Возьмем логарифм обеих членов уравнения

$$\lg_e y = u \cdot \lg_e a.$$

Продифференцируем оба члена последнего равенства

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \lg_e a.$$

$$\text{[546]} \qquad \frac{dy}{dx} = y \cdot \frac{du}{dx} \cdot \lg_e a = a^u \cdot \frac{du}{dx} \cdot \lg_e a.$$

В том случае, когда $a = e$, $\lg_e e = 1$, а

$$\text{[547]} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{d(e^u)}{dx} = e^u \cdot \frac{du}{dx}.$$

Если $u = x$, то

$$y = e^x$$

$$\text{[548]} \qquad \frac{dy}{dx} = e^x.$$

Так как выражение $y = e^x$ является функцией обратной для $y = \lg_e x$, то, как это выше было объяснено (n^0 361), y есть число, логарифм которого равняется x.

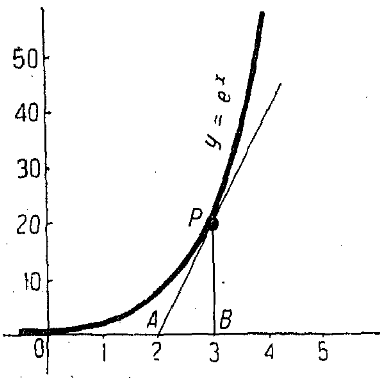


Рис 549.

Таким образом число, логарифм которого при основании e есть x, равно e^x.

Особенностью функции

$$y = e^x$$

является то обстоятельство, что производная ее также равняется e^x;

$$y' = \frac{dy}{dx} = e^x.$$

Это означает, что график производной данной первоначальной функции $y = e^x$ есть график этой последней.

Длина подкасательной есть постоянная величина, равная 1. Отрезок AB (рис. 549) представляет собою подкасательную в точке P. Так как здесь первоначальная кривая в то же время представляет собою и график производной, то на чертеже приводится одна кривая. Подкасательная здесь является постоянной не только для функции $y = e^x$, но также и для более общих случаев функций этого вида, т. е. и для функций $y = ce^{nx}$ или $y = ca^x$.

Пример. Продифференцируйте $y = e^u$, где $u = \arcsin x$.

$$\frac{dy}{dx} = e^u, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Отсюда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{e^u}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

957. Производные функции $y = u^v$, где u и v — функции x. Прологарифмируем данное выражение,

$$\lg_e y = v \cdot \lg_e u.$$

Дифференцируя оба члена этого равенства по x, получим

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \lg_e u$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{v}{u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \cdot \lg_e u\right)$$

Так как $y = u^v$, то

[549] $$\frac{dy}{dx} = vu^{v-1} \cdot \frac{du}{dx} + u^v \frac{dv}{dx} \lg_e u.$$

Пример. Продифференцировать $y = (1 + x^2)^{\sin x}$

$$y = u^v, \text{ где } u = (1 + x^2) \text{ и } v = \sin x$$

$$\frac{du}{dx} = 2x \text{ и } \frac{dv}{dx} = \cos x.$$

Подставив в формулу, получим:

$$\frac{dy}{dx} = \sin x\,(1 + x^2)^{\sin x - 1}\, 2x + \cos x\,(1 + x^2)^{\sin x} \cdot \lg_e (1 + x^2).$$

958. Относительная скорость возрастания и закон сложных процентов. Если скорость возрастания функции разделить на саму функцию, то получившееся при этом частное представляет собою скорость возрастания данной функции на единицу ее величины. Указанное частное

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{y} \quad \text{или} \quad \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

называется *относительной скоростью возрастания* данной функции.

Если относительная скорость возрастания функции есть постоянная величина, то сама функция изменяется по закону сложных процентов; если

[550] $$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dt}=k,$$

то

[551] $$\frac{100}{y}\cdot\frac{dy}{dt}=\text{скорость возрастания в процентах.}$$

Закон сложных процентов выражается формулой

$$A=P\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kn},$$

в которой: A — наращенный капитал; P — основной капитал, r — процентные деньги на единицу основного капитала за год; k — число раз подсчета наращенного капитала в году; n — число лет.

Пусть число раз подсчета наращенного капитала, выполняемое в течение года, возрастает беспредельно, т. е. $k\to\infty$ Положим

$$\frac{r}{k}=\frac{1}{z},$$

тогда

$$A=P\left(1+\frac{1}{z}\right)^{zrn}=P\left[\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\right]^{rn}.$$

Переходя к пределу, получим:

$$\lim_{k\to\infty}P\left[\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\right]^{rn}=\lim_{z\to\infty}P\left[\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\right]^{rn}.$$

Но так как из n° 952 известно, что

$$\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}=e,$$

то

[552] $$A=Pe^{rn}.$$

Здесь A представляет собою наращенный капитал, получившийся спустя n лет из некоторого основного P и процентных денег на него при *непрерывном* возрастании основного капитала со скоростью r в год. При отрицательных значениях r выведенная формула выражает *обесценивается капиталовложение.*

Когда r отрицательно, то z также имеет отрицательное значение, а $\left(1+\frac{1}{z}\right)^z$ все же стремится к величине e при $z \to \infty$.

Пример. Если указанная непрерывная скорость составляет 6%, взятых со знаком минус, то

$$A = Pe^{-0,06n}.$$

Основание натуральных логарифмов e может быть заменено какимлибо другим основанием, например 10; вспомним, что $e = 10^{0,43429}$. Тогда

$$A = P \cdot (10^{0,43429})^{rn} = P \cdot 10^{0,43429\,rn}.$$

Однако в последнем выражении первоначальное значение r как коэффициента при n исчезает; это обстоятельство делает основание e более удовлетворительным для вычислений подобного рода.

Закон сложных процентов можно изложить следующим образом:

Если какая-либо величина, например y, изменяется таким путем, что скорость ее возрастания (или убывания) по отношению к некоторой другой величине, например x, всегда пропорциональна ей самой (т. е. y), то она изменяется по закону сложных процентов. Таким образом

$$y = Pe^{rx},$$

где P есть значение y при $x = 0$, а r есть определенная скорость возрастания, выраженная в процентах.

Пример. Скорость химической реакции возрастает на 10% при повышении температуры на $1°$. Вывести формулу для v при любой температуре.

$$v = P\ 1{,}10^t.$$

Если $t = 0$, $v = P$.

Из таблицы натуральных логарифмов

$$1{,}10 = e^{0{,}0953}.$$

Тогда

$$v = Pe^{0{,}0953t} = P \cdot e^{0{,}0953t},$$

где P — скорость реакции при $0°$.

959. Графическое дифференцирование при помощи графика показательной функции.

Из вывода производной для показательной функции мы знаем, что ордината в этом случае измеряет наклон графика показательной функции в той точке его, для которой она была восстановлена, так как

$$\frac{d(e^x)}{dx} = e^x.$$

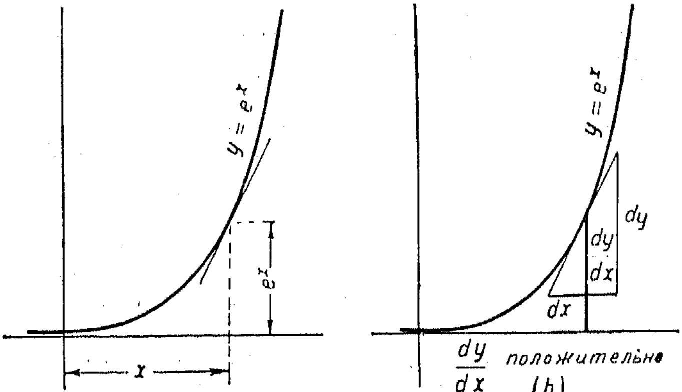


Рис. 550.

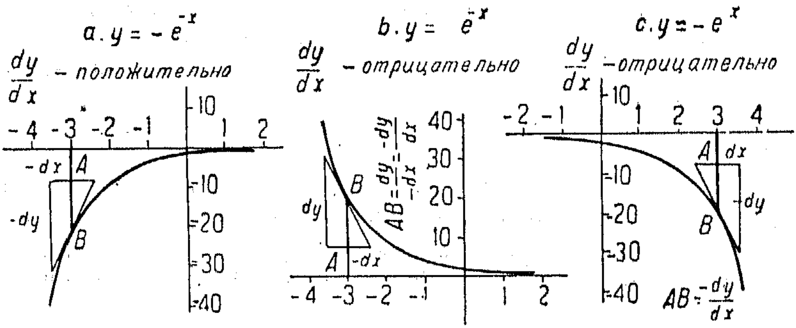


Рис. 551.

Построив на кальке кривые показательных функций

$$y = e^x,\quad y = -e^{-x},\quad y = e^{-x} \text{ и } y = -e^x,$$

мы можем определить ординаты графика производной любой кривой посредством простого наложения соответствующей показательной кривой, нанесенной на кальку, на данную кривую. Перемещая кривые до тех пор, пока не найдем точку показательной кривой, в которой наклон последней будет равен наклону данной кривой, откладываем ординату для производной кривой, равную ординате показательного графика в указанной точке его.

Если ординаты и абсциссы показательной кривой имеют различные масштабы, мы можем свести этот случай к графику

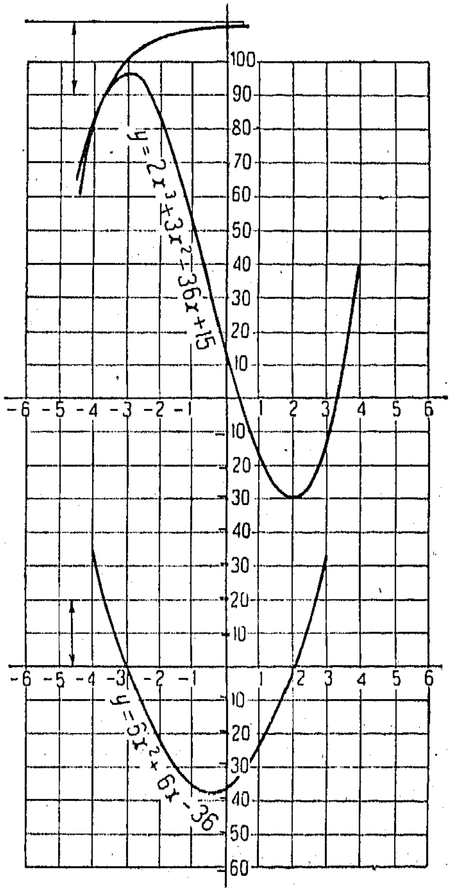


Рис. 552.

$y=e^{bx}$ посредством деления масштаба абсцисс на b, что превращает данный график в кривую $y=e^{bx}$ (см. n° 381).

Образцовый график изображен на рис. 552, также в целях пояснения изложенного метода показана часть показательной кривой в точке касания с данной кривой.

Глава XLVII.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ.

960. Обозначение дифференциала. Положим, зависимая переменная y есть функция независимой переменной x. Пусть символ dx, называемый *дифференциалом независимой переменной*, выражает приращение независимой переменной, т. е. $dx = \Delta x$. В этом случае мы под выражением „дифференциал зависимой переменной" (или, что то же самое, дифференциал функции, дифференциал y, либо dy) понимаем дифференциал независимой переменной, умноженный на производную данной функции, т. е.

$$dy = \left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot dx,$$

где символ $\frac{dy}{dx}$ представляет собою производную, а не дробь.

Разделив приведенное выше выражение на dx, получим

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dx}\right),$$

где левый член равенства представляет собою дробь, являющуюся частным от деления одного дифференциала на другой, а правый член есть производная. Согласно приведенному определению дифференциалов, мы можем рассматривать производную как частное от деления двух дифференциалов. Здесь важно заметить, что в то время как $dx = \Delta x$, dy, вообще говоря, не равняется Δy. Дифференциал независимой переменной представляет собою ее приращение, дифференциал же зависимой переменной есть произведение производной и приращения переменной независимой. Таким образом, производная функции y по x равняется дроби $\frac{dy}{dx}$, но ни в коем случае не равна дроби $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Если

$$\frac{dy}{dx} = 2x,$$

то мы можем над этим уравнением производить такие же действия, как и над дробью; т. е. можем написать так:

$$dy = 2x \cdot dx.$$

Точно таким же образом, если мы имеем произведение двух производных

$$\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\ [1],$$

то можем сократить du, в результате чего данное выражение приводится к $\frac{dy}{dx}$.

Таким же путем, если $y=u+v$, то

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx},$$

а [553] $$dy=du+dv.$$

Точно также, если $y=uv$, то

$$\frac{dy}{dx}=u\,\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx},$$

[554] $$dy=u\cdot dv+vdu.$$

Точно также, если $y=\frac{u}{v}$, то

$$\frac{dy}{dx}=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2},$$

[555] $$dy=\frac{v\cdot du-udv}{v^2}.$$

961. Приложение дифференциалов к исследованию кривых. Пусть PA — касательная к данной кривой, проходящая через ее точку $P(x, y)$ (рис. 553).

---

[1]) Равенство

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx},$$

основное в дифференциальном исчислении, имеет место вовсе не на основании того соображения, которое высказывает автор. Здесь дело гораздо тоньше. Простое сокращение на du невозможно по той причине, что в первой дроби du означает полное приращение u, тогда как в дроби du означает его главную часть.

Возможность сокращения вытекает из того, что предел отношения полного приращения к его главной части равен 1.

Прим. ред.

Положим, x получает приращение Δx, которое, согласно данному выше определению, равно dx. При этом dy — дифференциал функции — равняется ее производной, умноженной на dx. Так как производная функции равна тангенсу угла CPA, то

$$dy = \operatorname{tg} \widehat{CPA} \cdot dx.$$

$$\frac{CA}{dx} = \operatorname{tg} \widehat{CPA} \text{ или } CA = \operatorname{tg} \widehat{CPA} \cdot dx,$$

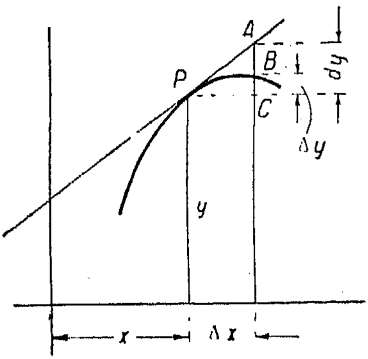


Рис. 553.

следовательно

$$CA = dy.$$

Заметим, что

$$\Delta y = BC.$$

Дифференциал функции y, т. е. dy, есть та величина, на которую возрастает y, по мере того как x возрастает на некоторое количество dx при том условии, что скорость возрастания y в интервале dx остается такой же, какой она была в начале его.

Мы рассматривали скорость изменения зависимой переменной по отношению к независимой как предел отношения и назвали предел этот производной. Такое предельное значение указанного отношения мы обозначали следующим образом:

$\frac{dy}{dx}$ = некоторая величина k (постоянная или переменная).

Мы только-что видели, что это выражение можно написать в виде такого равенства

$$dy = k \cdot dx,$$

где

$$k = f'(x),$$

Подставив $f'(x)$ вместо k, получим дифференциальное уравнение

[556] $$dy = f'(x)\,dx,$$

где $f'(x)$ есть скорость изменения зависимой переменной по отношению независимой.

962. Длина кривой. Длина кривой есть предел периметра вписанного в нее многоугольника при безграничном увеличении числа его сторон. Чтобы понять основание для такого определения, рассмотрим, как бы мы могли измерить длину кривой линии при помощи линейки. Можно представить себе линейку, которая покоробилась, несмотря на то, что была сделана

Рис. 554.

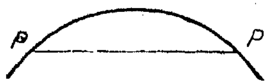


Рис. 555.

очень тонко. Очевидно, что весьма существенно для такого измерения воспользоваться идеей о вписанном многоугольнике, как это только что было высказано.

Мы примем, что предельная величина отношения между весьма малой хордой и стягиваемой ею дугой при приближении соседних точек P и P' друг к другу равна единице:

$$\lim_{P \to P'} \left[\frac{\text{хорда } PP'}{\text{дуга } PP'} \right] = 1.$$

Здесь несущественно, рассматривается ли точка P, как приближающаяся к P', или наоборот, P' — к P, так как в обоих случаях предел расстояния между ними равняется нулю.

963. Дифференциал дуги. Пусть s — расстояние от точки A до переменной точки P, измеренное по кривой. Обозначим угол BPT через букву φ. Если P прошло весьма малый путь до точки P', то приращения x, y и s таковы:

$\Delta x = PB$; $\Delta y = BP'$ и $\Delta s =$ дуга PP'.

Из рис. 556 видим, что

$$\cos \widehat{BPP'} = \frac{\Delta x}{PP'} = \frac{\Delta x}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{PP'}$$

$$\sin \widehat{BPP'} = \frac{\Delta y}{PP'} = \frac{\Delta y}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{PP'}.$$

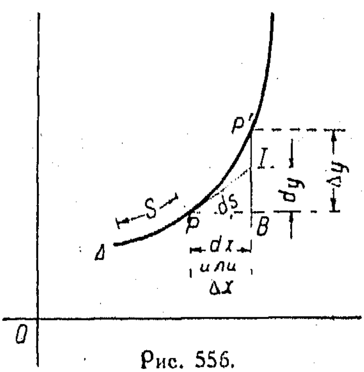


Рис. 556.

По мере того как P приближается к P', $\angle BPP'$ приближается к φ, и

$$\frac{\Delta s}{PP'} = \frac{\text{дуга } PP'}{\text{хорда } PP'} \text{ стремится к } 1.$$

Тогда, в пределе,

$$\cos\varphi = \frac{dx}{ds} \text{ и } \sin\varphi = \frac{dy}{ds}.$$

Эти равенства означают, что dx и dy являются сторонами прямоугольного треугольника с гипотенузой ds, лежащей на касательной, проведенной к данной кривой в точке P.

Надо иметь в виду, что, так как x есть переменная независимая, то $dx = \Delta x$; но dy не равняется Δy, так же, как и ds не равняется Δs, ибо y и s — переменные зависимые, что можно видеть на рис. 556.

Из сказанного мы получаем весьма важные дифференциальные равенства.

[557] $$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2.$$

[558] $$ds = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

[559] $$ds = dy\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}.$$

Глава XLVIII.

ИССЛЕДОВАНИЕ КРИВЫХ.

964. Параметрические уравнения. Если уравнение кривой дано в параметрической форме

[560] $$x = f(t) \text{ и } y = \varphi(t),$$

то весьма часто представляется удобным найти производную y по x без предварительного исключения t из данных двух уравнений. И x и y представляют собою функции t, в то же время y есть и функция x. Нам известно такое соотношение:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}. \quad [469]$$

В таком случае

[561] $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Пример. $x = t^2 + t$, а $y = t - 1$, найти $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dx}{dt} = 2t + 1, \quad \frac{dy}{dt} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2t+1}.$$

965. Составляющие скорости в пространстве. Если точка движется по кривой, расположенной в пространстве (не плоской), то проекции вектора ее скорости на три координатные оси называются *составляющими данной скорости.*

На рис. 557

$$PQ = \frac{dx}{dt}; \; QR = \frac{dy}{dt};$$

$$RT = \frac{dz}{dt}.$$

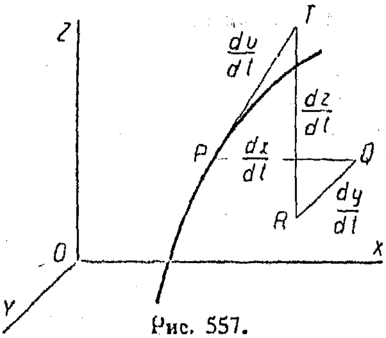


Рис. 557.

Но

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2,$$

так как

$$(PT)^2 = (PQ)^2 + (QR)^2 + (RT)^2.$$

[562] $$\frac{dv}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

Пример. Из n⁰ 880 известно, что параметрические уравнения винтовой линии

$$x = r\cos\Theta; \; y = r\sin\Theta; \; z = k\Theta,$$

где Θ — угол, на который поворачивается точка вокруг данной оси; r — радиус цилиндрической поверхности; k — постоянная, величина которой зависит от шага винтовой линии.

Найти касательную составляющую скорости в данный момент для точки, двигающейся на винтовой линии при условии, что Θ возрастает со скоростью 2 радиана в секунду:

$$\frac{dx}{dt} = -r\sin\Theta \cdot \frac{d\Theta}{dt} = -2r\sin\Theta$$

$$\frac{dy}{dt} = r\cos\Theta \cdot \frac{d\Theta}{dt} = 2r\cos\Theta$$

$$\frac{dz}{dt} = k\frac{d\Theta}{dt} = 2k.$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = 2.$$

Таким образом

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{(-2r\sin\Theta)^2 + (2r\cos\Theta)^2 + (2k)^2} = 2\sqrt{r^2 + k^2}.$$

966. Наклон кривой. К выяснению частного значения производной или, что то же, наклона кривой в некоторой точке ее, следует подходить, как мы это увидим ниже, с известной осторожностью.

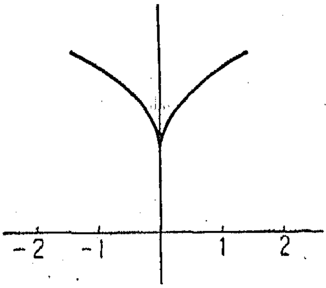


Рис. 558.

Рассмотрим в виде примера, поясняющего сказанное, кривые степенных функций, в которых показатель степени при независимой переменной является дробью. Такие кривые имеют резкие переломы, подобные тому, какой показан на рис. 558, где изображен график функции

$$y = x^{\frac{2}{3}} + 1.$$

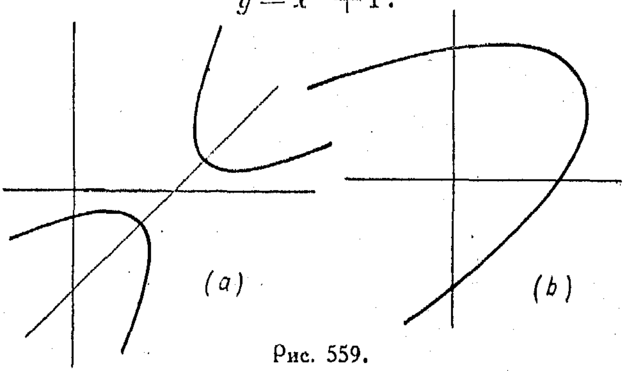


Рис. 559.

Этот график имеет перелом в точке, абсцисса которой $x = 0$. Для указанной точки производная не является конечной величиной, так как в равенстве

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

правый член не представляет собою конечной величины при $x=0$, ибо его знаменатель в этом случае обращается также в нуль. В указанной точке производная меняет свой знак с $-$ на $+$.

При исследовании геометрического места точек повернутой гиперболы или параболы могут встретиться затруднения, подобные только что изложенному. В случае какого-либо сомнения (нет ли у кривой перелома) весьма полезно построить кривую данного уравнения, в результате чего будут видны любые характерные ее особенности (рис. 559).

967. При исследовании функции для некоторого значения мы должны будем выяснить, является ли она при указанном x непрерывной. Если рассматриваемая функция имеет вид дроби и если можно найти такое значение x, которое обращает знаменатель в нуль, то при найденном x функция имеет разрыв. Поэтому рекомендуется указанный знаменатель приравнять нулю и решить получившееся при этом уравнение, затем следует испытать значения x, близкие к получившемуся из уравнения (надо испытать значение больше получившегося и меньше его) для того, чтобы определить характер изменения вблизи точки, абсцисса который есть корень решенного уравнения. Функция может иметь разрыв не только тогда, когда знаменатель обращается в нуль, но также и в других случаях, однако всегда представляется весьма разумным исследование функции при указанном условии (приравнивание нулю знаменателя и т. д.).

968. Случаи, когда производная положительна или отрицательна. Рассмотрим $y=f(x)$. Если ордината, т. е. значение функции, возрастает, в то время как абсцисса возрастает, или, говоря другими словами, если ордината возрастает при движении точки по кривой слева направо, то функция является возрастающей. График ее поднимается кверху, а поэтому скорость ее изменения $\frac{dy}{dx}$ положительна (рис. 560).

Касательная к такой кривой, проведенная через ту точку ее, для которой производная положительна, образует с осью X угол меньше $90°$.

Если ординаты, т. е. значения функции, убывают, в то время как абсцисса x возрастает, то кривая является нисходящей и производная ее $\frac{dy}{dx}$ отрицательна (рис. 561).

Касательная к этой кривой, проведенная через ту точку ее, для которой производная отрицательна, образует с осью X угол, находящийся между 90° и 180°.

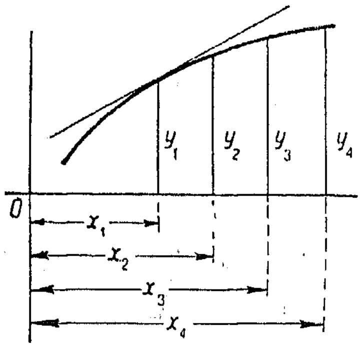


Рис. 560.

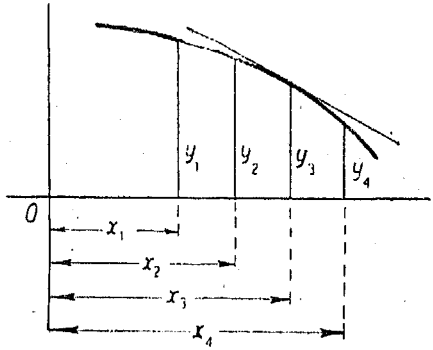


Рис. 561.

969. Если на кривой может быть найдена такая точка, в которой функция не возрастает и не убывает, то кривая в этой точке не поднимается и не опускается. Касательная к кривой, проведенная через указанную точку, является параллельной оси X, т. е. ее наклон, так же как и скорость изменения функции, равен нулю (рис. 562):

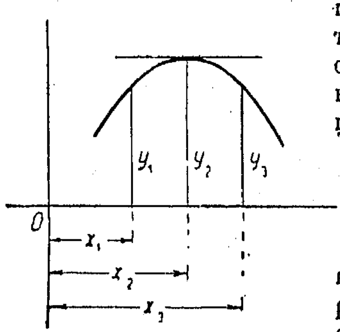


Рис. 562.

$$\frac{dy}{dx} = 0.$$

Если точка, двигаясь по кривой слева направо, проходит через такое положение, при котором производная изменяет свой знак с положительного на отрицательный, а кривая из поднимающейся превращается в нисходящую, то само собой следует, что указанное положение точки дает максимум значения функции. Если же точка, двигаясь слева направо, проходит через положение, при котором производная изменяет знак свой с отрицательного на положительный, то такое положение определяет точку *минимума* на рассматриваемой кривой (рис. 563).

970. Вогнутость кривой. Вогнутость кривой проще всего может быть выяснена, если обратиться к рассмотрению определенной кривой. Возьмем в виде примера график $y=x^3-4x$ (рис. 564).

Положим, некоторое положение точки, например P_1, соответствует какому-либо значению x, например x_1. По мере того, как значение x возрастает, т. е. данная точка движется по кривой слева направо, последовательно проходя положения P_2, P_3, P_4 и т. д., наклон касательной, т. е. производная $\frac{dy}{dx}$, убывает. График, как мы видим, обращен вогнутостью книзу.

Поэтому, если производная $\frac{dy}{dx}$ положительна и является убывающей, кривая обращена вогнутостью книзу.

Касательная, проведенная к кривой через точку P_5, параллельна оси X, т. е. наклон ее есть нуль и

$$\frac{dy}{dx}=0.$$

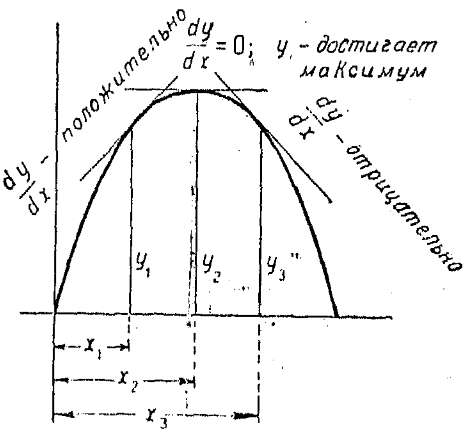


Рис. 563a.

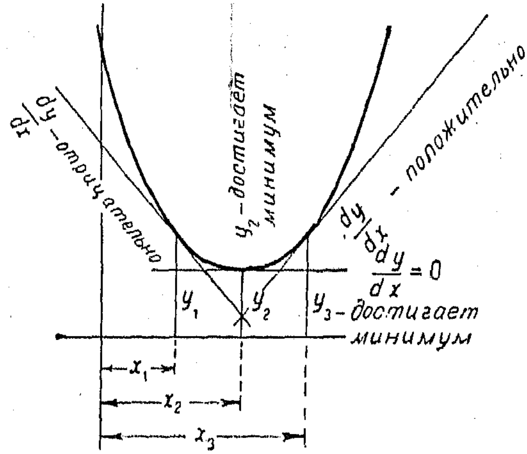


Рис. 563b.

При дальнейшем перемещении точки вправо к положениям P_6, P_7, P_8, P_9 и т. д., указанный наклон делается отрицательным и убывает, в то время как x продолжает возрастать. В точках P_6, P_7, P_8, P_9 и т. д. наша кривая опять обращена вогнутостью книзу, а поэтому мы выводим следующее заключение:

Если производная $\frac{dy}{dx}$ *убывает по мере того, как* x *возрастает, кривая обращена вогнутостью книзу* $\Big($*независимо от того, будет ли* $\frac{dy}{dx}$ *величиной положительной или отрицательной*$\Big)$.

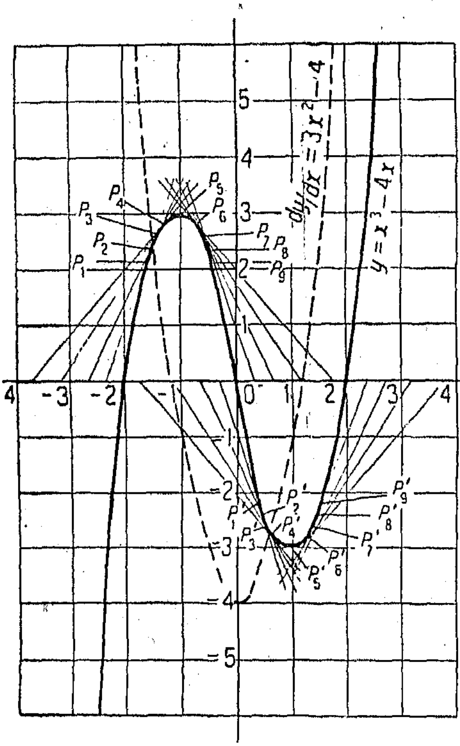


Рис. 564.

В то время как точка передвигается еще далее вправо, последовательно проходя через P_1', P_2', P_3' и т. д., наклон касательной или, что то же, значение производной, все еще остается отрицательным, но превращается из величины убывающей в величину возрастающую. Говоря другими словами, по мере возрастания x возрастает и значение производной, в этом случае наша кривая обращена вогнутостью кверху. Касательная, проходящая через точку P_5', параллельна оси X, т. е. ее наклон есть нуль, и

$$\frac{dy}{dx}=0.$$

Во время прохождения точки через положения P_6', P_7', P_8', P_9' и т. д. наклон касательной, т. е. значение производной, становится положительным и при возрастании x сам также возрастает, кривая же все еще обращена вогнутостью кверху. Поэтому мы выводим заключение, что *если производная* $\frac{dy}{dx}$ *возрастает по мере того, как и* x *возрастает, кривая обращена вогнутостью кверху* $\Bigl($*независимо от того, будет ли* $\frac{dy}{dx}$ *величиной положительной или отрицательной*$\Bigr)$.

Обращаясь опять к рис. 564, где графики

$$y = x^3 - 4x$$
$$y' = \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4$$
$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = 6x$$

вычерчены при одних и тех же осях, а их ординаты выражают соответственно y, $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, мы заметим весьма интересное соотношение: кривая производной пересекает ось X, т. е. проходит через свои нулевые значения, в таких точках, которые являются абсциссами максимума и минимума первоначальной кривой.

Для всех тех значений x, для которых график первой производной лежит над осью X (производная здесь положительна), первоначальная кривая поднимается кверху вправо. Для всех же тех значений x, для которых график первой производной находится под осью X (производная отрицательна), первоначальная кривая вправо падает.

Если при возрастании x (в направлении слева направо) положительный знак ординаты графика первой производной изменяется на отрицательный, т. е. если график первой производной пересекает ось X сверху вниз, то первоначальная кривая имеет максимум в той своей точке, для которой указанное пересечение является абсциссой, ибо в этой точке $y' = 0$.

Если при возрастании x кривая производной пересекате ось X, идя снизу вверх, т. е знак ее ординаты меняется с отрицательного на положительный, то первоначальная кривая имеет минимум в той своей точке, которая соответствует нулевой точке графика производной.

Для всех значений x, для которых график второй производной расположен выше оси X, т. е. где он положителен, кривая данной функции обращена вогнутостью кверху; для всех же значений абсциссы, для которых график второй производной находится под осью X, т. е. где он отрицателен, первоначальная кривая обращена вогнутостью книзу.

971. Точки перегиба. При том значении x, при котором график второй производной пересекает ось X,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

и кривая данной функции имеет точку перегиба.

Знак второй производной $\frac{d^2y}{dx^2}$, вообще говоря, изменяется, а следовательно график функции получает выгиб в обратную сторону, т. е. он имеет точку перегиба.

Точка перегиба есть точка максимального или минимального наклона графика функции.

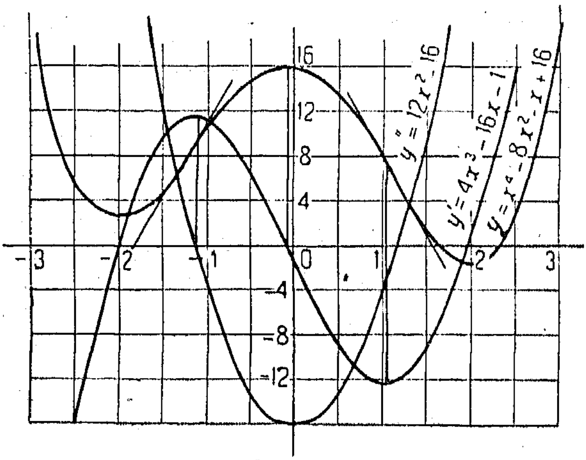


Рис. 565.

Пример (рис. 565).

$$y = x^4 - 8x^2 - x + 16$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = 4x^3 - 16x - 1.$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 16$$

Заметим, что кривая первой производной пересекает ось X тогда, когда график функции достигает максимальных, либо минимальных значений.

Кривая же второй производной пересекает ось X, когда график первой производной достигает максимальных или минимальных значений, а график функции имеет точки перегиба.

Заметим, кроме того, что ордината графика второй производной положительна для минимальных значений первоначальной функции и отрицательна для ее максимальных значений.

Если кривая второй производной лежит над осью X, т. е. если

$$\frac{d^2y}{dx^2} > 0,$$

кривая функции обращена вогнутостью кверху, если же кривая второй производной расположена под осью X, т. е. если

$$\frac{d^2y}{dx^2} < 0,$$

то кривая функции обращена вогнутостью книзу.

Для определения тех значений x, при которых данная функция имеет точку перегиба, следует вторую производную приравнять нулю, а затем решить получившееся при этом уравнение.

972. Определение значений максимума и минимума. Функция одной переменной, как это следует из предыдущих рассуждений, имеет максимум своего значения в точке $x = x_0$, если

$$\text{наклон} = \frac{dy}{dx} = 0, \text{ и если } \frac{d^2y}{dx^2} < 0 \text{ [1]}.$$

Таким же образом, функция одной переменной имеет минимум своего значения в точке $x = x_0$, если

$$\text{наклон} = \frac{dy}{dx} = 0 \text{ и если } \frac{d^2y}{dx^2} > 0.$$

Обыкновенно бывает достаточно построить весьма приблизительный график, чтобы он позволил увидеть ординаты максимума и минимума, не ведя дальнейших исследований.

---

[1]) Функция может достигать максимума или минимума еще и в тех случаях, когда при данном значении x производная функция терпит разрыв непрерывности, изменяя свой знак.

Например, функция $y = \sqrt[3]{x^2}$ имеет минимум при $x = 0$. Этот минимум нуль. Между тем производная

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

при этом значении x обращается в бесконечность.

Прим. ред.

973. Правила для нахождения максимума или минимума. Чтобы решить предлагаемые ниже задачи, определите выражение той величины, которая согласно задаче должна иметь максимум (или минимум), а затем условьтесь считать это выражение функцией, т. е. ординатой y.

Выразите y только через одну переменную x. Иногда для этого бывает удобно представить y как функцию от функции, а затем привести последнюю к обыкновенной функции, зависящей от одной переменной.

Найдите первую производную и определите те значения x, которые дают

$$\frac{dy}{dx}=0.$$

Исходя из характера задачи, обыкновенно бывает легко решить, имеет ли функция, в рассматриваемой точке, максимум или минимум. Если же это обстоятельство определить не легко, то найдите значения второй производной для тех точек, для которых первая производная обращается в нуль.

Если $\frac{d^2y}{dx^2}>0$, функция имеет минимум для данной точки.

Если $\frac{d^2y}{dx^2}<0$, функция имеет максимум для данной точки.

Пример. Стальной цилиндрический бак, состоящий из стенок и днища одинаковой толщины, должен обладать емкостью в 140 $м^3$. Найдите такие размеры бака, при которых величина его поверхности становится наименьшей.

Пусть h — высота, D — диаметр, s — площадь поверхности, $s=\frac{\pi D^2}{4}+\pi Dh$.

Объем $=\frac{\pi D^2\cdot h}{4}=140$ $м^3$ (постоянная величина).

Исключаем h посредством подстановки

$$h=\frac{140\times 4}{\pi D^2}$$

в уравнение поверхности. Тогда

$$s=\frac{\pi D^2}{4}+\frac{560}{\pi D^2}\cdot\frac{\pi D}{1}=\frac{\pi D^2}{4}+\frac{560}{D}.$$

Скорость изменения поверхности по отношению к диаметру есть

$$\frac{ds}{dD}=\frac{\pi D}{2}-\frac{560}{D^2}.$$

Функция s будет иметь минимум, когда

$$\frac{ds}{dD} = \frac{\pi D}{2} - \frac{560}{D^2} = 0$$

$$\frac{\pi D}{2} = \frac{560}{D^2}$$

$$\pi D^3 = 1120$$

$$D^3 = 357$$

$$D = 7{,}1 \text{ м} = \text{диаметр}.$$

Подставляя найденное значение D в

$$\frac{\pi D^2 h}{4} = 140,$$

получим

$$h = 3{,}5 = \text{глубина бака}.$$

Заметим, что диаметр в два раза больше глубины.

Пример 2. Производитель работ подсчитывает стоимость работ для проведения туннеля от точки A до точки B, которая лежит на 90 *м* ниже точки A и на расстоянии 150 *м* от нее по горизонтали. Он вынужден вести работы через землю и камень. Согласно его смете работа этого рода составляет на линейный метр 30 руб. в земле и 90 руб. в камне. Какие расстояния нужно пройти в земле и в каменистой породе, чтобы стоимость указанной работы была наименьшей?

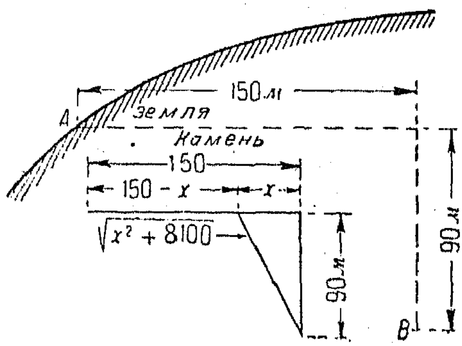


Рис. 566

Пусть x — горизонтальное расстояние, показанное на рис. 566; $150 - x$ расстояние, на котором извлекалась земля; $\sqrt{x^2+8100}$ — расстояние, на котором извлекалась каменистая порода.

Так как стоимость есть функция, минимум которой мы желаем найти, то составляем выражение для этой стоимости в виде функции двух указанных расстояний, т. е.

$$C = \text{стоимость} = 90\ \left(\sqrt{x^2+8100}\right) + 30\ (150 - x) =$$

$$= 90\ (x^2 + 8100)^{\frac{1}{2}} + 30\ (150 - x)$$

$$\frac{dC}{dx} = \frac{90}{2}\,(x^2+8100)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d\,(x^2+8100)}{dx} - 30 = \frac{90\,x}{\sqrt{x^2+8100}} - 30.$$

Для того чтобы наша функция имела минимум, $\frac{dC}{dx}$ должно равняться нулю.

Поэтому

$$\frac{90x}{\sqrt{x^2+8100}}-30=0$$

$$\frac{3x}{\sqrt{x^2+8100}}=1$$

$$3x=\sqrt{x^2+8100}.$$

Возвышая в квадрат, получим:

$$x^2+8100=9x^2$$

$$8x^2=8100$$

$$x^2=1012,5$$

$$x=31,8.$$

$$\sqrt{x^2+8100}=\sqrt{31,8^2+8100}=95,5 \text{ м}$$

есть расстояние, на котором нужно извлечь каменистую породу.

$150-x=118,2$ *м* — расстояние, проходимое в земле.

Стоимость $=90\ (95,5)+30\ (118,2)=12141$ руб.

Пример 3. Часовая стоимость топлива, расходуемого на движение парохода, пропорциональна кубу скорости и составляет 20 руб. при скорости в 20 *км*. Прочие издержки составляют 100 руб. в час. Найдите наиболее экономичную скорость парохода в стоячей воде.

Стоимость топлива $=F=ks^3$ ($s=$ число километров в час).

Тогда $20=k\ (20)^3$, откуда $k=0,0025$.

Поэтому,

$$F=0,0025\,s^3.$$

Стоимость эксплоатации в час $=0,0025\,s^3+100$.

Стоимость на километр $=C=\dfrac{0,0025\,s^3+100}{s}=0,0025\,s^2+100\,s^{-1}$

C будет иметь минимум, когда

$$\frac{dC}{ds}=0,005\,s-100\,s^{-2}=0$$

$$0,005\,s=\frac{100}{s^2}$$

$$s^3=20\,000$$

$$s=27,1 \text{ км/час}.$$

Представим этот ответ в общем виде. Пусть k — коэффициент при s, определяемый, как и выше, из опыта, и пусть a — постоянная сумма различных затрат по эксплоатации в час. Тогда наиболее экономичная скорость дается выражением

$$s=\sqrt[3]{\frac{a}{2k}}.$$

Замечание. Различные авторы дают соотношение, в котором мощность пропорциональна кубу скорости, а так как изменяющаяся мощность пропорциональна расходу топлива, то последний также пропорционален кубу скорости.

Пример 4. Прочность балки прямоугольного сечения на изгиб пропорциональна ширине последнего и квадрату его высоты. Найти размеры наиболее прочной балки, какую можно вырезать из круглого бревна диаметром 60 *см*.

Пусть S — прочность балки на изгиб, x — ширина балки, y — высота балки.

Тогда

$$S = k \cdot xy^2.$$

Из треугольника (рис. 567)

$$x^2 + y^2 = 60^2 = 3600$$

$$y^2 = 3600 - x^2.$$

Тогда

$$S = kx\ (3600 - x^2)$$

$$\frac{dS}{dx} = 3600\,k - 3\ kx^2$$

$$\frac{d^2S}{dx^2} = -6\ kx$$

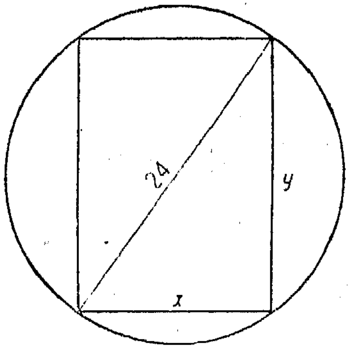


Рис. 567.

$\frac{dS}{dx} = 0$, а $\frac{d^2S}{dx^2}$ = отрицательное число в том случае, когда

$$3\ kx^2 = 3600\ k$$

$$x^2 = 1200$$

$$x = 34{,}6$$

$$y = 49{,}0.$$

Пример 5. Из механики известно для приводного ремня следующее соотношение:

Напряжение, вызываемое центробежными силами $= C = \frac{w \cdot v^2}{g}$, где w есть вес 1 *м* ремня с площадью сечения в 1 *см*^{2}. Если T_2 — наибольшее напряжение ведущей части ремня (которое он может выдержать), то величина передаваемого усилия на единицу сечения будет

$$F = T_2 - \frac{w \cdot v^2}{g}.$$

Передаваемая мощность на квадратный сантиметр сечения ремня равна

$$P = F \cdot v.$$

Тогда

$$P = T_2 v - \frac{w \cdot v^3}{g};$$

Чтобы найти максимум мощности, приравняем первую производную нулю:

$$\frac{dP}{dv}=T_2-\frac{3\ w\cdot v^2}{g}.$$

Следовательно

$$\frac{3\ wv^2}{g}=T_2.$$

Но $\frac{w\cdot v^2}{g}=C=$ напряжение, вызываемое центробежными силами. Тогда

$$3\,C=T_2$$

$$C=\frac{T_2}{3}.$$

Максимум передаваемой мощности получается в том случае, когда напряжение, вызываемое центробежной силой, составляет одну треть наибольшего допустимого рабочего напряжения ремня.

Пример 6. При какой скорости приводная цепь, имеющая рабочую нагрузку P, будет давать максимум мощности в том случае, когда принимается во внимание центробежная сила?

Пусть w — вес одного метра цепи; v — скорость цепи в метрах в секунду; $g=9{,}81$ *м/сек*^{2}.

Натяжение, вызываемое центробежными силами, $C=\frac{w\cdot v^3}{g}$.

Если T_2 — наибольшее допускаемое рабочее натяжение цепи, то появляющееся при передаче мощности натяжение равно

$$F=T_2-\frac{w\cdot v^2}{g},$$

а передаваемая мощность, как и в предыдущем примере,

$$P=T_2v-\frac{w\cdot v^3}{g}$$

$$\frac{dP}{dv}=T_2-\frac{3\ wv^2}{g}.$$

Наивыгоднейшая скорость цепи есть

$$v=\sqrt{\frac{T_2g}{3\ w}}.$$

Возьмем, например, обыкновенную кованую цепь.

$$w=6\ \text{кг на } 1\ \text{м}$$

$$T_2=450\ \text{кг}.$$

$$v=\sqrt{\frac{450\cdot 9{,}81}{3\cdot 6}}=15{,}6\ \text{м/сек}.$$

Практически же, имея в виду прочность зубцов, а также и некоторые другие обстоятельства, является нецелесообразным давать цепи скорость более 3 *м/сек*. Поэтому совершенно очевидно, что центробежная сила не влияет на сопротивление цепи; она входит в задачу и рассматривается в ней только в том случае, если цепь очень слабо натянута, что вызывает удары зубьев звездочки.

974. Кривизна. Рассмотрим дугу, обращенную вогнутостью по всей длине к своей хорде. Степень изогнутости дуги может быть измерена углом β, находящимся между касательными, проведенными через ее концы, т. е. углом, на который поворачивается касательная, если точка касания движется по данной кривой от одного ее конца к другому.

$$\text{Отношение } \frac{\beta}{\text{дуга } PP'} = \frac{\varphi' - \varphi}{\Delta s} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta s}$$

есть *средняя кривизна* дуги PP' на единицу ее длины. По мере того как P приближается к P', т. е. $\Delta s \to 0$,

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}.$$

Это выражение называется *кривизной* в точке P. Следует заметить, что изменение кривизны находится в прямой зависимости от степени изгиба кривой, т. е. кривизна больше, если кривая изогнута более резко, она меньше, если кривая более приближается к прямой линии.

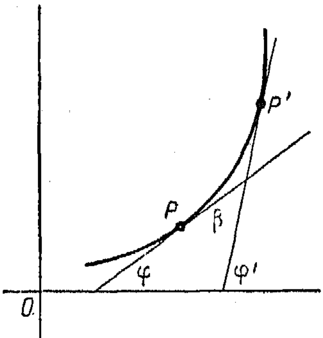


Рис. 568.

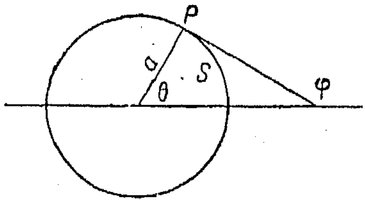


Рис. 569.

Пример 7. Найдите кривизну в точке P окружности радиуса a (рис. 569).

$$\varphi = \theta + \frac{\pi}{2}$$

$$s = a\theta.$$

Тогда

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\Theta}{a\,d\Theta} = \frac{1}{a}.$$

Кривизна окружности постоянна и равна числу, обратному величине ее радиуса. Вследствие этого радиус не применяется для измерения кривизны, ибо последняя не изменяется прямо пропорционально ему.

975. Радиус кривизны. В предыдущем n⁰ мы нашли, что радиус окружности есть величина, обратная ее кривизне.

Радиус кривизны какой-либо кривой в любой точке ее определяется как радиус такой окружности, которая имеет ту же кривизну, что и данная кривая в указанной точке. Следовательно, радиус кривизны кривой в некоторой ее точке есть величина, обратная кривизне в этой же точке.

[563] $$\rho = \frac{1}{\frac{d\varphi}{ds}} = \frac{ds}{d\varphi} \tag{1}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{dy}{dx}.$$

Из n⁰ 949 [**520**]

$$d\varphi = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}dx}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{2}$$

Кроме того

$$ds = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2}. \tag{3}$$

Подставляя (2) и (3) в (1), получим

[**564**] $$\rho = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Так как обыкновенно требуется знать численное значение ρ, то знаком его можно пренебречь.

Если кривая дана уравнением $x=f(y)$, можно показать, что таким же образом, как и выше, получается соотношение

[565] $$\rho=\frac{\left[1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2x}{dy^2}}.$$

Пример. Найдите радиус кривизны параболы $y^2=4x$ в точке (9,6):

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{y}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{y}=2y^{-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(2y^{-1})}{dx}=-2y^{-2}\frac{dy}{dx}=-\frac{4}{y^3}=-\frac{1}{54}$$

$$\rho=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}=\frac{\left(1+\frac{1}{9}\right)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{1}{54}}=-63{,}23$$

Глава XLIX.

РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В РЯДЫ.

976. Теорема Ролля. *Если функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ однозначны и непрерывны при всех значениях x, от $x=a$ до $x=b$, и если кроме того $f(a)=f(b)=0$, то $f'(x)$ обращается в нуль по крайней мере для одного значения x, находящегося между a и b.*

В геометрическом смысле это означает, что если непрерывная кривая пересекает ось X в двух точках, $x=a$ и $x=b$, и имеет во всякой точке этого интервала конечный наклон, то в некоторой точке, скажем, $x=x_0$ $(a<x_0<b)$, касательная к данной кривой параллельна оси X (рис. 570).

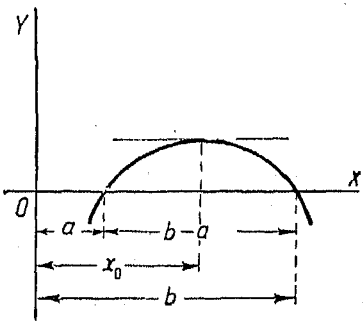


Рис. 570.

977. Закон среднего. Закон среднего, называемый иногда теоремой о среднем значении, выводится из теоремы Ролля и заключается в следующем:

Если $f(x)$ и ее первая производная $f'(x)$ непрерывны от $x=a$ до $x=b$, то существует такое значение $x=x_1$, которое лежит между $x=a$ и $x=b$ и дает равенство

[566] $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_1)$$

или

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(x_1). \tag{1}$$

Пусть

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=Q.$$

Так как a и b постоянные, то и Q постоянная и

$$f(b)-f(a)-(b-a)Q=0. \tag{2}$$

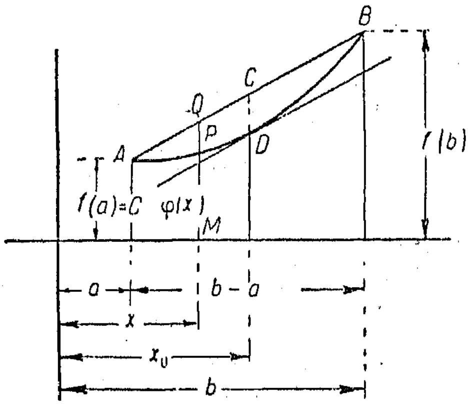


Рис. 571.

Пусть $\varphi(x)$ — функция, полученная в результате замены a буквой x во (2).

$$\varphi(x)=f(b)-f(x)-(b-x)Q \tag{3}$$

и

$$\varphi'(x)=-f'(x)+Q. \tag{4}$$

Так как $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывны между $x=a$ и $x=b$, то $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ также непрерывны между $x=a$ и $x=b$.

Из (2) имеем

$$(b-a)Q=f(b)-f(a).$$

Подставив это выражение в (3), получим

$$\varphi(x)=f(b)-f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-x).$$

Тогда

$$\varphi(b)=f(b)-f(b)=0.$$

Таким же образом из (3) получим

$$\varphi(a)=f(b)-f(a)-[f(b)-f(a)]=0.$$

Откуда следует, что $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля (n^0 976) следовательно

$$\varphi'(x_1)=0.$$

Равенство (4) получает вид

$$0=-f'(x_1)+Q,$$

или

$$Q=f'(x_1),$$

где x_1 находится между $x=a$ и $x=b$.

Подставив в (2), получим

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(x_1),$$

что и требовалось доказать.

978. Обобщение закона среднего. Если функция $f(x)$, а также ее первая и вторая производные $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывны от $x=a$ до $x=b$, то существует такое значение $x=x_2$ между $x=a$ и $x=b$, для которого

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(x_2).$$

Положим

$$\frac{f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)}{\frac{(b-a)^2}{2!}}=R. \tag{1}$$

Так как a и b постоянны, то и R также постоянна, а потому

$$f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)-\frac{(b-a)^2}{2!}R=0. \tag{2}$$

Подставляя в левую часть ур-ния (2) букву x вместо a, получим функцию

$$\varphi_2(x)=f(b)-f(x)-(b-x)f'(x)-\frac{(b-x)^2}{2!}R. \tag{3}$$

Дифференцируем (3), имея в виду, что третий член правой части является произведением. Таким образом

$$\begin{aligned}\varphi'_2(x) &= -f'(x)-(b-x)f''(x)+f'(x)+(b-x)R = \\ &= (b-x)[R-f''(x)].\end{aligned} \tag{4}$$

Так как $f(x)$, $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывны, то $\varphi_2(x)$ и $\varphi_2'(x)$ также непрерывны.

Из ур-ния (2) имеем:

$$\frac{(b-a)^2}{2!}R = f(b)-f(a)-(b-a)f'(a).$$

Подставляя полученное выражение в (3), найдем

$$\begin{aligned}\varphi_2(x) = f(b)-f(x)-(b-x)f'(x)-[f(b)-f(a)-\\ -(b-a)f'(a)]\frac{(b-x)^2}{(b-a)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2(a) = f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)-f(b)+f(a)+\\ +(b-a)f'(a) = 0.\end{aligned}$$

Кроме того, из ур-ния (3)

$$\varphi_2(b) = f(b)-f(b)-(b-b)f'(b)-\frac{(b-b)^2}{2!}R = 0.$$

Отсюда видно, что функция $\varphi_2(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля, а потому

$$\varphi_2'(x_2) = 0,$$

и ур-ние (4) превращается в уравнение

$$0 = (b-x_2)[R-f''(x_2)]$$

или

$$R = f''(x_2).$$

Подставляя это значение R в ур-ние (2), имеем

$$f(b) = f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(x_2),$$

что и требовалось доказать.

Пользуясь тем же приемом, можно показать, что

$$f(b) = f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\frac{(b-a)^3}{3!}f'''(x_3).$$

Вообще

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+$$

[567] $$+\frac{(b-a)^3}{3!}f'''(a)+\ldots+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+$$

$$+\frac{(b-a)^n}{n!}f^n(x),$$

где $a<x_n<b$. Последнее выражение является общей формой обобщенной теоремы о среднем.

979. Формула Тэйлора с остатком. Если в общей формуле закона о среднем (n⁰ 78) подставить x вместо b, то получим выражение

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+$$

[568] $$+\frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+$$

$$+\frac{(x-a)^n}{n!}f^n(x_n),$$

которое называется *формулой Тэйлора.*

Эта формула справедлива для всех значений x от $x=a$ до $x=b$, при том условии, что функция и n ее последовательных производных конечны и непрерывны в интервале от $x=a$ до $x=b$. Подставляя x вместо b, мы получаем выражение, справедливое в указанных пределах.

Таким образом, функция $f(x)$ может быть заменена равным ей конечным рядом, состоящим из членов $(x-a)$.

В формуле [568] последний ее член $\frac{(x-a)^n}{n!}f^n(x_n)$ называется *остатком*. Если этот остаток можно сделать как угодно малым, взяв для этого достаточно большое n, то указанный ряд [568] превращается в бесконечный сходящийся ряд, причем он стремится к пределу, равному $f(x)$. Для тех значений x, для которых остаток стремится к пределу, равному нулю, т. е. когда

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(x-a)^n}{n!}\right]f^n(x_n)=0,$$

функция равняется сумме членов сходящегося ряда.

Пример. Разложить $\sin x$ в ряд по степеням $(x-a)$. Имеем:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin x, & \text{тогда}\quad f(a) &= \sin a \\
f'(x) &= \cos x, & f'(a) &= \cos a \\
f''(x) &= -\sin x, & f''(a) &= -\sin a \\
f'''(x) &= -\cos x, & f'''(a) &= -\cos a \\
f^{IV}(x) &= \sin x & f^{IV}(a) &= \sin a \\
f^{V}(x) &= \cos x & f^{V}(a) &= \cos a
\end{aligned}$$

Подставив эти выражения в [568], получим:

$$\sin x = \sin a + \cos a(x-a) - \sin a\frac{(x-a)^2}{2} - \cos a\frac{(x-a)^3}{6} + \\ + \sin a\frac{(x-a)^4}{24} + \cos a\frac{(x-a)^5}{120}.$$

Если в [568] вместо x подставим $a+h$, то мы получим другую форму ряда Тэйлора, а именно:

[569] $$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f'''(a) + \\ + \frac{h^4}{4!}f^4(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a) + \frac{h^n}{n!}f^n(a) + \ldots$$

Этот ряд, в частности, весьма полезен в том случае, когда мы желаем выразить функцию суммы двух величин в виде ряда, состоящего из степеней только одной из указанных двух величин.

Пусть
$$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d. \tag{1}$$

Если x получает приращение h, то

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\cdot h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \ldots \tag{2}$$

Дифференцируя функцию (1), имеем

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\
f''(x) &= 6ax + 2b & \frac{f''(x)}{2!} &= 3ax + b \\
f'''(x) &= 6a & \frac{f'''(x)}{3!} &= a \\
f^{(n)}(x) &= 0 & \text{при } n &\geqq 4.
\end{aligned}$$

Подставляя эти значения в (2), получаем

$$f(x+h) = (ax^3 + bx^2 + cx + d) + (3ax^2 + 2bx + c)h + \\ + (3ax + b)h^2 + ah^3.$$

В большинстве случаев значительно проще составлять ряд по последнему способу, чем сначала производить подстановку $(x+h)$ вместо x, а затем выполнять перемножение, указанное в выражении

$$f(x+h) = a(x+h)^3 + b(x+h)^2 + c(x+h) + d.$$

980. Формула Маклорена с остатком. Эта формула является частным случаем формулы Тэйлора, в которой $a = 0$, причем ряд Тэйлора превращается в

[570] $$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \\ + f^{(4)}(0)\frac{x^4}{4!} + \ldots + f^{(n-1)}(0)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + f^n(x_1)\frac{x^n}{n!}.$$

Этот ряд называется рядом Маклорена.

Пример 1. Найти ряд для $\cos x$.

Имеем:

$$f(x) = \cos x = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \ldots$$

$$f(0) = \cos 0 = 1.$$

Первый член ряда $= 1$.

$$f'(x) = \frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x,$$

тогда

$$f'(0) = -\sin 0 = 0.$$

Второй член $= 0 \cdot x = 0$.

$$f''(x) = \frac{d(-\sin x)}{dx} = -\cos x,$$

тогда

$$f''(0) = -\cos 0 = -1.$$

Третий член $= \dfrac{-1 \cdot x^2}{2!} = \dfrac{-x^2}{2!}$

$$f'''(x) = \frac{d(-\cos x)}{dx} = \sin x,$$

тогда

$$f'''(0) = \sin 0 = 0.$$

Четвертый член $= \frac{0 \cdot x^3}{3!} = 0.$

$$f^4(x) = \frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x,$$

тогда

$$f^4(0) = \cos 0 = 1.$$

Пятый член $= \frac{1 \cdot x^4}{4!} = \frac{x^4}{4!}.$

Напишем ряд:

[571] $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

Пример 2. Развернуть в ряд $\sin x$.

Пусть $f(x) = \sin x$, тогда $f(0) = \sin 0 = 0$

$$f'(x) = \cos x, \qquad f'(0) = \cos 0 = 1$$
$$f''(x) = -\sin x, \qquad f''(0) = -\sin 0 = 0$$
$$f'''(x) = -\cos x, \qquad f'''(0) = -\cos 0 = -1.$$

Таким образом, наш ряд примет вид

[572] $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

а также

[573] $$i(\sin x) = i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right)$$

Пример 3. Развернуть в ряд выражение $\cos x + i \sin x$. Пользуясь найденными выше рядами для $\cos x$ и $i \sin x$, имеем:

[574] $$\cos x + i \sin x = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right) = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} + \frac{ix^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \dots = 1 + ix + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^3x^3}{3!} + \frac{i^4x^4}{4!} + \dots$$

Пример 4. Развернуть в ряд выражение $\lg_e(1 + x)$.

Пусть $f(x) = \lg_e(1 + x)$, тогда $f(0) = \lg_e 1 = 0.$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, \qquad f''(0) = \frac{-1}{1} = -1.$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \qquad f'''(0) = \frac{2}{1} = 2.$$

Подставляя эти значения в формулу

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + f''(0)\,\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\,\frac{x^3}{3!} + \dots \qquad [570]$$

получим

[575] $$\lg_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Для разложения в ряд выражения $\lg_e(1-x)$ подставляем в [575] $(-x)$ вместо x. Имеем:

[576] $$\lg_e(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots$$

То обстоятельство, что в этом ряде все члены имеют знак минус, согласуется с тем, что логарифмы чисел, меньших единицы, отрицательны.

Пример. Разложить в ряд e^{ix}.

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^{ix}, & \text{тогда } f(0) = e^0 = 1 \\ f'(x) = i \cdot e^{ix} & f'(0) = i \cdot e^0 = i = \sqrt{-1} \\ f''(x) = i^2 e^{ix} & f''(0) = i^2 \cdot e^0 = i^2 = -1 \\ f'''(x) = i^3 \cdot e^{ix} & f'''(0) = i^3 \cdot e^0 = i^3 = -\sqrt{-1}. \end{array}$$

Отсюда,

[577] $$e^{ix} = 1 + ix + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^3x^3}{3!} + \frac{i^4x^4}{4!} + \ldots$$

Но так как этот ряд одинаков с полученным ранее рядом для $\cos x + i \sin x$, то

[578] $$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

981. Предел выражения $\frac{\sin x}{x}$ при x, стремящемся к 0.

В n⁰ 936 было показано, что этот предел равен единице. То же самое можно доказать посредством разложения в ряд:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots$$

Отсюда легко видеть, что когда x приближается к 0, то предел суммы членов ряда равен единице. Поэтому

[579] $$\lim_{x \to 0} \left[\frac{\sin x}{x}\right] = 1.$$

982. Неопределенные формы. Основными видами неопределенных форм являются:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty} \cdot 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty.$$

Особенно часто встречается форма $\frac{0}{0}$, причем в нее можно превратить формы $\frac{\infty}{\infty}$ и $0 \cdot \infty$.

Любая дробь $\frac{A}{B}$ может быть написана в виде

$$\frac{\frac{1}{B}}{\frac{1}{A}}.$$

Если теперь A и B возрастают беспредельно, то $\frac{1}{A}$ и $\frac{1}{B}$ стремятся к нулю, и дробь обращается в $\frac{0}{0}$.

Точно также, если в произведении AB один из множителей, например A, приближается к нулю, а другой B возрастает беспредельно, то указанное произведение можно представить в таком виде:

$$\frac{A}{\frac{1}{B}},$$

что также является неопределенностью вида $\frac{0}{0}$.

Для раскрытия неопределенности в этом случае необходимо найти предел дроби, когда числитель и знаменатель приближаются к нулю.

Рассмотрим дробь $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$.

Предположим, что при некотором значении x, называемом *критическим значением*, дробь обращается в $\frac{0}{0}$.

Для некоторого другого значения x дробь будет иметь определенную величину, которую можно определить путем подстановки вместо x этого значения.

Попытаемся определить предел, к которому стремится дробь по мере того, как значение x приближается к критическому.

Предположим, что при $x=0$ обе функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ обращаются в нуль, т. е.

$$f(a)=0 \text{ и } \varphi(a)=0,$$

где a есть критическое значение x.

По формуле Тэйлора имеем:

$$\left.\begin{aligned} f(a+h)&=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)h^2}{2!}+\frac{f'''(a)h^3}{3!}+\ldots \\ \varphi(a+h)&=\varphi(a)+\varphi'(a)h+\frac{\varphi''(a)h^2}{2!}+\frac{\varphi'''(a)h^3}{3!}+\ldots \end{aligned}\right\} \quad [569]$$

Но так как $f(a)=0$ и $\varphi(a)=0$, то

$$\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}=\frac{f'(a)h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+\frac{f'''(a)}{3!}h^3+\ldots}{\varphi'(a)h+\frac{\varphi''(a)}{2!}h^2+\frac{\varphi'''(a)}{3!}h^3+\ldots}=$$

$$=\frac{f'(a)+\frac{f''(a)}{2!}h+\frac{f'''(a)}{3!}h^2+\ldots}{\varphi'(a)+\frac{\varphi''(a)}{2!}h+\frac{\varphi'''(a)}{3!}h^2+\ldots}.$$

Если h приближается к нулю, причем ряд Тэйлора является сходящимся, то

[580] $$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right)=\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}.$$

Поэтому мы можем найти искомый предел дроби посредством простой подстановки вместо числителя и знаменателя их первых производных, взятых по x, а затем заменить в последних x величиной a.

Пример. Найти, пользуясь изложенным выше приемом,

$$\lim_{x\to 3}\left[\frac{x^2-9}{x-3}\right].$$

Если подставить 3 вместо x, то получим:

$$\frac{9-9}{3-3}=\frac{0}{0}.$$

Дифференцируя, имеем:

$$\frac{\frac{d(x^2-9)}{dx}}{\frac{d(x-3)}{dx}}=\frac{2x}{1}=\frac{2\cdot 3}{1}=6.$$

Поэтому пределом дроби, при $x\longrightarrow 3$, является число 6.

Пример 2. Найти

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\left[\frac{x^4+6x^2}{3x^3+x^2}\right].$$

Дифференцируя, получим:

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\frac{4x^3+12x}{9x^2+2x}.$$

Если подставить $x=0$, то дробь все же примет неопределенную форму. Дифференцируя вторично, имеем

$$\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}=\frac{12x^2+12}{18x+2}.$$

Подставляем $x=0$, тогда

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\left[\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0}\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]=\frac{12}{2}=6.$$

Поэтому

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\left[\frac{x^4+6x^2}{3x^3+x^2}\right]=6.$$

Пример 3. Найти

$$\lim_{x\longrightarrow \pi}\left[x-\pi\right]\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\lim_{x\longrightarrow\pi}\left[\frac{x-\pi}{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}\right].$$

Для получения новых числителя и знаменателя, дифференцируем числитель и знаменатель предыдущей дроби. Тогда:

$$\frac{d(x-\pi)}{dx}=1;\qquad \frac{d\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)}{dx}=-\frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2\frac{x}{2}$$

$$\lim_{x\longrightarrow\pi}\left[\frac{1}{-\frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2\frac{x}{2}}\right]=-2.$$

Глава L.

ЧАСТНОЕ И ПОЛНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ.

983. Функции двух независимых переменных. До настоящей главы мы рассматривали только функции одной независимой переменной. Надо заметить, что хотя кроме того мы исследовали и функции вида $y = uv$ и $yx = u$, но последние представляли собою также функции только одной независимой переменной: в первой из них u и v являлись функциями независимой переменной x, во второй же буквы x и y применялись обычно для того, чтобы указать на то обстоятельство, что данная функция является функцией от некоторой независимой переменной t.

Ниже мы рассмотрим функцию, значение которой зависит от значений двух независимых переменных. Такой функцией, например, является объем газа. Объем этот зависит от температуры газа, а также от действующего на него давления, причем и температура и давление могут изменяться независимо друг от друга.

984. Дифференцирование функции двух независимых переменных. При изучении функции $f(x, y)$ двух независимых переменных три различных соотношения между функцией и независимыми переменными могут представить интерес.

Мы можем исследовать во-первых, каким образом изменяется указанная функция по мере изменения x, в то время как величина y остается постоянной; во-вторых — каким образом изменяется эта же функция в зависимости от изменения y, причем остается постоянной величина x и, в-третьих, мы определим характер изменения функции в зависимости от одновременного изменения обеих независимых переменных x и y.

Пусть функция $f(x, y)$ двух независимых переменных выражается равенством

$$z = f(x, y),$$

которое согласно изложенному в отделе аналитической геометрии трех измерений является уравнением некоторой поверхности. Если одна из независимых переменных рассматривается как величина переменная, а другая как постоянная, то получаемая в этом случае производная называется *частной производной.*

В этом случае производимые для получения производной действия одинаковы с теми, которые выполнялись при дифференцировании функции одной независимой переменной; уравнение $z = f(x, y)$ графически выражается плоской кривой, образующейся при пересечении поверхности $z = f(x, y)$ с некоторой плоскостью, параллельной плоскости координат.

Если величине y дано некоторое постоянное значение y_0, а x рассматривается как величина переменная, то для какого-либо значения x, например x_0, имеем:

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta_x z}{\Delta x}\right] = \frac{\partial z}{\partial x},$$

где подстрочный знак x (в $\Delta_x z$) указывает на то, что x — независимая переменная, и где $\frac{\partial z}{\partial x}$ — символ, выражающий частную производную.

Поясним изложенное геометрическим путем. Пусть P — некоторая точка на кривой, образованной при пересечении плоскости $y = y_0$ с поверхностью

$$z = f(x, y),$$

находится на расстоянии x_0 от плоскости YZ, как это изображено на рис. 572.

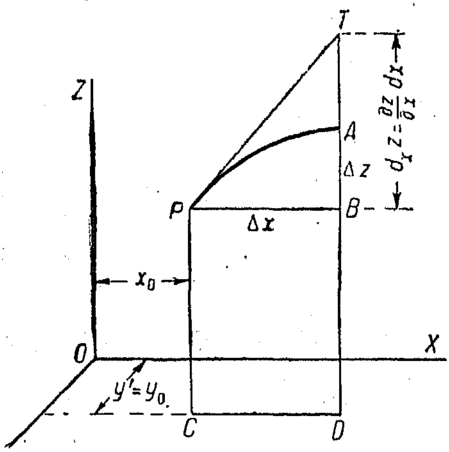


Рис. 572.

Возьмем какую-либо другую точку A на этой же кривой, а затем опустим на плоскость XY перпендикуляры PC и TAD, которые пересекут ее в точках C и D. Обозначим отрезок CD через Δx. Проведем прямую PB параллельно CD и прямую PT, касательную к кривой в точке P. Тогда AB геометрически выражает $\Delta_x z$, а отрезок TB выражает согласно изложенному в n⁰ 960 $dz = \frac{dz}{dx} dx$; это равенство, будучи написано в новых символах, превратится в $d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx$.

Тем же самым путем, если величине x дано некоторое постоянное значение x_0, а y рассматривается как величина переменная, то для любого значения y, например y_0,

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

и

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Для того чтобы пояснить это геометрически, проведем на расстоянии x_0 от координатной плоскости и параллельно ей плоскость $x = x_0$, как это показано на рис. 573. Возьмем на кривой, образованной пересечением проведенной плоскости с поверхностью $z = f(x, y)$, точки P и A' и проведем к плоскости XY перпендикуляры PD' и $T'A'C'$, которые пересекут ее в точках C' и D'. Проведем отрезок PB' параллельно $C'D'$. Пусть $C'D' = \Delta y$. Начертим прямую PT', касательную к рассматриваемой кривой в точке P. Тогда, геометрически, $A'B'$ и $T'B'$ соответственно выразят $\Delta_y z$ и $d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$.

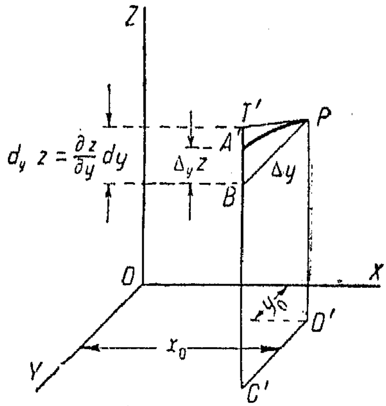


Рис. 573.

985. Полное дифференцирование. Теперь остается еще рассмотреть тот случай, когда переменные x и y изменяются одновременно, но независимо друг от друга.

Пусть, как это было выше, $x = x_0$ и $y = y_0$. Обозначим через $P_0(x_0, y_0, z_0)$ точку пересечения проведенных двух плоскостей с поверхностью $z = f(x, y)$. Положим, что x получает приращение $\Delta x = dx$, а y — приращение $\Delta y = dy$; пусть, кроме того, L — точка нашей поверхности, имеющая координаты $x_0 + \Delta x$, $y_0 + \Delta y$, $z_0 + \Delta z$. На рис. 574 видим, что $CD = dx$, $CC' = dy$.

Проведем через точку P_0 плоскость $P_0TT'R$ таким образом, чтобы она касалась рассматриваемой поверхности в точке P_0. Тогда отрезок P_0T будет представлять собою касательную к дуге P_0A, а P_0T' — касательную к дуге P_0A'. Плоскость $P_0TT'R$, являясь касательной плоскостью к рассматриваемой поверхности в точке P_0, довольно хорошо представляет измерение функции на небольшом участке поверхности, примыкающей к точке P_0.

Отрезок RN выражает приращение dz, появляющееся у ординаты касательной плоскости, когда x и y получили приращения dx и dy. Оно мало отличается от приращения функции, изображаемой отрезком LN.

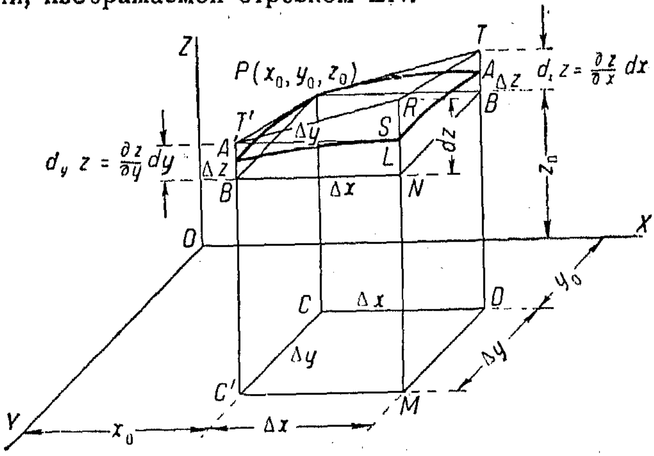


Рис. 574.

Проведем прямую $T'S$ параллельно плоскости XY. Тогда получим $\triangle RT'S$, равный $\triangle TP_0B$, откуда $RS = TB$ [1]).

Тогда

$$RN = RS + SN. \tag{1}$$

Но

$$RN = dz; \quad RS = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx; \quad SN = T'B' = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy. \tag{2}$$

Подставив значения (2) в (1), получим

[581]
$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Дифференциал функции двух независимых переменных равняется сумме произведений, получаемых от умножения частных производных этой функции, взятых по каждой независимой переменной, на дифференциал соответствующей переменной.

1) $\triangle PT'S$ и $\triangle TP_0B$ равны между собой как два прямоугольных треугольника с равными катетами $T'S' = P_0B$ и равными $\angle RT'S = \angle BP_0T$, которые образованы параллельными сторонами.

Прим. ред.

Это определение распространяется на функции, в которые входит любое число независимых переменных. Таким образом,

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz.$$

Если независимые переменные, в свою очередь, являются функциями одной какой-либо независимой переменной t, то мы можем составить выражение для полной производной данной функции u, по этой последней переменной t, следующим образом.

Разделим написанное выше равенство на dt:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}.$$

Пример. Плотина, поставленная поперек канала, образует прямоугольное озеро в 2000 *м* шириною и 5000 *м* в длину. Шторм увеличивает

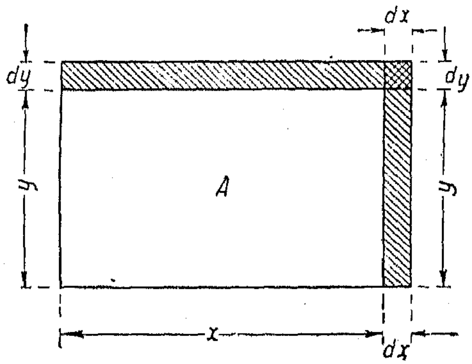


Рис. 575.

ширину озера со скоростью 50 *м/мин*, а длину со скоростью 200 *м/мин*. С какой скоростью будет возрастать площадь поверхности озера в момент времени спустя 10 минут после начала шторма?

Пусть x — ширина озера, y — длина озера, z — площадь,

$$z = xy$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y_0; \qquad \frac{dx}{dt} = 50; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x_0; \qquad \frac{dy}{dt} = 200$$

$$y_0 = 5000 + 200 \times 10 = 7000$$
$$x_0 = 2000 + 50 \times 10 = 2500.$$
$$\frac{dz}{dt} = y_0 \times 50 + x_0 \times 200 =$$
$$= 7000 \times 50 + 2500 \times 200 =$$
$$= 850\,000 \text{ м}^2/\text{мин}.$$

986. Дифференцирование функции от функции двух или более независимых переменных. Названное дифференцирование носит тот же характер, что и изложенное в предыдущем n⁰ дифференцирование для нахождения полной производной. Если $u = f(x, y)$ и если величины x и y не зависят друг от друга, но каждая из них представляет собою функцию некоторой переменной t, то

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy.$$

Разделив это равенство на dt, получим

[582] $$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt},$$

где полная производная $\frac{du}{dt}$ представляет собою скорость изменения функции u по отношению к t.

Тем же самым путем, если $u = f(x, y, z)$ и если величины x, y и z не зависят друг от друга, но каждая из них является функцией переменной t, то

[583] $$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

Пример. Дана формула

$$pV = kT,$$

где p — давление, V — объем, T — температура, k — постоянная, зависящая от свойства газа.

Положим $k = 5$ и пусть в данный момент объем и температура газа будут: $V_0 = 0{,}5$ *см*³, $T_0 = 250°$. Тогда

$$0{,}5 p_0 = 5 \times 250$$
$$p_0 = 2500 \text{ кг/м}^3.$$

С какой скоростью изменяется давление, если температура поднимается со скоростью 0,5°, а объем увеличивается со скоростью 0,002 $м^3$ в минуту?

Так как p является функцией двух других переменных, входящих в данное равенство, то напишем его в такой форме:

$$p = 5\frac{T}{V}.$$

Но

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial T}\cdot\frac{dT}{dt} + \frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{dV}{dt} \qquad [582]$$

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{5}{V}; \qquad \frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{5T}{V^2}.$$

Условия задачи дают, что

$\frac{dT}{dt} = 0{,}5$ — скорость изменения температуры по отношению ко времени.

$\frac{dV}{dt} = 0{,}002$ — скорость изменения объёма по отношению ко времени.

Подставив эти значения, получим

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial T}\cdot\frac{dT}{dt} + \frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{dV}{dt} = \frac{5}{V}\,0{,}5 - \frac{5T}{V^2}\,0{,}002.$$

Так как требуется узнать скорость, с которой изменяется давление в том случае, когда $V = 0{,}5$ и $T = 250$, то

$$\frac{dp}{dt} = \frac{5\cdot 0{,}5}{0{,}5} - \frac{50\cdot 250\cdot 0{,}002}{0{,}25} = 5 - 100 = -95.$$

Этот ответ означает, что давление убывает со скоростью 95 *кг/м*^{2} в минуту в том случае, когда объем равен 0,5 *кг*^{3}, а температура равна 250°.

987. Последовательное частное дифференцирование. Если z представляет собою функцию двух независимых переменных x и y, то первые две производные ее, $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, сами являются некоторыми функциями x и y; каждая из этих производных может быть опять продифференцирована как по x, так и по y.

Рассмотрим функцию $z = x^2\sqrt{y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\sqrt{y}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}\,x^2 y^{-\frac{1}{2}} = \frac{x^2}{2\sqrt{y}}.$$

Каждая из этих производных является функцией x и y Поэтому здесь будут две частные производные от каждой из полученных выше производных; одна из них будет по x, другая по y.

$$\frac{\partial(2x\sqrt{y})}{\partial x}=2\sqrt{y},\quad \frac{\partial(2x\sqrt{y})}{\partial y}=xy^{-\frac{1}{2}}=\frac{x}{\sqrt{y}}.$$

$$\frac{\partial\left(\frac{x^2}{2\sqrt{y}}\right)}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{y}},\quad \frac{\partial\left(\frac{x^2}{2\sqrt{y}}\right)}{\partial y}=-\frac{x^2}{4\sqrt{y^3}}.$$

Производная от $\frac{\partial z}{\partial x}$ по x обозначается: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

Производная от $\frac{\partial z}{\partial x}$ по y обозначается: $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$.

Производная от $\frac{\partial z}{\partial y}$ по x обозначается: $\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

Производная от $\frac{\partial z}{\partial y}$ по y обозначается: $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Во всех тех случаях, когда z является функций x и y, обе вторые частные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ одинаковы.

988. Зависимые переменные. Если некоторые из заданных переменных являются функциями остальных, то первые называются *зависимыми переменными.*

Рассмотрим равенство

$$u=x^2+y^2+z^2$$

в котором пусть z будет функцией x и y. Если величина y постоянна, z будет функцией x и в этом случае частная производная u по x

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Если же x рассматривается как величина постоянная, частная производная u по y будет

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}.$$

В том случае, когда z принимают за постоянную,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x \text{ и } \frac{\partial u}{\partial y}=2y.$$

Таким образом, значение частной производной зависит от того, какие из величин во время дифференцирования принимаются за постоянные. Характер же задачи обычно дает указания, какую из независимых переменных следует рассматривать как функцию.

Если величины x и y зависят друг от друга и соотношение между ними выражается равенством

$$y = F(x),$$

или уравнением

$$\varphi(x, y) = 0,$$

либо системой параметрических уравнений

$$\begin{cases} x = F_1(t) \\ y = F_2(t), \end{cases}$$

то мы знаем, что движение точки является связанным на плоскости XY, следовательно значение z в этом случае относится к частной кривой в пространстве, даваемой пересечением цилиндра $\varphi(x, y) = 0$ с поверхностью $z = f(x, y)$.

Всегда, когда существует между x и y подобное соотношение, мы можем взять такую переменную t (или также самое величину x), чтобы x и y могли бы быть выражены как функции этой переменной, а затем мы можем продифференцировать данную функцию, т. е. функцию x и y, по переменной t.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy.$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Дифференцируя u по x, получаем

[584] $$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx}.$$

Дифференцируя же u по y, получаем

[585] $$\frac{du}{dy} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dy} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dy} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dy} + \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Таким же образом, если

$$u = f(x, y, z),$$

то согласно n⁰ 986

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

Если же $y = \varphi(x)$, а $z = \psi(x)$, то

[586] $$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Эти формулы весьма полезны при дифференцировании сложных функций одной переменной.

Пример: Найдем $\frac{du}{dx}$, если $u = x \cdot e^{\sqrt{a^2 - x^2}} \sin^3 x$.

Пусть

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$
$$z = \sin^3 x.$$

Тогда

$$u = xe^y z$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^y z; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xe^y z; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xe^y.$$

Кроме того,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}; \qquad \frac{dz}{dx} = 3\sin^2 x \cos x.$$

Подставляя эти производные в

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dx}, \qquad [586]$$

имеем

$$\frac{du}{dx} = e^y z - \frac{x^2 e^y z}{\sqrt{a^2 - x^2}} + 3xe^y \sin^2 x \cdot \cos x =$$
$$= e^{\sqrt{a^2 - x^2}} \left[\sin^3 x \left(1 - \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} + 3x \operatorname{ctg} x\right)\right].$$

989. Полные дифференциалы. В своем месте (n^0 985) была выведена формула для полного дифференцирования. Если мы умножим на dt равенство

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt},$$

то получим

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz. \qquad [587]$$

Эта формула может быть распространена на случаи какого угодно числа переменных, к которым ее и можно соответствующим образом применять.

990. Дифференцирование неявных функций. Предположим, что y, будучи функцией x, определяется неявным образом посредством уравнения

$$f(x, y) = 0.$$

Так как функция $f(x, y)$ в этом случае для всех соответствующих друг другу значений x и y является постоянной величиной — нулем, то полный дифференциал ее также должен быть равен нулю, т. е.

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0.$$

Перенеся первый член в правую часть этого уравнения и разделив затем обе части полученного при этом равенства одновременно на $\frac{\partial f}{\partial y}$ и на dx, получим:

[588] $$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Это равенство позволяет весьма удобным способом сразу написать производную $\frac{dy}{dx}$ неявной функции; его следует обычно применять вместо способа, изложенного выше в n° 908.

Пример. Дано $f(x, y) = x^2y - xy^3 = 0$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - y^3; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 3xy^2,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{2xy - y^3}{x^2 - 3xy^2}.$$

Глава LI.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.

Основные понятия и теоремы.

991. В дифференциальном исчислении мы изучали методы определения скорости изменения величины в любой данный момент. В интегральном же исчислении нам задается скорость изменения величины, а мы желаем найти значение ее в любой момент. Задаваемая в этом случае скорость изменения подлежащей определению величины есть производная последней. Дифференцирование представляет собою действие, противоположное тому, которое производится в интегральном исчислении, в том же самом смысле, как деление противоположно умножению, возведение в степень — извлечению корня.

Рассмотрим закон падения тел. Величина скорости падения (скорость изменения расстояния по отношению ко времени падения) в любой момент выражается уравнением

$$v = gt,$$

которое мы можем представить в форме

$$\frac{ds}{dt} = gt.$$

Нам дается скорость движения, а мы желаем найти формулу, выражающую пройденный за время t путь. Мы знаем, что искомая формула имеет вид

$$s = \frac{gt^2}{2}.$$

Таким образом, наша задача заключается в том, чтобы найти метод определения указанной формулы из уравнения скорости движения. Процесс разыскания функции, производная или, что то же самое, скорость изменения которой задана, называется *интегрированием*.

992. Положим, что выражение $f(x)$ обозначает данную производную, которая может представлять собою x^n, $\lg x$, или какую-либо другую функцию x; пусть, кроме того, $F(x)$ является искомой функцией, производная которой есть $f(x)$. Тогда

$$\frac{d[F(x)]}{dx} = f(x). \qquad (1)$$

Знак $\int$, стоящий перед некоторым выражением, указывает, что над последним надо произвести действие интегрирования в том же самом смысле, как знак $\sqrt{}$ указывает, что из количества, находящегося под ним, следует извлечь квадратный корень. Символ dx, находящийся за выражением, перед которым стоит знак $\int$, означает, что указанное выражение представляет собою производную искомой функции, взятую по x.

Тогда, действие, обратное действию (1), должно быть обозначено следующим образом:

$$\int f(x)\,dx = F(x). \qquad (2)$$

$F(x)$, другими словами, представляет собою функцию, первая производная которой по x есть $f(x)$.

Выражения, получающиеся при употреблении этих символов, имеют различный вид, так например

$$\int \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dx}{1+x^2}, \text{ и т. д.}$$

Следует иметь в виду, что указанные формулы означают интегрирование выражений

$$\frac{1}{x} \text{ и } \frac{1}{1+x^2},$$

т. е. интегрирование той части всего выражения, которая остается после отбрасывания символов математического действия $\int$ и dx.

Нам известно из алгебры, что

$$\sqrt[n]{a^n} = a,$$

т. е. если совершить над некоторой величиной два обратных действия, мы получим первоначальную величину. Таким же образом

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$$

или

$$\int \left[\frac{d}{dx} F(x)\right] dx = F(x),$$

откуда видно, что символы

$$\frac{d}{dx} \text{ и } \int \ldots dx$$

выражают обратное друг другу действие.

Точно также, если u есть некоторая функция x, то

[589] $$\int \frac{du}{dx}\,dx = u,$$

что представляет собою весьма полезную формулу.

993. Постоянная интегрирования. Из дифференциального исчисления известно, что прибавление некоторой постоянной к функции не влияет на величину скорости ее изменения

В этом случае наклон кривых будет одинаков для одного и того же значения x (рис. 576). По этой причине, если нам дан наклон, т. е. производная или, другими словами, скорость изменения функции, мы должны иметь, кроме того, еще и такое дополнительное указание, которое позволит определить значение постоянной величины. При этом мы будем в состоянии определить точное положение кривой, соответствующей проинтегрированному выражению.

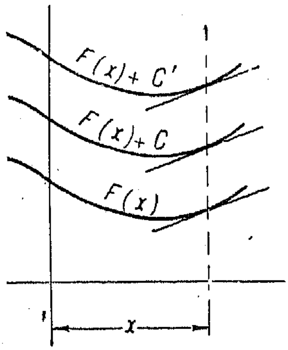


Рис. 576.

Если нам даны начальная точка или начальное условие, мы можем определить значение указанной постоянной.

Из сказанного выше следует, что при интегрировании весьма существенно прибавлять некоторую постоянную, например таким образом:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Если мы находим производные выражений

$$y = x^3 + 6,$$
$$y = x^3 + 1,$$
$$y = x^3 + 10,$$

то видим, что для всех кривых этих функций будем иметь

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2.$$

Таким образом, если нам нужно проинтегрировать $3x^2$, то искомая функция может представлять собою любую из трех, приведенных выше, так же как и функцию

$$y = x^3 + \text{любая постоянная.}$$

Все указанные кривые одинаковы и для некоторого данного x все они имеют одну и ту же величину наклона; они только смещены одна относительно другой в вертикальном направлении. Для того же чтобы определить одну из них как данную функцию, надо найти соответствующее значение постоянной интегрирования.

994. Интегрирование выражения x^n. Процесс интегрирования более затруднителен, чем дифференцирование, и весьма значительное число выражений непосредственно не поддаются интегрированию. В интегральном исчислении многие формулы получаются из соответствующих формул дифференциального исчисления посредством простого представления последних в обозначениях интегрального исчисления.

Если мы дифференцируем

$$y=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C,$$

то получаем

$$\frac{dy}{dx}=\frac{n+1}{n+1}x^n=x^n.$$

При помощи же обратного действия получим

[590] $$\int x^n\cdot dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C.$$

Другой пример:

$$y=-\cos x+C$$

$$\frac{dy}{dx}=\sin x.$$

Обратное действие дает

$$\int \sin x\,dx=-\cos x+C.$$

Из первого примера мы видим, что дифференцирование степени x дает функцию, степень которой на единицу меньше, а интегрирование — на единицу больше, чем у первоначальной функции.

Если

$$f'(x)=x^n \text{ или } \frac{dy}{dx}=x^n,$$

то

$$f(x)=y=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C.$$

Мы можем применять последнюю форму для непосредственного интегрирования различных степеней, так например

$$\frac{dy}{dx}=x^{10};\quad y=\frac{x^{11}}{11}+C$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{-4}; \quad y = \frac{x^{-3}}{-3} + C$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{\frac{7}{4}}; \ y = \frac{x^{\frac{11}{4}}}{\frac{11}{4}} + C.$$

995. Постоянный множитель. Пусть $y = au$, где u есть некоторая функция от x. Дифференцируя, получаем выражение

$$\frac{d(au)}{dx} = a\frac{du}{dx},$$

в котором a — постоянный множитель.

Производя обратное действие, т. е. интегрируя, получаем

$$\int a \frac{du}{dx} dx = au.$$

Но так как

$$\int \frac{du}{dx} \cdot dx = u,$$

то

[591] $$\int a \frac{du}{dx} dx = a \int \frac{du}{dx} dx,$$

откуда видно, что любой постоянный множитель при интегрируемой функции может быть написан как перед, так и под знаком интегрирования.

996. Интегрирование суммы и разности. Из дифференциального исчисления известно, что

$$\frac{d(u+v-w)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}.$$

Интегрируя это выражение, получаем

$$\int \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}\right) dx = u + v - w + C.$$

Но так как

$$u = \int \frac{du}{dx} \cdot dx; \quad v = \int \frac{dv}{dx} \cdot dx; \quad w = \int \frac{dw}{dx} \cdot dx,$$

то

[592] $$\int\left(\frac{d(u+v-w)}{dx}\right)dx=\int\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}-\frac{dw}{dx}\right)dx=$$
$$\int\frac{du}{dx}dx+\int\frac{dv}{dx}dx-\int\frac{dw}{dx}dx.$$

Интеграл суммы двух или большего числа функций равен сумме интегралов слагаемых. Таким образом,

$$\int\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}\right)dx=\int\frac{du}{dx}dx+\int\frac{dv}{dx}dx=u+v+C.$$

Точно также

$$\int\left(\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dx}\right)dx=\int\frac{du}{dx}dx-\int\frac{dv}{dx}dx=u-v+C.$$

Интеграл разности двух функций равен разности их интегралов.

997. Вычисление площадей посредством интегрирования. Одно из первых приложений интегрирования заключается в решении задачи об определении площади, расположенной под данной кривой.

Единственное условие, необходимое для решения вопроса, состоит в том, чтобы указанный график был непрерывным в рассматриваемом интервале.

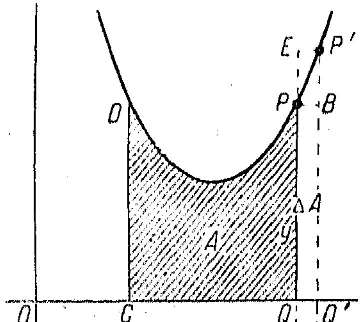


Рис. 577.

Если ордината CD (рис. 577) неподвижна, а PQ перемещается вправо, то площадь A будет изменяться в некоторой определенной зависимости от изменения x, ибо ордината изменяется как функция независимой переменной x, которая сама изменяется по оси абсцисс. Если скорость возрастания данной площади, т. е. $\frac{dA}{dx}$, определена, то мы можем найти A посредством интегрирования.

Если мы увеличиваем x на величину Δx, то A увеличивается на ΔA. Из рис. 577 следует, что площадь прямоугольника $PBQQ'$ есть $y\cdot\Delta x$, а площадь прямоугольника $EP'Q'Q$ равна $(y+\Delta y)\Delta x$.

Кроме того, из рис. 577 видно, что если данная кривая поднимается от точки P до точки P', то

прямоугольник $PBQQ' < \Delta A <$ прямоугольник $EP'Q'Q$,

т. е.

$$y \cdot \Delta x < \Delta A < (y + \Delta y)\Delta x.$$

Если же кривая опускается от точки P до точки P', то

$$(y + \Delta y)\Delta x < \Delta A < \Delta y \Delta x.$$

Разделив на Δx, получим

$$y < \frac{\Delta A}{\Delta x} < y + \Delta y, \text{ если кривая поднимается}$$

$$y + \Delta y < \frac{\Delta A}{\Delta x} < y, \text{ если кривая опускается.}$$

По мере того как Δx приближается к нулю, $y + \Delta y$ стремится к y как к пределу. Отсюда следует, что вне зависимости от того, будет ли кривая подыматься или опускаться от точки P до точки P', при Δx, стремящемся к нулю, $\frac{\Delta A}{\Delta x}$ имеет значение, находящееся между y и некоторым выражением, которое имеет предел y.

Поэтому, по мере того как Δx стремится к нулю, $\frac{\Delta A}{\Delta x}$ стремится к пределу y.

Последнее выражение есть средняя скорость возрастания A на интервале Δx. Напишем сказанное выше в символах

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta A}{\Delta x}\right] = \frac{dA}{dx} = y = f(x).$$

Так как символы y и $f(x)$ представляют собою одно и то же, т. е. ординату, то один из них может быть подставлен вместо другого. Из последнего выражения следует, что скорость, с которой возрастает площадь A в какой-либо точке, равняется высоте кривой, т. е. равняется ординате в указанной точке.

Так как

$$\frac{dA}{dx} = y = f(x),$$

то

$$dA = y\, dx = f(x)\, dx,$$

следовательно

[593] $$A = \int y\ dx = \int f(x)\ dx.$$

Мы можем теперь найти площадь под любой кривой, если известно уравнение, выражающее высоту y через горизонтальное расстояние x (x отсчитывается от какой-либо определенной точки), при том условии, что мы будем в состоянии проинтегрировать выражение $y\,dx$.

Пример. Найдем площадь, ограниченную кривой $y = x^2$, неподвижной ординатой, восставленной из точки $x = 1$, и некоторой подвижной ординатой.

Здесь $A = \int y\,dx$ получает вид $\int x^2\,dx$:

$$A = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

Если площадь возрастает от начальной точки $x = 1$, то при $x = 1$, $A = 0$, т. е.

$$\frac{(1)^3}{3} + C = 0,$$

следовательно

$$C = -\frac{1}{3}.$$

Подставив найденное значение C, получим формулу для возрастающей площади в таком виде

$$\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}.$$

Если мы желаем найти площадь при $x = 5$, то получим

$$\frac{(5)^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{125}{3} - \frac{1}{3} = 41,(3).$$

Для того чтобы найти площадь, заключающуюся между кривой, осью X и данными ординатами, в том случае, когда кривая расположена под осью X, можно произвести тот же самый вывод, но только здесь указанная площадь будет выражаться отрицательным интегралом, т. е.

$$A = -\int y\ dx = -\int f(x)\ dx.$$

В случае, если кривая находится как выше, так и ниже оси X, результирующая площадь будет представлять собою площадь над осью X минус площадь под нею.

Точно таким же образом, как это было изложено выше, площадь, ограничиваемая кривой, осью Y и двумя абсциссами, выражается

$$A = \int x\,dy.$$

Геометрический смысл этого выражения можно увидеть, обратившись к рис. 578.

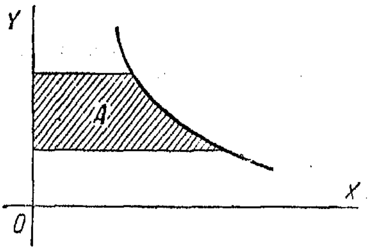


Рис. 578.

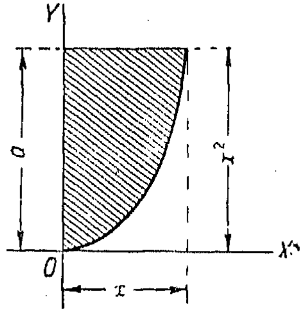


Рис. 579.

На рис. 579 показан график функции $y = x^2$; площадь, находящаяся между этим графиком, осью Y и абсциссами $x = 0$ и $y = a$,

$$A = \int y^{\frac{1}{2}} dy + C.$$

Если $y = 0$, то и $A = 0$, а следовательно и $C = 0$.
Отсюда

$$A = \int y^{\frac{1}{2}}\,dy = y^{\frac{3}{2}} \times \frac{2}{3} = \frac{2a^{\frac{3}{2}}}{3}.$$

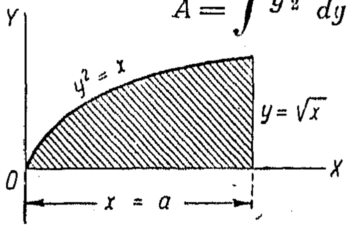


Рис. 580.

На рис. 580 изображен график $y^2 = x$; площадь, находящаяся между этим графиком, осью X и ординатами, которым соответствуют абсциссы $x = 0$ и $x = a$,

$$A = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx + C.$$

Если $x = 0$, то и $A = 0$, а следовательно и $C = 0$.
Отсюда

$$A = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = x^{\frac{3}{2}} \times \frac{2}{3} = \frac{2a^{\frac{3}{2}}}{3}.$$

Площадь прямоугольника $= a \times \sqrt{a} = a^{\frac{3}{2}}$.

Поэтому, площадь, находящаяся под параболой, равна двум третям площади прямоугольника.

998. Задачи на определение средней величины. Во многих задачах, в которые входит некоторая изменяющаяся величина, требуется найти ее среднее значение за данный промежуток времени. Это среднее значение графически выражается посредством ординаты, которая является в свою очередь средней по величине из всех ординат на данном отрезке абсцисс. Высота эта, будучи умножена на основание (соответствующий отрезок оси абсцисс), дает площадь, расположенную под данной кривой (рис. 581).

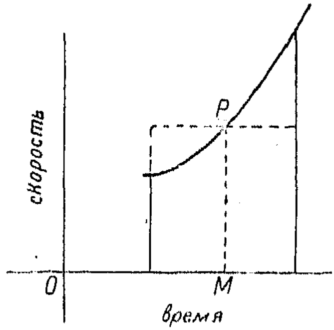


Рис. 581.

Если мы рассматриваем случай, в котором ординаты показывают изменение скорости в некотором промежутке времени, и если требуется знать пройденный за этот же промежуток времени путь, то производим простое перемножение средней скорости на число единиц, заключающееся в указанном интервале времени. Говоря другими словами, мы находим площадь, расположенную под нашей кривой, между двумя неподвижными ординатами, которые определяются данным интервалом времени.

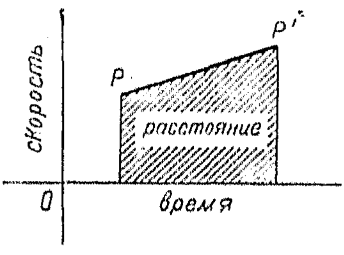


Рис. 582a.

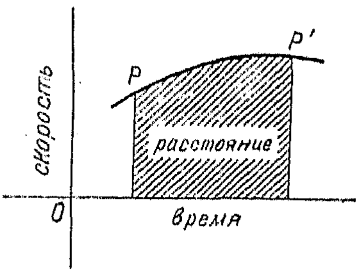
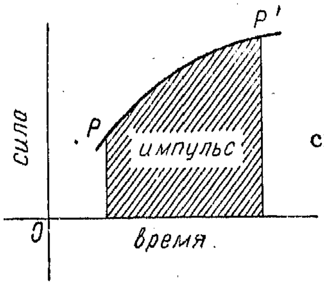


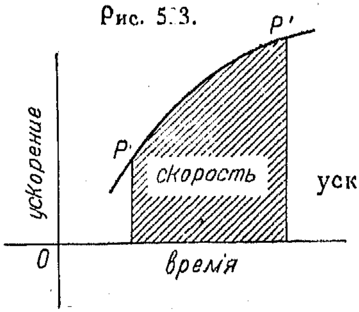
Рис. 582b.

999. Нахождение среднего значения посредством вычисления площади. Многие технические задачи могут быть решены весьма просто, если считать, что площадь под кривой представляет собою некоторую функцию.



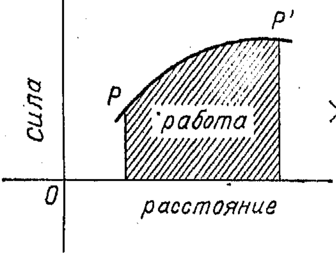
Импульс = среднее значение силы $\times$ время.

Рис. 583.



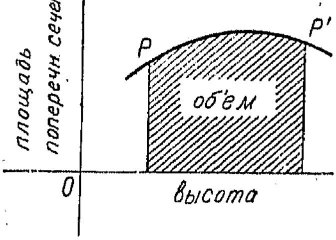
Скорость = среднее значение ускорения $\times$ время.

Рис. 584.



Работа = среднее значение силы $\times$ $\times$ пройденный путь.

Рис. 585.



Объем = средняя величина поперечного сечения $\times$ высота.

Рис. 586.

В случае (a) (рис. 582) наклон есть величина постоянная, т. е. скорость изменяется равномерно. Пройденный путь равен произведению времени на среднюю скорость; другими словами, площадь под графиком представляет собою величину пути, проходимого за рассматриваемый промежуток времени.

Случай (b) аналогичен случаю (a) за исключением того, что в первом скорость не возрастает равномерно, т. е. ускорение есть величина переменная. В обоих случаях величина y представляет собою скорость движения, т. е. скорость изменения положения в пространстве по отношению ко времени.

Другой пример такого же типа состоит в определении импульса силы из графика сила—время (рис. 583). Выше показано еще несколько подобных примеров на рис. 584, 585 и 586.

Пример. Найдем импульс Q, сообщаемый движущемуся телу переменной силой F спустя t секунд после начала движения.

В дополнительном промежутке времени Δt телу сообщается добавочный импульс ΔQ, подобно тому как площади, расположенной под кривой (n⁰ 997), дается приращение.

Таким же самым образом рассмотрим прямоугольники $PBQQ'$ и $EP'Q'Q$.

$$F\Delta t < \Delta Q < (F + \Delta F)\,\Delta t.$$

Разделив это неравенство на Δt, получим

$$F < \frac{\Delta Q}{\Delta t} < F + \Delta F.$$

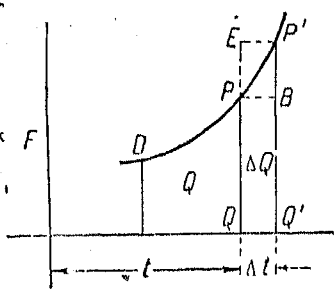


Рис. 587.

По мере того как Δt приближается к нулю, $F + \Delta F$ приближается к F и $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$, также приближается к F.

Тогда, как и ранее,

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right] = \frac{dQ}{dt} = F,$$

т. е.

$$dQ = F\,dt,$$

следовательно

$$Q = \int F\,dt.$$

Путь. Таким же образом, для графика скорость—время существует формула

$$s = \int v\,dt.$$

Скорость. Точно так же для графика ускорение — время площадь под кривой дает полное изменение скорости, т. е.

$$\text{изменение скорости} = v = \int a\,dt.$$

Работа. Формула работы или площади под графиком сила — путь

$$\text{работа} = \int F\,dS.$$

Объем. Формула для объема или площади под графиком поперечного сечения A_s, выражаемого через соответствующую высоту, которую обозначаем через букву x,

$$\text{объем} = V = \int A_s\,dx.$$

1000. Площадь в полярных координатах. Пусть $\rho = f(\theta)$ уравнение в полярных координатах, где функция $f(\theta)$ однозначна и непрерывна. Мы желаем определить площадь, находящуюся между радиусами-векторами OB и OC (углы этих векторов отложены от начальной прямой — полярной оси) и данной кривой $\rho = f(\theta)$.

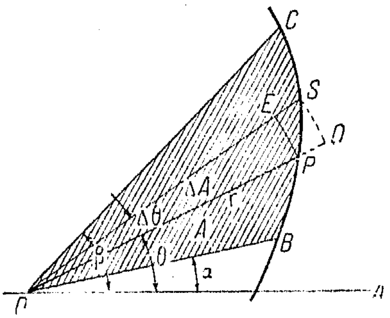


Рис. 588.

Пусть OP представляет собою радиус-вектор, составляющий с начальной прямой угол θ, который получает приращение $\Delta\theta$. Пусть кроме того OS выражает радиус-вектор, который образует с начальной прямой угол $\theta + \Delta\theta$. При этом ρ получает значение $\rho + \Delta\rho$. В то время как угол θ получает приращение $\Delta\theta$, площадь BOP, т. е. A, получает, в свою очередь, приращение ΔA. Если скорость, с которой увеличивается площадь, т. е. $\frac{dA}{d\theta}$, определяется так же, как и в прямоугольных координатах, то площадь A может быть найдена посредством интегрирования.

Из рис. 588 видно, что площадь сектора круга POE есть половина произведения радиуса на дугу PE, т. е.

$$\frac{1}{2}\rho \times \rho\Delta\theta,$$

а площадь сектора DOS другого круга равняется

$$\frac{1}{2}[\rho+\Delta\rho][\rho+\Delta\rho]\,\Delta\theta.$$

Тогда, сравнив указанные сектора, получим неравенство

$$\frac{1}{2}\rho^2\,\Delta\theta<\Delta A<\frac{1}{2}[\rho+\Delta\rho]^2\cdot\Delta\theta,$$

в том случае когда ρ, т. е. $f(\theta)$, возрастает при движении точки P к положению S.

Последнее выражение превращается в неравенство

$$\frac{1}{2}[\rho+\Delta\rho]^2\,\Delta\theta<\Delta A<\frac{1}{2}\rho^2\,\Delta\theta,$$

в том случае, когда ρ или $f(\theta)$ убывает при движении точки P к положению S.

Разделим теперь эти неравенства на $\Delta\theta$.

Тогда, если ρ возрастает,

$$\frac{\rho^2}{2}<\frac{\Delta A}{\Delta\theta}<\frac{[\rho+\Delta\rho]^2}{2},$$

если же ρ убывает,

$$\frac{[\rho+\Delta\rho]^2}{2}<\frac{\Delta A}{\Delta\theta}<\frac{\rho^2}{2}.$$

По мере того как $\Delta\theta$ приближается к нулю,

$$\frac{[\rho+\Delta\rho]^2}{2}\ \text{приближается к}\ \frac{\rho^2}{2},$$

независимо от того, возрастает ли ρ или убывает, и величина $\frac{\Delta A}{\Delta\theta}$ лежит между $\frac{\rho^2}{2}$ и некоторым количеством, которое стремится к $\frac{\rho^2}{2}$ как к пределу.

Следовательно, по мере того как $\Delta\theta$ приближается к нулю,

$$\frac{\Delta A}{\Delta\theta}\ \text{стремится к}\ \frac{\rho^2}{2}$$

$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\left[\frac{\Delta A}{\Delta\theta}\right]=\frac{dA}{d\theta}=\frac{\rho^2}{2}=\frac{1}{2}[f(\theta)]^2.$$

Поэтому

$$[594] \qquad A = \frac{1}{2}\int \rho^2\, d\theta + C \quad \text{или} \quad A = \frac{1}{2}\int f(\theta)\, d\theta + C.$$

Пример. Найти площадь, ограниченную кривой (рис. 589).

$$\rho = a\sqrt{1 - \cos\theta}$$

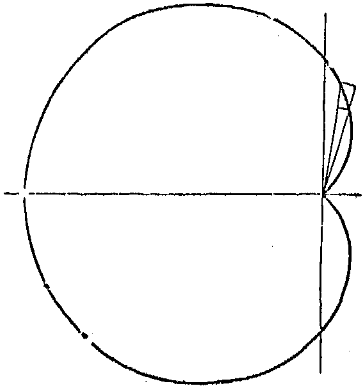


Рис. 589.

$$A = \int \frac{\rho^2}{2}\, d\theta = \int \frac{(a\sqrt{1 - \cos\theta})^2}{2} \cdot d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\int (1 - \cos\theta) \cdot d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\,[\theta - \sin\theta] + C.$$

Если $\theta = 0$, то и $A = 0$, а следовательно и $C = 0$.

При $\theta = 2\pi$, $A = \frac{a^2}{2}(2\pi - 0) = \pi \cdot a^2$.

Глава LII.

ГРАФИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ.

Графические методы интегрирования.

1001. Графическое интегрирование. В n° 916 было показано, что ординаты интегральной кривой [1]), т. е. первообразной функции, численно выражают площадь полос, располо-

[1]) Интегральной кривой называется кривая, изображающая первообразную функцию. *Прим. ред.*

женных под графиком интегрируемой функции. Излагаемый ниже графический метод интегрирования основан на этом свойстве, причем указанные ординаты получаются путем прибавления той ординаты, которая выражает площадь данной полосы к сумме ординат, выражающих площади всех предшествующих полос.

Такое сложение ординат выполняется таким же образом, как и при методе суммирования (n^0 1036).

Рассмотрим данный график $OABCDE$, который желательно проинтегрировать графическим путем.

Следует постоянно иметь в виду следующие два обстоятельства.

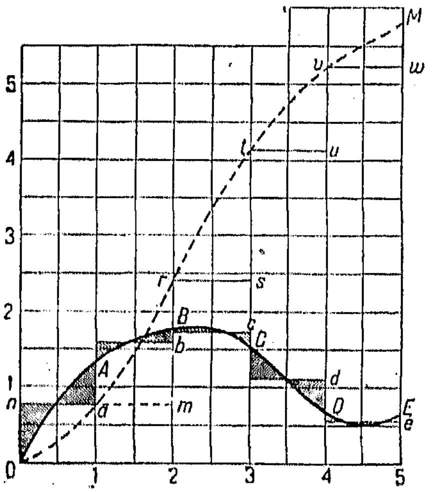


Рис. 590.

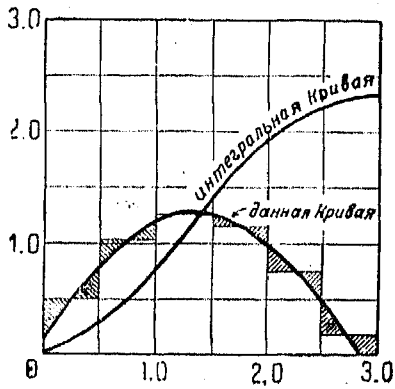


Рис. 591.

1. В то время как функция $y = F(x)$ достигает максимума (или минимума), функция $y = f(x)$ пересекает ось X.

2. В то время как $y = f(x)$ достигает максимума (или минимума), $y = F(x)$ должна иметь точку перегиба.

Таким образом на рис. 590 кривая OM должна касаться оси OX в начале координат, а также должна иметь точку перегиба при $x = 4\frac{1}{2}$; на рис. 591 кривая функции, получающейся в результате интегрирования, должна достигать максимума несколько влево от $x = 3$.

Начиная действие с первой полосы $OA\,1$, определим среднюю ее высоту. Для этого проведем горизонтальную прямую an, расположив ее таким образом, чтобы площади заштрихованных треугольников, получающихся при этом, были равны друг другу.

После небольшой практики глаз приучается весьма точно определять правильное положение прямой an. Построим отрезок $1a$, равный ординате, измеряющей площадь первой полосы.

Таким же путем найдем среднюю ординату для второй полосы, при этом продолжим an до точки m, а затем проведем отрезок mr, равный $b2$. Тогда отрезок $r2$ представляет собою сумму указанных двух ординат, т. е. он выражает площадь, расположенную под кривой OAB.

Продолжая аналогичное построение для различных полос, мы придем к выводу, что отрезок $M5$ измеряет площадь $OABCDE$ в квадратных единицах.

В случае если ширина полосы есть дробь, весьма полезным является применение циркуля для пропорционального деления, которым обычно пользуются весьма редко. На рис. 591 ширина полос взята равной 0,5 единицы, причем циркуль устанавливается на отношение 2 : 1, и тогда значение интеграла измеряется непосредственно на вертикальной шкале ординат.

Если ширина полос берется равной 2 единицам, циркуль устанавливается на отношение 1 : 2.

Если ширина полос берется равной 10 или 20 единицам, рекомендуется считать, что новый масштаб ординат кривой, получающейся в результате интегрирования, равен масштабу ординат интегрируемой кривой, умноженному на 10 или на 20 соответственно.

1002. Графическое определение постоянной интегрирования. Дана функция

$$y = 6x^2 + 6x - 36,$$

построим ее график так, как показано на рис. 592.

Кроме того, попытаемся построить и кривую ее интеграла, т. е. функции, получаемой в результате интегрирования данной. Построение интегральной кривой начнем от точки ее, соответствующей точке A графика данной функции. Здесь мы заметим, что таких точек может быть сколько угодно, ибо нам ничего неизвестно о положении оси X относительно второй кривой, причем график интеграла будет выражать интегрирование данной кривой вне зависимости от того, где бы мы ни расположили ось X.

Однако, если мы получаем добавочное указание, что при $x = 0$ значение интеграла равно 15, то мы сразу можем поместить начало координат для графика интеграла в точке, лежащей ниже его пересечения с осью Y на 15 единиц.

1003. Работа растяжения пружины. Пусть W—работа, необходимая для растяжения пружины на длину s. W является функцией от s и стало быть должна существовать некоторая формула, которая будет выражать W через s (рис. 593).

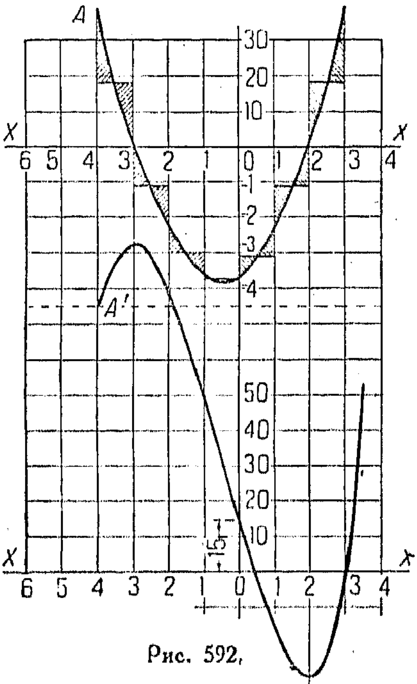


Рис. 592.

Согласно закону Гука, удлинение прямо пропорционально растягивающей силе, т. е.

$$F = ks,$$

где k — постоянная, величина которой зависит от свойств пружины.

Имеем

$$\text{работа} = \int F \cdot ds.$$

Подставляя в это выражение $F = ks$, получаем

$$\text{работа} = \int ks\, ds = \frac{1}{2} ks^2 + C.$$

При $W = 0$, $s = 0$, тогда $C = 0$, следовательно

$$W = \frac{ks^2}{2}.$$

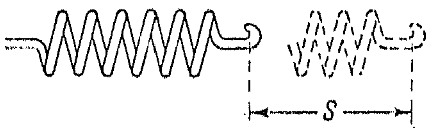


Рис. 593.

1004. Пример графического интегрирования. Мы желаем определить работу, происходящую при расширении 1 *кг* сухого, насыщенного пара при падении давления со 100 *кг/см*^{2} до 15 *кг/см*^{2}.

Прежде всего строится первоначальная кривая по данным, взятым из таблицы пара, а затем, исходя из этой кривой, наносят кривую интеграла, для чего пользуются циркулем для пропорционального деления, установленным на отношение 10 : 1 (рис. 594).

Искомая работа равняется

$$77 \times 10 = 770 \text{ кг-см.}$$

Предположим, что работа расширения пара в этом примере должна быть поровну разделена между тремя цилиндрами машины тройного расширения. Тогда делим ординату, выражающую всю совершаемую работу, на три равные части, а затем точки делений проектируем в горизонтальном направлении на кривую интеграла. Проекции точек делений на кривой интеграла переносим по вертикали на кривую расширения пара. Перенесенные таким путем на эту последнюю кривую точки A и B определяют величину начального давления для каждого из цилиндров.

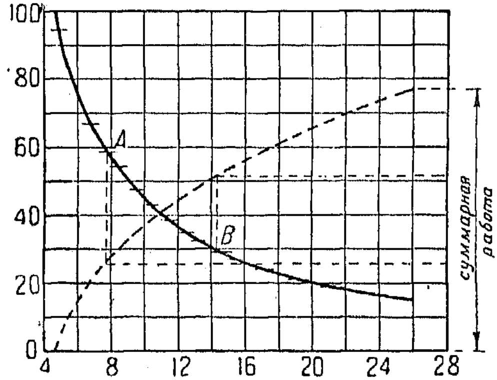


Рис. 594.

1005. Графическое интегрирование графиков скорости. Измеритель скорости автомобиля, двигавшегося по неровной проселочной дороге, дал приведенные ниже отсчеты за различные периоды времени, считаемые от начала движения. Время дается в минутах, а скорость — в километрах/час.

Время	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Скорость	0	10	20	25	28	29	26	24	20

Из характера задачи следует, что

$$\text{путь} = \int v\,dt.$$

Построив график скорость — время и проинтегрировав его, мы найдем пройденный путь.

Для этого сначала наносим кривую скорость — время, а затем при помощи циркуля для пропорционального деления, установленного на отношение 3 : 1, строим кривую интеграла.

Так как в этом случае скорость дана в километрах/час, то ординаты первой кривой следовало бы разделить на 60, но так как наш циркуль установлен на отношение 3 : 1, то вертикальный масштаб нужно разделить лишь на 20.

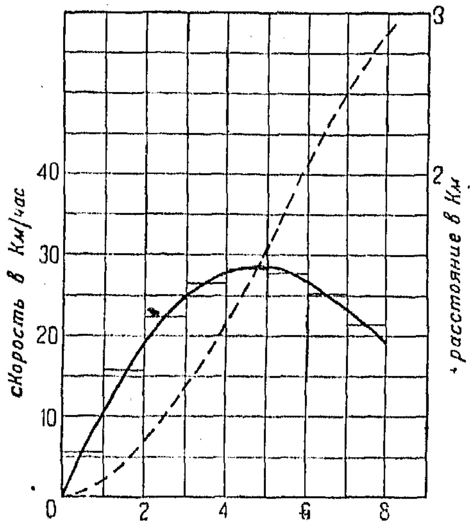


Рис. 595.

За первые 3 минуты автомобиль прошел $^3/_4$ *км*, за 8 же первых минут пройденный путь был несколько меньше 3 *км*.

1006. Основные формы интегральных кривых. Прием, заключающийся в перенесении начала координат основных кривых и применяемый с той целью, чтобы они изображали данное уравнение, можно применить в случае интегрирования таким же образом, как и при дифференцировании, хотя при этом величины h и k будут иметь другое значение.

1007. График интеграла от a.

$$\int a dx = ax + b.$$

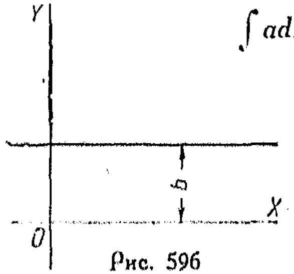


Рис. 596

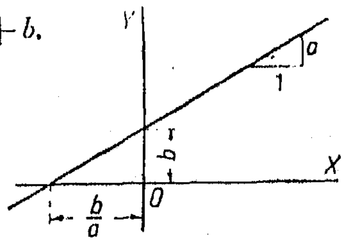


Рис. 597.

Если $a = 0$, график имеет вид, показанный на рис. 596.

Если a есть любая конечная величина, не равная 0, график имеет вид, показанный на рис. 597, где a — наклон; отрезок, отсекаемый графиком на оси Y, равен b; отрезок, отсекаемый графиком на оси X, равен $-\frac{b}{a}$.

1008. График интеграла от постоянной величины при различных постоянных интегрирования. На рис. 598 показан график, получившийся при интегрировании функции $y=2$, если постоянная интегрирования равна 12.

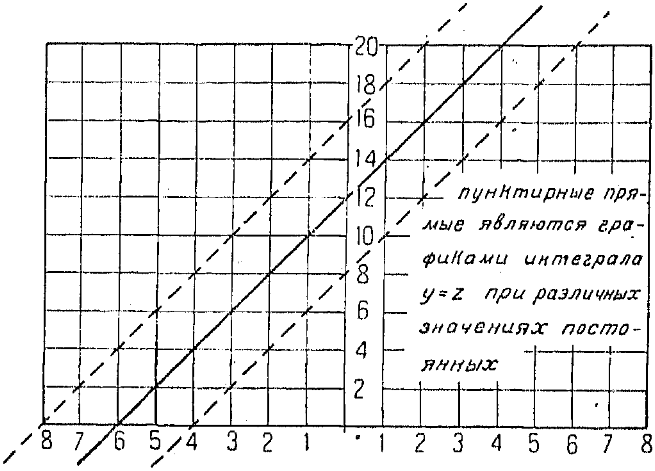


Рис. 598.

Проведенные пунктиром прямые линии показывают графики интеграла функции $y=2$ для различных постоянных интегрирования.

1009. График интеграла функции $y=ax+b$. Пользуясь аналитическим методом, имеем:

$$\int(ax+b)\,dx=\frac{ax^2}{2}+bx+C.$$

Кривой этого интеграла является парабола. Поэтому возьмем график $y=x^2$, изменим вертикальный масштаб, как это показано на рис. 599, и, подставив в формулы преобразования (n^0 172) $\frac{a}{2}$ вместо a, получим такое начало координат, которое делает взятый график выражающим кривую нашего интеграла. Тогда

$$h=\frac{b}{2\cdot\frac{a}{2}}=\frac{b}{a};\quad k=\frac{b^2-4\cdot\frac{a}{2}C}{4\cdot\frac{a}{2}}=\frac{b^2-2aC}{2a}=\frac{b^2}{2a}-C.$$

Пример. На рис. 599 показано графическое интегрирование функции $y = 6x + 6$

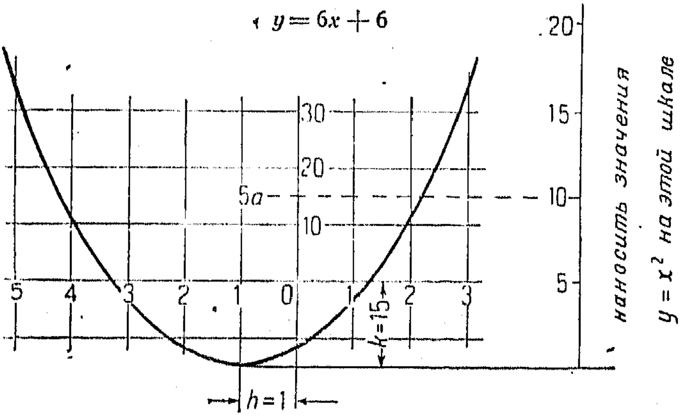


Рис. 599.

при постоянной интегрирования, равной -12.

$$h = \frac{6}{6} = 1;\; C = -12;\; k = \frac{36}{12} + 12 = 15.$$

Рис. 600 показывает график

$$y = \int (3x + 2)\,dx,$$

когда постоянная интегрирования принята равной -5.

$$h = \frac{b}{a} = \frac{2}{3}$$

$$k = \frac{b^2}{2a} - C = \frac{4}{6} + 5 = 5\frac{2}{3}.$$

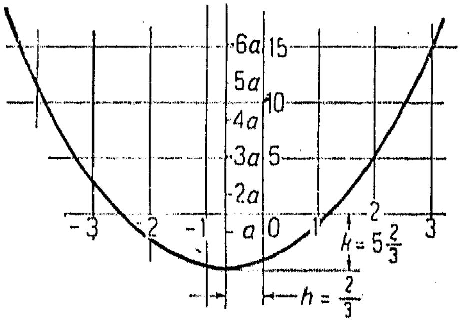


Рис. 600

1010. График интеграла функции $y = ax^2 + bx + c$.

Пользуясь тем же приемом, что и в предыдущем случае, мы получаем значения h и k с той лишь разницей, что здесь a является одной третью, а b — половиной соответствующих величин, входящих в общие формулы преобразования [1]). Тогда

$$h = \frac{\frac{b}{2}}{3 \cdot \frac{a}{3}} = \frac{b}{2a},\quad k = \frac{\frac{b}{2} \cdot c}{3\frac{a}{3}} - \frac{2\frac{b^3}{8}}{27\frac{a^2}{9}} = \frac{bc}{2a} - \frac{b^3}{12a^2} =$$

$$= -\frac{b}{2a}\left(\frac{b^2 - 6ac}{6a}\right) \text{— постоянная.}$$

---

[1]) Смотри n° 172. *Прим. ред.*

$$m = c - \frac{\frac{b^2}{4}}{3 \cdot \frac{a}{3}} = c - \frac{b^2}{4a}.$$

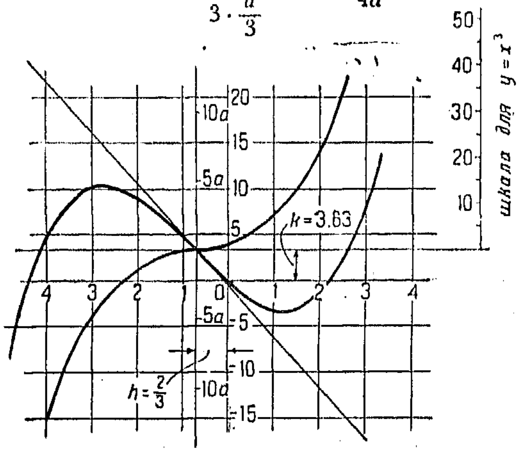


Рис. 601.

Пример. Проинтегрировать графическим способом функцию (рис. 601)

$$y = \frac{3x^2}{2} + 2x - 5.$$

$$a = \frac{3}{2};\ b = 2;\ c = -5$$

$$h = \frac{2}{2\frac{3}{2}} = \frac{2}{3};\ k = \frac{2(-5)}{2 \cdot \frac{3}{2}} - \frac{8}{12 \cdot \frac{9}{4}} = -3{,}63$$

$$m = -5 - \frac{4}{4\frac{3}{2}} = -5\frac{2}{3}.$$

Глава LIII.

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ.

Интегрирование между пределами.

1011. Определенные интегралы. Существует особый метод нахождения площадей, объемов и т. п. величин, которые выражаются площадью, расположенной под данной кривой и считаемой от точки P до P'. Этот метод весьма прост и сущность его можно понять из следующих рассуждений.

Рассмотрим площадь под кривой

$$y=2\sqrt{x}$$

между ее ординатами, восстановленными в $x=2$ и в $x=4$.

Из формулы площади имеем

$$A=\int 2\cdot\sqrt{x}\,dx=2\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C.$$

$$=\frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3}+C.$$

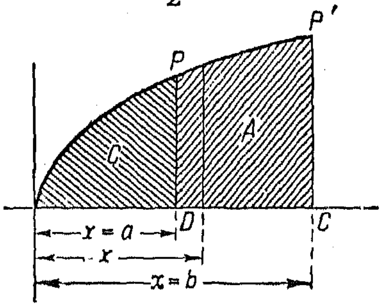


Рис. 602.

Начнем измерять площадь, соответствующую $x=2$. В этом случае $A=0$, отсюда

$$0=\frac{4\cdot 2^{\frac{3}{2}}}{3}+C,$$

а следовательно

$$C=-\frac{4}{3}\cdot 2^{\frac{3}{2}}.$$

Формула площади теперь будет

$$A=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{3}\cdot 2^{\frac{3}{2}}.$$

Последняя формула дает величину площади под данной кривой для любой точки x, находящейся за $x=2$.

Если $x=4$, то

$$A=\frac{4}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{3}\cdot 2^{\frac{3}{2}}.$$

Точно также, если мы желаем найти площадь от $x=a$ до $x=b$, мы получим (рис. 602)

$$A=\frac{4}{3}\cdot b^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{3}\cdot a^{\frac{3}{2}}.$$

Последнее выражение представляет собою простую разность между значениями функции, получающейся в результате интегрирования, взятыми в начале и в конце рассматриваемого интервала.

Символ

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

применяется для обозначения разности между значениями функции, получившимися в результате интегрирования, взятыми при $x=b$ и при $x=a$. Этот символ называется *определенным интегралом от a до b*, в то время как a и b называются *пределами интегрирования*.

Указанная разность также пишется еще и в таком виде:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_2^4 2\sqrt{x}\,dx = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_2^4.$$

Так как интегралы, выражающие площади, объемы, работу и т. п., все имеют одну и ту же форму, то формула определенного интеграла может быть применена ко всем им.

[595] $$\begin{cases} V = \int_a^b A\,dx \\ W = \int_a^b F\,dx. \end{cases}$$

1012. Среднее значение функции $f(x)$ выражается средней величиной ординаты, т. е.

$$\underset{(\text{от } x=a \text{ до } x=b)}{\text{среднее значение функции } f(x)} = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}.$$

Так как

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{площадь } APQE,$$

то если мы строим прямоугольник $ACBE$, равновеликий площади $APQE$, на основании AE, равном $(b-a)$:

$$\text{среднее значение} = \frac{\text{площадь } ACBE}{(b-a)} = \frac{AE \cdot FD}{AE} = FD \text{ (рис. 603)}.$$

1013. Определение среднего значения ординаты графическим способом. Положим, что дана кривая и что мы желаем найти среднее значение ординаты между $x=a$ и $x=b$ посредством графического способа (рис. 604).

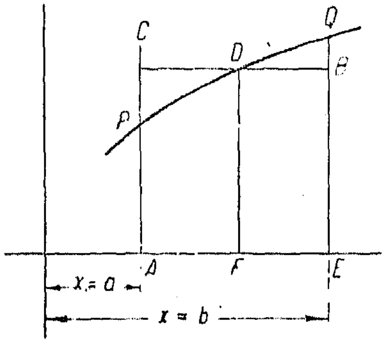


Рис. 603.

Проинтегрируем обыкновенным графическим путем и получим C единиц, измеряющих искомую площадь. Отложим отрезок C единиц от точки a в горизонтальном направлении. Среднее значение ординаты есть $\frac{C}{b-a}$. Для его определения построим в точке A ординату, равную единице, и проведем прямую aBD до пересечения с перпендикуляром ED, который и дает искомое среднее значение ординаты.

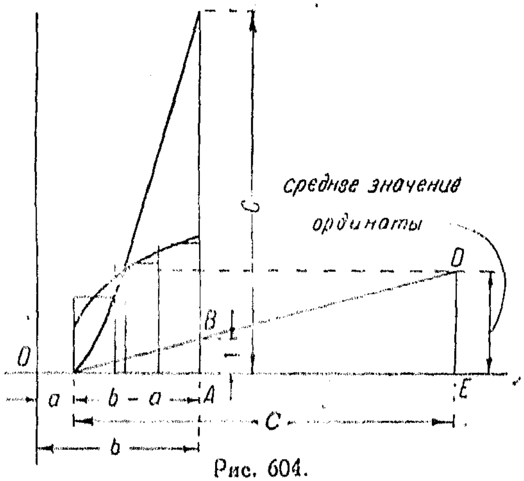


Рис. 604.

Доказательство. Из подобных треугольников:

$$\text{среднее значение ординаты}: C = 1 : (b-a), \text{ откуда}$$

$$\text{среднее значение ординаты} = \frac{C}{b-a}.$$

1014. Перестановка пределов. Так как

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x) = \int f(x)\cdot dx$, а

$$\int_b^a f(x)\cdot dx = F(a) - F(b),$$

то

[596] $$\int_a^b (x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

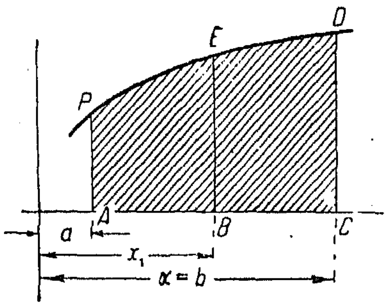


Рис. 605.

Перестановка пределов равносильна изменению знака определенного интеграла.

1015. Разбивка пределов интегрирования. Если

$$\int_a^{x_1} f(x)\,dx = F(x_1) - F(a)$$

и

$$\int_{x_1}^b f(x)\,dx = F(b) - F(x_1),$$

то, складывая эти два интеграла, получим:

$$\int_a^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Но

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

следовательно

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^b f(x)\,dx,$$

на рис. 605:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{площадь } APDC$$

$$\int_a^{x_1} f(x)\,dx = \text{площадь } APEB$$

$$\int_{x_1}^b f(x)\,dx = \text{площадь } BEDC.$$

1016. Площадь в параметрической форме. Пусть даны уравнения

$$x = f(t),\ y = \varphi(t).$$

Тогда

$$dx = f'(t)\cdot dt.$$

Подстановка последних выражений в $\int y\cdot dx$ дает

[597] $$A = \int \varphi(t)\cdot f'(t)\cdot dt.$$

Пример. Найти площадь эллипса из уравнений

$$x = a\cdot\cos\varphi,\ y = b\cdot\sin\varphi.$$

$$dx = -a\cdot\sin\varphi\cdot d\varphi.$$

При $x = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$; при $x = a$, $\varphi = 0$.

Тогда

$$A = \int_0^a y\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 [b\sin\varphi(-a\sin\varphi)\,d\varphi] =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} ab\sin^2\varphi\cdot d\varphi = \frac{\pi ab}{4} =$$

$=$ площадь одного квадранта.

Вся площадь $= 4\times\frac{\pi ab}{4} = \pi ab.$

Глава LIV.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПОСРЕДСТВОМ ПРИВЕДЕНИЯ.

1017. Элементарные приемы. Приступая к интегрированию функции, следует выяснить, находится ли она в наиболее удобном для этой цели виде. Если указанная функция есть сумма нескольких членов, следует интегрировать каждый член отдельно. Если функция заключает в себе произведение или степень, то часто самое лучшее выполнить соответствующие действия прежде, чем начать интегрирование. Дроби иногда бывает возможно превратить в целые величины, выполнив соответствующее деление. Иногда бывает весьма удобно написать их в виде отрицательных степеней. Радикалы следует рассматривать как дробные степени.

Чтобы проверить результат интегрирования, нужно просто продифференцировать этот результат, а затем полученную функцию сравнить с подинтегральной функцией. Обе они должны быть совершенно одинаковы.

Пример. Проинтегрировать

$$\int x\sqrt{x^2+a^2}\;dx=\frac{1}{2}\int 2x\sqrt{x^2+a^2}\;dx=\frac{1}{2}\int (x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x\,dx.$$

Но $2x$ есть производная от (x^2+a^2).

Тогда, полагая, что $(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}+1}$ есть интеграл, дифференцируя, получаем

$$\frac{3}{2}(x^2+a^2)\cdot 2x\,dx.$$

Это выражение в три раза больше того, которое мы интегрировали, а искомая функция

$$\frac{1}{3}(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}+C.$$

1018. Простейшие преобразования при интегрировании. Обыкновенно бывает легче интегрировать, если в интегрируемом выражении предварительно произвести возвышение в степень, а затем раскрыть скобки.

Пример. Найти $\int (a^2+x^2)^3dx$.

$$\int (a^2+x^2)^3dx=\int (a^6+3a^4x^2+3a^2x^4+x^6)\,dx=$$

$$\int a^6dx+\int 3a^4x^2dx+\int 3a^2x^4dx+\int x^6dx=$$

$$=a^6x+a^4x^3+\frac{3}{5}a^2x^5+\frac{1}{7}x^7+C.$$

1019. Основные формулы интегрирования. Так как интегрирование — действие, обратное дифференцированию, то мы можем сразу составить таблицу формул интегралов некоторых выражений, которые мы изучили при их дифференцировании. Кроме того, мы выведем допольнительно ещё и другие формулы, пользуясь имеющимися у нас сведениями. Если появляется сомнение в правильности результата, продифференцируйте его и посмотрите, получится ли при этом первоначальная функция:

[598] $$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

[599] $$\int \frac{du}{u} = \lg_e u + C$$

[600] $$\int a^u du = \frac{a^u}{\lg_e a} + C$$

[601] $$\int e^u du = e^u + C$$

[602] $$\int \cos u \quad u = \sin u + C$$

[603] $$\int \sin u\, du = -\cos u + C$$

[604] $$\int \sec^2 u\, du = \operatorname{tg} u + C$$

[605] $$\int \operatorname{cosec}^2 u\, du = -\operatorname{ctg} u + C$$

[606] $$\int \sec u \cdot \operatorname{tg} u\, du = \sec u + C$$

[607] $$\int \operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{ctg} u\, du = -\operatorname{cosec} u + C$$

[608] $$\int \operatorname{tg} u\, du = \lg(\sec u) + C$$

[609] $$\int \operatorname{ctg} u\, du = \lg(\sin u) + C$$

[610] $$\int \sec u\, du = \lg(\sec u + \operatorname{tg} u) + C = \lg\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right)\right] + C$$

[611] $\int \operatorname{cosec} u \cdot du = \lg(\operatorname{cosec} u - \operatorname{ctg} u) + C = \lg\left[\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}\right)\right] + C$

[612] $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C = -\arccos\frac{u}{a} + C$

[613] $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arc\,ctg}\frac{u}{a} + C$

[614] $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,sec}\frac{u}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arc\,cosec}\frac{u}{a} + C$

[615] $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\lg\left(\frac{u-a}{u+a}\right) + C = \frac{1}{2a}\lg\left(\frac{a-u}{a+u}\right) + C.$

[616] $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \lg(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}) + C$

1020. Интегрирование посредством введения новых переменных. Дано для интегрирования

$$\int f(x)\,dx.$$

Положим, соответствующая функция, получающаяся в результате интегрирования, есть $F(x)$; т. е.

$$\int f(x)\,dx = F(x) \tag{1}$$

или

$$f(x) = \frac{d}{dx}[F(x)]. \tag{2}$$

Пусть

$$x = \varphi(u), \tag{3}$$

т. е. x есть некоторая функция u.

Тогда $f(x)$ и $F(x)$ являются функциями u и мы имеем функцию от функции. Из дифференциального исчисления известно

$$\frac{d[F(x)]}{du} = \frac{d[F(x)]}{dx}\,\frac{dx}{du}. \tag{4}$$

Но из равенства (2),

$$\frac{[F(x)]}{dx} = f(x).$$

Подставив это выражение в (4), получим:

$$\frac{d[F(x)]}{du}=f(x)\frac{dx}{du}.$$

Интегрирование по u дает

[617] $$F(x)=\int f(x)\frac{dx}{du}\,du. \qquad (5)$$

Но из равенства (1)

$$F(x)=\int f(x)\,dx.$$

Подставляя это выражение в (5), получаем

[618] $$\int f(x)\,dx=\int f(x)\frac{dx}{du}\,du.$$

Подстановка вместо x его значения, выраженного через u, в ур-ние (3), с последующим затем упрощением обыкновенно дает весьма удобную для интегрирования формулу.

Пример. Найти $\int (a+bx)^n dx$.

Пусть $a+bx=u$. Тогда

$$x=\frac{u-a}{b};\quad \frac{dx}{du}=\frac{1}{b}.$$

Откуда согласно [618] следует:

$$\int (a+bx)^n dx=\int u^n\frac{dx}{du}\,du=\frac{1}{b}\int u^n du=\frac{u^{n+1}}{b\,(n+1)}+C.$$

Подставив вместо u его значение, выраженное через x, получим:

$$\int (a+bx)^n dx=\frac{(a+bx)^{n+1}}{b\,(n+1)}+C.$$

Посредством этой формулы можно сразу интегрировать любую функцию вида $(a+bx)^n$ при каких угодно значениях n.

$$\int (a+bx)\,dx=\frac{(a+bx)^2}{2b}+C$$

$$\int (a+bx)^2 dx=\frac{(a+bx)^3}{3b}+C$$

$$\int (a+bx)^3\ dx = \frac{(a+bx)^4}{4b} + C$$

$$\int \frac{dx}{(a+bx)^2} = \int (a+bx)^{-2} dx = \frac{(a+bx)^{-1}}{-b} + C =$$

$$= -\frac{1}{b(a+bx)} + C$$

$$\int \frac{dx}{(a+bx)^3} = \int (a+bx)^{-3} dx = -\frac{1}{2b\ (a+bx)^2} + C.$$

С интегралом $\int (a-bx)^n dx$ можно поступать точно таким же образом, подставив $a-bx=u$, тогда получим:

$$\int (a-bx)^n dx = -\frac{(a-bx)^{n+1}}{b\ (n+1)} + C$$

$$\int (a-bx)\ dx = -\frac{(a-bx)^2}{2b} + C$$

$$\int (a-bx)^2 dx = -\frac{(a-bx)^3}{3b} + C$$

$$\int \frac{dx}{(a-bx)^2} = -\frac{(a-bx)^{-1}}{-b} + C = \frac{1}{b\ (a-bx)} + C$$

$$\int \frac{dx}{(a-bx)^3} = -\frac{(a-bx)^{-2}}{-2b} + C = \frac{1}{2b\ (a-bx)^2} + C.$$

Исключение из этого правила получается при $n=-1$, когда интеграл в обоих рассмотренных случаях приводится к логарифмической форме.

Дано $\int \frac{dx}{a+bx}$.

Положим $a+bx=u$. Тогда

$$x = \frac{u-a}{b} \text{ и } \frac{dx}{du} = \frac{1}{b}.$$

Подставив последние выражения в данное, получим:

$$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{b} \lg u + C = \frac{1}{b} \lg (a+bx) + C.$$

Тем же самым путем рассмотрим $\int \frac{A\,dx}{a+bx}$.

Положим $a+bx=u$. Тогда

$$x=\frac{u-a}{b} \text{ и } \frac{dx}{du}=\frac{1}{b}.$$

Подставив последние выражения в данное, получим:

$$\int\frac{A\,dx}{a+bx}=\frac{A}{b}\int\frac{du}{u}=\frac{A}{b}\lg u+C=\frac{A}{b}\lg\,(a+bx)+C.$$

Пример 1. Определите $\int e^{nx}dx$.

Пусть $nx=u$. Тогда

$$x=\frac{u}{n} \text{ и } \frac{dx}{du}=\frac{1}{n}$$

Согласно [618]

$$\int e^{nx}dx=\int e^{u}\frac{1}{n}\,du=\frac{1}{n}\int e^{u}du=\frac{1}{n}\cdot e^{u}=\frac{1}{n}e^{nx}+C.$$

Из этого выражения следует, что интеграл

$$\int e^{3x}dx=\frac{1}{3}e^{3x}+C.$$

Пример 2. Найдите $\int \operatorname{tg} x\,dx$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx.$$

Положим $\cos x=u$. Тогда $x=\arccos u$, откуда

$$\frac{dx}{du}=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}=-\frac{1}{\sin x}.$$

Тогда

$$\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}\left(-\frac{1}{\sin x}\right)du=-\int\frac{du}{\cos x}=-\int\frac{du}{u}=-\lg u+C.$$

Следовательно

$$\int \operatorname{tg}\,x\,dx=-\lg\,(\cos x)+C=\lg\frac{1}{\cos x}+C.$$

Таким же образом

$$\int \operatorname{ctg}\,x\,dx=\lg\,(\sin x)+C$$

Пример 3. Дано $\int (x^2 - 5x)(2x - 5)\,dx$.

Положим $x^2 - 5x = u$. Тогда $(2x - 5)\,dx = du$

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{2x - 5}$$

$$\int (x^2 - 5x)\,(2x - 5)\,dx = \int \frac{(x^2 - 5x)\,(2x - 5)}{(2x - 5)}\,du =$$

$$= \int u \cdot du = \frac{u^2}{2} + C.$$

Так как $u = x^2 - 5x$, то

$$\int (x^2 - 5x)\,(2x - 5)\,dx = \frac{1}{2}(x^2 - 5x)^2 + C.$$

Пример 4. Дано $\int e^x \cos e^x dx$.

Положим $e^x = u$

$$x \cdot \lg e = \lg u$$

$$x = \frac{\lg u}{\lg e} = \lg u \quad \text{и} \quad \frac{dx}{du} = \frac{1}{u} = \frac{1}{e^x}$$

$$\int e^x \cos e^x dx = \int e^x \cos e^x \frac{1}{e^x}\,du = \int \cos e^x\,du = \int \cos u\,du = \sin e^x + C.$$

1021. Интегрирование по частям. Из дифференцирования произведения известно, что

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}.$$

Тогда при интегрировании получаем выражение

$$uv = \int v\frac{du}{dx}\,dx + \int u\frac{dv}{dx}\,dx,$$

которое является обратным написанной выше дифференциальной формуле.

Написав последнее выражение в измененном виде, получим формулу, весьма полезную для интегрирования:

[619] $$\int u\frac{dv}{dx}\,dx = uv - \int v\frac{du}{dx}\,dx.$$

Для применения этой формулы необходимо определить функции u и v таким образом, чтобы произведение $u\,\dfrac{dv}{dx}$ равнялось бы функции, данной для интегрирования, т. е. чтобы

$$u\frac{dv}{dx}=f\ (x).$$

Если указанную формулу написать с помощью дифференциалов, то получится такое выражение:

[620] $$\int u\,dv=uv-\int v\,du\,.$$

Если интегрируемая величина разделяется на два множителя u и dv, то интеграл можно найти при помощи формулы [620].

Пример 1. Найти $\int x\lg x\,dx$.

Пусть $\lg x=u$, тогда $du=\frac{1}{x}\cdot dx$.

Пусть $x\,dx=dv$, тогда $v=\frac{x^2}{2}$.

Подставляем эти значения в формулу

$$\int x\cdot\lg x\,dx=\frac{x^2}{2}\lg x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx=\frac{x^2}{2}\cdot\lg x-\frac{1}{2}\int x\,dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\lg x-\frac{1}{4}x^2+C\,.$$

Для пояснения напишем равенство

$$\underset{(u)\,(dv)}{\int \lg x\,xdx}=\underset{(u)\ \ (v)}{\lg x\cdot\frac{x^2}{2}}-\underset{(v)\ \ (du)}{\int\frac{x^2}{2}\,\frac{1}{x}\,dx}.$$

Пример 2. Найти $\int\sin^2 x\,dx$.

Пусть $u=\sin x$, тогда $du=\cos x\,dx$.
Пусть $dv=\sin x\,dx$, тогда $v=-\cos x$.
Подставляя в формулу для интегрирования по частям, получим

$$\int\sin^2 x\,dx=-\sin x\cos x+\int\cos^2 x\,dx\,. \tag{1}$$

Но $\cos^2 x=1-\sin^2 x$. Следовательно

$$\int\cos^2 x\,dx=\int dx-\int\sin^2 x\,dx=x-\int\sin^2 x\,dx \tag{2}$$

Подставив (2) в (1), получим:

$$\int \sin^2 x\, dx = -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x\, dx$$

Перенесем $\int \sin^2 x\, dx$ в лёвую часть равенства:

$$2\int \sin^2 x\, dx = x - \sin x \cdot \cos x + C,$$

откуда

$$\int \sin^2 x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin x \cdot \cos x}{2} + C.$$

Пример 3. Найти $\int e^{ax} \sin nx\, dx$ и $\int e^{ax} \cos nx\, dx$.

Пусть $u = \sin nx$, тогда $du = n \cos nx dx$

Пусть $dv = e^{ax}$, тогда $v = \frac{e^{ax}}{a}$

Подставив в

$$\int e^{ax} \sin nx\, dx = uv - \int v\, du,$$

получим

$$\int e^{ax} \sin nx\, dx = \frac{e^{ax}}{a} \cdot \sin nx - \int \frac{e^{ax}}{a} n \cos nx dx.$$

Вторичное интегрирование по частям,

$$u = \cos nx;\ du = -n \sin nx\, dx$$

$$dv = e^{ax}dx;\ v = \frac{e^{ax}}{a},$$

дает

$$\frac{n}{a}\int e^{ax}\cos nx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2} n \cos nx + \int \frac{e^{ax}}{a^2} n^2 \sin nx\, dx$$

Поэтому

$$\int e^{ax} \sin\, dx = \frac{e^{ax}}{a} \sin nx - \frac{e^{ax}}{a^2} n \cos nx - \frac{n^2}{a^2}\int e^{ax} \cdot \sin nx\, dx.$$

Последний член правой части этого равенства равен левой части его, умноженной на $\frac{n^2}{a^2}$. Поэтому, перенеся этот член в левую часть, получим

$$\frac{n^2 + a^2}{a}\int e^{ax} \cdot \sin nx\, dx = \frac{e^{ax}}{a} \sin nx - \frac{e^{ax}}{a^2} n \cos nx + C =$$

$$= \frac{e^{ax}}{a^2}(a \sin nx - n \cos nx) + C.$$

Следовательно

$$\int e^{ax} \sin nx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + n^2}(a \sin nx - n \cos nx) + C.$$

Таким же образом

$$\int e^{ax} \cos nx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + n^2}(n \sin nx + a \cos nx) + C.$$

1022. Интегрирование посредством преобразования функции в известную интегрируемую форму. Часто бывает, что данная для интегрирования функция может быть преобразована в обычную легко интегрируемую форму.

Пример 1. Найти $\int \frac{x^2 - 1}{x} dx.$

$$\int \frac{x^2 - 1}{x} dx = \int \left(x - \frac{1}{x}\right) dx = \int x\, dx - \int \frac{1}{x}\, dx = \frac{x^2}{2} - \lg x + C.$$

Пример 2. Если $\frac{dy}{dx} = x$ или иначе $dy = x\, dx$, то

$$y = \int x\, dx = \frac{1}{2}\int 2x\, dx = \frac{x^2}{2} + C.$$

Пример 3. Если $dy = x\sqrt{1 - x^2}\, dx$, то

$$y = \int x\sqrt{1 - x^2}\, dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \int \frac{3}{2}(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}(-2x)\, dx =$$

$$= -\frac{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + C.$$

Этот результат можно получить, представив взятый интеграл в виде

$$\int u^n \cdot du,$$

где $(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} = u, (-2x\, dx) = du$, так как

$$d(1 - x^2) = -2x\, dx.$$

Посредством таких преобразований был получен указанный выше интеграл.

1023. Интегрирование функции при помощи приведения ее к известной интегрируемой форме. Если интегрируемая функция может быть непосредственно разбита на два сомножителя, один из которых есть производная другого, то данный интеграл равен половине квадрата второго сомножителя, так как

[621] $$\int u \frac{du}{dx} dx = \frac{u^2}{2} + C.$$

Пример 1. Найти $\int (x^3 + 2x)(3x^2 + 2)\, dx$.

Выражение $(3x^2 + 2)\, dx$ есть дифференциал от $(x^3 + 2x)$. Поэтому данный интеграл есть

$$\frac{u^2}{2} \text{ или } \frac{(x^3 + 2x)^2}{2},$$

т. е.

$$\int (x^3 + 2x)(3x^2 + 2) dx = \frac{(x^3 + 2x)^2}{2} + C.$$

Пример 2. Найти $\int \sin x \cos x\, dx$.

$\cos x$ есть производная от $\sin x$ и поэтому интегрируемая функция получит вид

$$\int u \frac{du}{dx} dx = \frac{u^2}{2} + C.$$

Тогда

$$\int \sin x \cdot \cos x\, dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

Более общая формула для этого соотношения

$$\int u^n \frac{du}{dx} dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C.$$

Пример 3. Найти $\int x (a^2 + x^2)^{\frac{5}{2}} dx$.

Положим $a^2 + x^2 = u$ и $du = 2x\, dx$. Тогда

$$\frac{1}{2}\int 2x\, (a^2 + x^2)^{\frac{5}{2}} dx = \frac{1}{2}\int u^{\frac{5}{2}} du = \frac{1}{2}\int u^{\frac{5}{2}} \frac{du}{dx} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}\right) = \frac{u^{\frac{7}{2}}}{7} = \frac{(a^2 + x^2)^{\frac{7}{2}}}{7} + C.$$

Значение многих интегралов может быть определено сразу из правил дифференциального исчисления, ибо интегрирование есть действие, обратное дифференцированию. Если требуется проинтегрировать функцию, следует прежде всего попытаться привести ее к такому виду, который представляет собою легко находимый дифференциал некоторой известной функции. Если этот способ не приводит к решению, то для нахождения интеграла надо испытать другие схемы.

Ниже приведены основные формулы интегрирования, с которыми можно сравнивать ту или иную данную функцию:

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \text{ (если } n \neq -1). \qquad (1)$$

Пример 1. Найти $\int x^{\frac{1}{2}}\,dx$.

$$\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C.$$

Пример 2. Найти $\int x^{-1{,}63}\cdot dx$.

$$\int x^{-1{,}63}\,dx = -\frac{x^{-0{,}63}}{0{,}63} + C.$$

Случаи (2), (3) и (4), приведенные ниже, представляют собою специальные формы интеграла $\int u^n du$.

$$\int (ax^m + b)^n x^{m-1}\,dx = \frac{1}{m(n+1)a}(ax^m + b)^{n+1} + C. \qquad (2)$$

Примеры на эту формулу: $\int \sqrt{x^4 + 63}\,x^3 dx$; $\int (2x^2+5)^5 x\cdot dx$; $\int \frac{x}{x^2+25}\,dx$.

$$\int \sin^n x\cos x\,dx = \frac{1}{n+1}\sin^{n+1}x + C. \qquad (3)$$

Пример на эту формулу: $\int \sin^3 x\cos x\,dx$.

$$\int \cos^n x\sin x\,dx = -\frac{1}{n+1}\cos^{n+1}x + C. \qquad (4)$$

Примеры на эту формулу:

$$\int \cos^8 x\sin x\,dx$$

или

$$\int \frac{\sin x\, dx}{\cos^2 x},$$

который можно представить так:

$$\int \sin x \cdot \cos^{-2} x\, dx.$$

1024. Приведение интегрируемой функции к логарифмической форме, непосредственно вытекающее из вида функции. Если интегрируемая функция может быть написана в виде дроби, числитель которой есть производная знаменателя, то данный интеграл есть логарифм этого знаменателя, ибо

$$\int \frac{\frac{du}{dx}}{u}\, dx = \lg u + C.$$

Пример 1. Найти $\int \frac{e^x}{e^x + 5}\, dx.$

Производная от $(e^x + 5)$ есть e^x. Поэтому

$$\int \frac{e^x\, dx}{e^x + 5} = \lg (e^x + 5) + C.$$

Пример 2. Найти $\int \frac{2x}{5 + x^2}\, dx.$

Производная от $(5 + x^2)$ есть $2x$; поэтому

$$\int \frac{2x}{5 + x^2}\, dx = \lg (5 + x^2) + C.$$

Пример 3. Найти $\int \frac{3x^2 - 5}{x^3 - 5x}\, dx.$

Производная от $(x^3 - 5x)$ есть $(3x^2 - 5)$; поэтому

$$\int \frac{3x^2 - 5}{x^3 - 5x}\, dx = \lg (x^3 - 5x) + C.$$

Из предыдущего можно вывести заключение, что успех при интегрировании функции зависит от правильно выраженной схемы приведения данной функции к некоторой известной форме, которая может быть легко найдена как дифференциал известного интеграла. Испытывая разные преобразования, можно найти такое, которое соответствует данной функции, приводя ее к известному интегралу.

1025. Логарифмическая форма $\displaystyle\int \frac{\frac{du}{dx}}{u}\,dx$ **или**

[622] $$\int \frac{du}{u}.$$

$$\int \frac{du}{u} = \lg u = C. \tag{5}$$

Так, например, $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2}\,dx = \lg x^2 + C \quad [d(x^2) = 2x\,dx]$.

Специальные логарифмические формы:

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{ax^m + b} = \frac{1}{ma}\lg(ax^m + b) + C. \tag{6}$$

Например $\displaystyle\int \frac{x^3 \cdot dx}{3x^4 - 5} = \frac{1}{3 \cdot 4}\lg(3x^4 - 5) + C.$

$$\int \operatorname{ctg} ax\,dx = \int \frac{\cos ax}{\sin ax}\,dx = \frac{1}{a}\lg \sin ax + C \tag{7}$$

$$\int \operatorname{tg} ax\,dx = \int \frac{\sin ax}{\cos ax}\,dx = -\frac{1}{a}\lg \cos ax + C \tag{8}$$

$$\int \sec ax\,dx = \int \frac{(\sec^2 ax + \sec ax \cdot \operatorname{tg} ax)}{\sec ax + \operatorname{tg} ax}\,dx = \tag{9}$$

$$= \frac{1}{a}\lg(\sec ax + \operatorname{tg} ax) + C$$

$$\int \operatorname{cosec} ax\,dx = \frac{1}{a}\lg(\operatorname{cosec} ax - \operatorname{ctg} ax) + C. \tag{10}$$

1026. Форма $\int x^m (a + bx^n)^p \cdot dx$. Дифференциальные биномы вида

[623] $$\int x^m (a + bx^n)^p \cdot dx$$

также интегрируются посредством формулы для интегрирования по частям. Ниже даются четыре главные формулы приведения. Эти формулы приводят данное выражение к более простому виду, т. е. к более удобному значению для m или p:

$$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{(np+m+1)b} - \tag{1}$$
$$-\frac{(m-n+1)a}{(np+m+1)b}\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\,dx\,[1].$$

---

[1]) Формула (1) выводится следующим образом. Интегрируя по частям, получим

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{n(p+1)b} -$$
$$-\frac{m-n+1}{n(p+1)b}\int x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}\,dx = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{n(p+1)b} -$$
$$-\frac{m-n+1}{n(p+1)b}\,a\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\,dx -$$
$$-\frac{m-n+1}{n(p+1)}\int x^m(a+bx^n)^p\,dx.$$

Перенося последний интеграл из правой части равенства в левую, получим

$$\frac{m+np+1}{n(p+1)}\int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{n(p+1)b} -$$
$$-\frac{m-n+1}{n(p+1)b}\cdot a\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\,dx.$$

Деля на коэффициент при интеграле, входящем в левую часть равенства, получим формулу (1).

Прим. ред.

Эта формула уменьшает показатель степени m на n, но она неприменима, если $np+m+1=0$.

$$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{np+m+1} + \tag{2}$$

$$+\frac{anp}{np+m+1}\int x^m (a+bx^n)^{p-1}\,dx\ [1].$$

Эта формула уменьшает показатель степени p на единицу, но она неприменима, если $np+m+1=0$.

$$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{(m+1)a} - \tag{3}$$

$$-\frac{(np+n+m+1)b}{(m+1)a}\int x^{m+n}(a+bx^n)^p\,dx\ [2].$$

---

[1]) Вывод формулы (2).

Интегрируя по частям, находим:

$$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1} -$$

$$-\frac{npb}{m+1}\int x^{m+n}\cdot(a+bx^n)^{p-1}\,dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1} +$$

$$+\frac{npa}{m+1}\int x^m (a+bx^n)^{p-1}dx - \frac{np}{m+1}\int x^m\ (a+bx^n)^p\,dx.$$

Перенесем последний интеграл в левую часть равенства. Получим

$$\frac{np+m+1}{m+1}\int x^m\ (a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1} +$$

$$+\frac{npa}{m+1}\int x^m\ (a+bx^n)^{p-1}\,dx.$$

Разделив на коэффициент при интеграле в левой части равенства, получим формулу (2). *Прим. ред.*

[2]) Вывод формулы (3).

Заменим в равенстве (1) m на $m+n$. Получаем

$$\int x^{m+n}(a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{(np+n+m+1)b} -$$

$$-\frac{(m+1)a}{(np+n+m+1)b}\int x^m (a+bx^n)^p\,dx.$$

Перемещая оба интеграла из одной части равенства в другую и деля на коэффициент при интеграле, стоящем в правой части равенства, получим формулу (3). *Прим. ред.*

Эта формула увеличивает показатель степени m на n; она весьма полезна при отрицательном m, но неприменима, если $m+1=0$.

$$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx = -\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{n(p+1)a} + \tag{4}$$

$$+\frac{np+n+m+1}{n(p+1)a}\int x^m (a+bx^n)^{p+1}\,dx\ ^{1)}.$$

Эта формула увеличивает показатель степени p на единицу. Она неприменима, если $p+1=0$.

Пример. Найти $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

Применяя формулу (1), приведем данный интеграл к $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, который решается сразу.

$$\int \frac{x^2\cdot dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int x^2(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx.$$

В этом случае $m=2$, $n=2$, $p=-\frac{1}{2}$, $b=-1$ и a заменяется a^2.

Следовательно

$$\int x^2(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx = -\frac{x(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{2}+\frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} =$$

$$= \frac{-x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

1027. Тригонометрические формулы приведения. Приводимые ниже формулы получаются при помощи интегриро-

---

1) Вывод формулы (4).

Заменим в формуле (2) величину p на $p+1$. Получаем

$$\int x^m(a+bx^n)^{p+1}\,dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{np+n+m+1}+$$

$$+\frac{an(p+1)}{np+n+m+1}\int x^m(a+bx^n)^p\,dx.$$

Перенеся первый член из правой части равенства в левую и разделив на коэффициент при интеграле, стоящем в левой части, получим формулу (4).

Прим. ред.

вания по частям. Эти формулы значительно экономят время [1]).

---

[1]) Интегрируя по частям, находим

$$(*)\qquad \int \sin^m x\cos^n x\,dx = -\frac{\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2}x\cos^{n+2}x\,dx.$$

Преобразуем интеграл, входящий в правую часть равенства. Получаем

$$\int \sin^m x\cos^n x\,dx = -\frac{\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2}x\cos^n x\,dx - \frac{m-1}{n+1}\int \sin^m x\cos^n x\,dx.$$

Перенося последний интеграл из правой части равенства в левую и разделив на коэффициент, получившийся при интеграле в левой части равенства, придем к формуле [626]. Заметим, что формула [626] неприменима, если $m = -n$.

Интегрируя по частям, можно получить для того же интеграла

$$\int \sin^m x\cos^n x\,dx$$

иное выражение

$$(**)\qquad \int \sin^m x\cos^n x\,dx = \frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^{m+2}x\cos^{n-2}x\,dx.$$

Преобразуя интеграл во второй части равенства (**), имеем

$$\int \sin^m x\cos^n x\,dx = \frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^m x\cos^{n-2}x\,dx - \frac{n-1}{m+1}\int \sin^m x\cos^n x\,dx.$$

Перенося последний интеграл из правой части равенства (**) в левую и разделив на коэффициент, получившийся при интеграле в левой части равенства, получим формулу [627].

Формула [627] отпадает, если $m = -n$.

Заменяем в равенстве [626] m на $m+2$. Имеем

$$\int \frac{\cos^n x}{\sin^{m-2}x}\,dx = -\frac{\cos^{n+1}x}{(n-m+2)\sin^{m-1}x} + \frac{-m+1}{n-m+2}\int \frac{\cos^n x}{\sin^m x}\,dx.$$

[624] $$\int \operatorname{tg}^n x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx$$

[625] $$\int \operatorname{ctg}^n x\,dx = -\frac{\operatorname{ctg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{ctg}^{n-2} x\,dx$$

[626] $$\int \sin^m x \cos^n x\,dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} x \cos^n x\,dx$$

[627] $$\int \sin^m x \cos^n x\,dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x \cos^{n-2} x\,dx$$

[628] $$\int \frac{\cos^n x}{\sin^m x}\,dx = -\frac{\cos^{n+1} x}{(m-1)\sin^{m-1} x} - \frac{n-m+2}{m-1}\int \frac{\cos^n x\,dx}{\sin^{m-2} x}$$

Разделив на коэффициент при интеграле в правой части равенства и перенеся интегралы из одной части равенства в другую, придем к равенству [628].

Равенство [629] получается из равенства [627] заменой m на $-m$.

Равенства [630] и [632] получаются из равенств [626] и [628], если в последних положить $n=0$. Равенства [631] представляют собой частный случай равенства [627] при $m=0$.

Равенство [633] получается из равенства [627], если в нем взять $m=0$ и n земенить на $-n+2$.

$$\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x} = \frac{\sin x}{(-n+2)\cos^{n-1} x} + \frac{-n+1}{-n+2}\int \frac{dx}{\cos^n x}.$$

Перенеся первый член из правой части равенства в левую и разделив на коэффициент при последнем интеграле, получим равенство [633].

Положим в равенстве (*) $n=-m$. Находим

$$\int \operatorname{tg}^m x = \frac{\operatorname{tg}^{m-1} x}{m-1} - \int \operatorname{tg}^{m-2} x\,dx.$$

Это равенство есть не что иное как равенство [624].

Положим в равенстве (**) $m=-n$. Получим равенство [625].

Прим. ред.

[629] $$\int \frac{\cos^n x}{\sin^m x}\,dx = \frac{\cos^{n-1} x}{(n-m)\sin^{m-1} x} + \frac{n-1}{n-m}\int \frac{\cos^{n-2} x\,dx}{\sin^m x}$$

[630] $$\int \sin^m x\,dx = -\frac{\sin^{m-1} x\cos x}{m} + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2} x\,dx$$

[631] $$\int \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1} x\sin x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$$

[632] $$\int \frac{dx}{\sin^m x} = -\frac{\cos x}{(m-1)\sin^{m-1} x} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{dx}{\sin^{m-2} x}$$

[633] $$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}.$$

1028. Формулы $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ и $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx$.

Разделив числитель и знаменатель на a и составив в знаменателе полный квадрат, приведем первое из данных выражений к следующему виду:

$$\frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}}.$$

Положим $x + \frac{b}{2a} = u$; тогда $du = dx$ и

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{du}{u^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}}.$$

Если b^2-4ac отрицательно, то

[634] $$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}$$ [1])

Если b^2-4ac положительно, то

[635] $$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\lg\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}$$

Если $b^2-4ac=0$, то

[636] $$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=-\frac{2}{2ax+b}.$$

[637] Формула $\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx.$

Следующий пример разъясняет метод.

---

1) Если $b^2-4ac<0$, то, положив

$$u=\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}Z,$$

находим

$$\frac{1}{a}\int\frac{du}{u^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\frac{2a}{\sqrt{4ac-b^2}}\int\frac{dZ}{Z^2+1}=\frac{2a}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arctg}Z=$$

$$=\frac{2a}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{2au}{\sqrt{4ac-b^2}}+C.$$

Выражая u через x, получим формулу [634].
Если $b^2-4ac>0$, то

$$\frac{1}{a}\int\frac{du}{u^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{2\cdot\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)}\cdot\left\{\int\frac{du}{u-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}-\right.$$

$$\left.-\int\frac{du}{u+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}\right\}=\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\left\{\lg\left(u-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)-\right.$$

$$\left.-\lg\left(u+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right\}+C=\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\lg\frac{2au-\sqrt{b^2-4ac}}{2au+\sqrt{b^2-4ac}}+C.$$

Выражая u через x, получим равенство [635].

Прим. ред.

Пример. Найти $\int \frac{3x+5}{x^2+6x+11}\,dx$ $\int \frac{3x+5}{x^2+6x+11}\cdot dx =$

$$= \int \frac{3(x+3)-4}{(x+3)^2+2}\,dx = 3\int \frac{(x+3)\,dx}{(x+3)^2+2} - 4\int \frac{dx}{(x+3)^2+2}.$$

$$\frac{3}{2}\int \frac{2(x+3)\,dx}{(x+3)^2+2} = \frac{3}{2}\lg\,[(x+3)^2+2],$$

согласно формуле

$$\int \frac{du}{u} = \lg u\ [599].$$

Формула

$$-4\int \frac{dx}{(x+3)^2+2}$$

имеет вид

$$\int \frac{du}{a^2+u^2}\quad [613]$$

где $u = x+3$, $a = \sqrt{2}$ и $-4\frac{dx}{(x+3)^2+2} = -\frac{4}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{\sqrt{2}} + C.$

Следовательно

$$\int \frac{3x+5}{x^2+6x+11}\,dx = \frac{3}{2}\lg\,[(x+3)^2+2] - \frac{4}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{\sqrt{2}} + C.$$

1029. Интегралы, содержащие дробные степени x или двучлена $(a+bx)$. Если в выражении после знака интеграла находятся дробные степени двучлена вида $(a+bx)$, то следует вводить такое обозначение

$$a+bx = z^n,$$

где n — наименьший общий знаменатель показателей степени при $(a+bx)$.

Пример. Найти $\int \frac{(x+2)^{\frac{8}{4}}+4}{(x+2)^{\frac{1}{2}}-3}\,dx.$

Пусть $x+2 = z^4$. Тогда

$$\int \frac{(x+2)^{\frac{8}{4}}+4}{(x+2)^{\frac{1}{2}}-3}\,dx = 4\int \frac{(z^8+4)\,z^3}{z^2-3}\,dz.$$

Делим числитель на знаменатель, а затем интегрируем. После интегрирования заменяем z через $(x+2)^{\frac{1}{4}}$.

Точно таким же образом, в случае дробных степеней x, берем z в степени, которая равняется наименьшему общему знаменателю показателей степени при x.

Пример 2. Найти $\int \frac{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}} + 4} dx.$

Положим $x = z^6$; тогда $dx = 6z^5\,dz$ и

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}} + 4} dx = 6\int \frac{z^3 - z^2}{z^2 + 4} z^5\,dz = 6\int \frac{z^8 - z^7}{z^2 + 4} dz.$$

Делим числитель на знаменатель, как и в предыдущем примере, до тех пор, пока степень остатка не сделается достаточно малой, что можно было бы производить интегрирование, после которого заменяем z через $x^{\frac{1}{6}}$.

Этот случай получается как частный из предыдущего при условии $a = 0$, $b = 1$.

1030. Интегрирование посредством тригонометрических подстановок. Выражения, содержащие $\sqrt{a^2 - x^2}$ или $\sqrt{x^2 \pm a^2}$, могут быть заменены тригонометрическими величинами.

Если встречается $\sqrt{a^2 - x^2}$, полагаем $x = a \sin\varphi$.

» » $\sqrt{a^2 + x^2}$, » $x = a \operatorname{tg}\varphi$.

» » $\sqrt{x^2 - a^2}$, » $x = a \sec\varphi$.

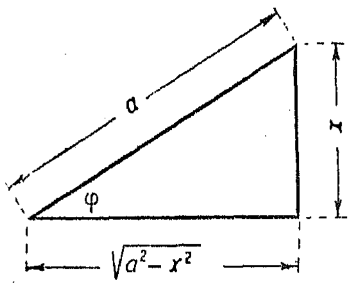


Рис. 606.

Тогда:

$\sqrt{a^2 - x^2}$ превращается в $a\cos\varphi$

$\sqrt{a^2 + x^2}$ » в $a\sec\varphi$

$\sqrt{x^2 - a^2}$ » в $a\operatorname{tg}\varphi$,

так как в прямоугольном треугольнике с катетом x, лежащим против угла φ, и с гипотенузой a

$$\sin\varphi = \frac{x}{a} \text{ и } \operatorname{tg}\varphi = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Другие функции угла φ можно также определить из треугольника, показанного на рис. 606.

Пример. Найти $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$.

Положим $x = a\sin\varphi$; тогда $dx = a\cos\varphi\,d\varphi$.

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx = \int a\cos\varphi \times a\cos\varphi\,d\varphi = \int a^2\cos^2\varphi\,d\varphi.$$

Интегрируем по частям. Из n° 1021

$$\int \cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi}{2} + C.$$

Тогда

$$\int a^2\cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{a^2}{2}\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right) + C$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \sin\varphi\cos\varphi\right) + C$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}\right] + C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

1031. Построение функций $\sqrt{a^2-x^2}$ или $\sqrt{x^2 \pm a^2}$. Исходя из соотношений, связывающих элементы треугольников,

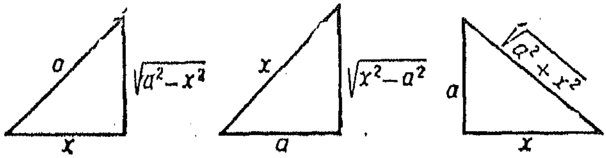


Рис. 607.

показанных на рис. 607, построим треугольники, в которых a имеет определенное значение, а x несколько значений. При этом значения функции

$$\sqrt{a^2-x^2} \text{ и } \sqrt{x^2 \pm a^2}$$

могут быть получены графическим путем и нанесены в виде ординат. Тогда можно весьма быстро построить и проинтегрировать данные функции графически.

Пример. Если $a = 6$ и мы желаем найти функцию $\sqrt{a^2+x^2}$, построим $OA = 6$. Проведем $OX \perp$ к OA и возьмем ряд значений $x: x = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots$

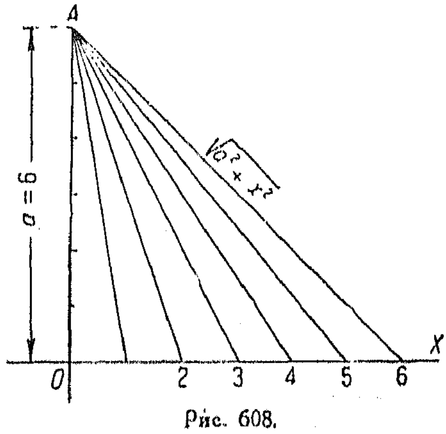


Рис. 608.

В этом случае длина гипотенузы дает значения функции $\sqrt{a^2+x^2}$ для каждого взятого значения x (рис. 608).

Поставим эти гипотенузы в положение ординат и проведем кривую через конечные их точки. Эта кривая представляет собою график функции $\sqrt{a^2+x^2}$ при $a=6$, т. е. график функции $\sqrt{36+x^2}$. Получившуюся кривую можно проинтегрировать графическим способом.

1032. Квадратные выражения. Если выражение ax^2+ $+bx+c$ находится под знаком радикала, то путем добавления к нему членов до полного квадрата его можно привести к двучленной форме, имеющей вид $a\,(t^2+k)$. Это выражение может быть проинтегрировано посредством тригонометрической подстановки, как то было изложено в n⁰ 1030.

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x^2+\frac{b}{a}\,x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right].$$

Правая часть этого равенства представлена в двучленной форме. Положим

$$x+\frac{b}{2a}=t.$$

Если многочлен 2-ой степени не находится под знаком радикала, то его можно интегрировать как двучлен.

1033. Интегрирование рациональных дробей. Рациональная дробь, зависящая от x, представляет собою такую дробь, числитель и знаменатель которой являются многочленами, зависящими от x. Если степень числителя равна или больше степени знаменателя, то такую дробь следует упростить, разделив числитель на знаменатель.

Пример. Найти $\displaystyle\int\frac{x^4+3x^3}{x^2+2x+1}\,dx$.

$$\frac{x^4+3x^3}{x^2+2x+1}=x^2+x-3+\frac{5x+3}{x^2+2x+1}.$$

Тогда

$$\int\frac{(x^4+3x^3)\,dx}{x^2+2x+1}=\int x^2\,dx+\int x\,dx-\int 3\,dx+\int\frac{(5x+3)\,dx}{x^2+2x+1}.$$

Интегрирование последнего члена может быть произведено по способу, изложенному в n⁰ 1028 [637].

1034. Интегрирование посредством разложения данной дроби на простейшие. В отделе алгебры (n⁰ 499) было показано превращение данной дроби в сумму простейших дробей, знаменатели которых являлись сомножителями знаменателя данной дроби. Например (n^0 499)

$$\frac{5x^2-3x-24}{(x^2-1)(x+3)(x+4)}=\frac{x-2}{x^2-1}+\frac{3}{x+3}-\frac{4}{x+4}.$$

Если наша задача состоит в том, чтобы проинтегрировать эту дробь, то

$$\int\frac{5x^2-3x-24}{(x^2-1)(x+3)(x+4)}\,dx=\int\frac{x-2}{x^2-1}\,dx+\int\frac{3}{x+3}\,dx-$$

$$-\int\frac{4}{x+4}\,dx=$$

$$=\int\frac{x\,dx}{x^2-1}+\int\frac{-2dx}{x^2-1}+\int\frac{3}{x+3}\,dx-\int\frac{4}{x+4}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\lg(x^2-1)-\lg\frac{x-1}{x+1}+3\lg(x+3)-4\lg(x+4)+C.$$

Пример. Найти $\int\frac{(2x+3)}{x^3+x^2-2x}\,dx.$

Множителями знаменателя являются: x, $x-1$, $x+2$; составим равенство

$$\frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}.$$

Освобождаемся от знаменателей.

$$2x+3=A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1).$$

Приравнивая друг другу коэффициенты при одинаковых степенях и решая получившиеся при этом уравнения, получим

$$A=-\frac{3}{2};\ B=\frac{5}{3};\ C=-\frac{1}{6}.$$

Подставив эти значения, получим

$$\frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)}=-\frac{3}{2x}+\frac{5}{3(x-1)}-\frac{1}{6(x+2)}.$$

$$\int\frac{(2x+3)\,dx}{x(x-1)(x+2)}=-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x}+\frac{5}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x+2}=$$

$$=-\frac{3}{2}\lg x+\frac{5}{3}\lg(x-1)-\frac{1}{6}\lg(x+2)+C=\lg\frac{C'(x-1)^{\frac{5}{3}}}{x^{\frac{3}{2}}(x+2)^{\frac{1}{6}}}\ ^{1)}.$$

---

1) Переход к окончательному выражению получается при замене $C=\lg C'$.

Прим. ред.

1035. Последовательное интегрирование. В дифференциальном исчислении мы познакомились с применением последовательных производных высшего порядка, которые получаются посредством последовательного дифференцирования. При интегрировании мы имеем обратное действие.

Пример. Найдите y, если $\frac{d^3y}{dx^3} = 8x$. Тогда

$$\frac{d\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{dx} = 8x \text{ или } d\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 8x\,dx.$$

Интегрируя, получаем

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \int 8x\;dx = 4x^2 + C_1.$$

Но $\frac{d^2y}{dx^2}$ может быть написано также и в таком виде:

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}.$$

Тогда

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = 4x^2 + C_1 \text{ или } d\left(\frac{dy}{dx}\right) = (4x^2 + C_1)\,dx.$$

Интегрируя, получаем

$$\frac{dy}{dx} = \int (4x^2 + C_1)\,dx = \frac{4}{3}\,x^3 + C_1\,x + C_2,$$

откуда

$$dy = \left(\frac{4}{3}\,x^3 + C_1x + C_2\right)\,dx.$$

Интегрируем еще раз

$$y = \int \left(\frac{4}{3}\,x^3 + C_1x + C_2\right)\;dx = \frac{1}{3}\,x^4 + \frac{C_1\,x^2}{2} + C_2x + C_3.$$

Последний результат пишут также и в такой форме:

$$y = \int\int\int 8x\;dx\;dx\;dx.$$

В том случае, когда интегрирование производится два раза, пишут так:

$$y = \int\int f(x)\;dx\;dx.$$

Если пределы не указаны, то в таком случае интеграл является неопределенным.

Пример. Ускорение движущейся точки — величина постоянная и равная a. Найти выражение для пройденного пути s.

Ускорение $a = \frac{d^2s}{dt^2}$.

Тогда

$$\frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt} = a \text{ или } d\left(\frac{ds}{dt}\right) = a\,dt$$

$$\frac{ds}{dt} = \int a\,dt = at + C_1,$$

откуда

$$ds = (at + C_1)\,dt.$$

Повторив интегрирование, получим

$$s = \int (at + C_1)\,dt = \frac{a}{2}t^2 + C_1t + C_2.$$

Глава LV.

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ (МЕТОД СУММИРОВАНИЯ).

1036. Определенный интеграл как предел суммы. Пусть y представляет собою некоторую функцию, которая при непрерывном изменении x также изменяется непрерывным образом. Пусть кроме того $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ будут значения указанной функции в интервалах Δx_i (не обязательно равных между собою), рассматриваемых от $x = a$ до $x = b$ (рис. 609).

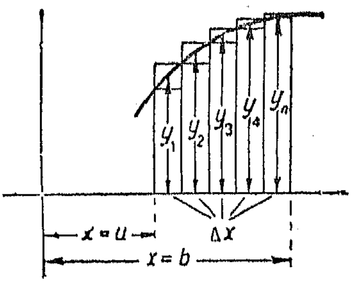


Рис. 609.

Умножим каждое из этих значений y_i на Δx_i, а затем составим сумму полученных при этом произведений. Эта сумма равна

$$y_1\Delta x_1 + y_2\Delta x_2 + y_3\Delta x_3 + \\ + y_4\Delta x_4 + \ldots + y_n\Delta x_n.$$

Будем теперь число полос, находящихся в промежутке от $x = a$ до $x = b$, увеличивать беспредельно таким путем, чтобы ширина каждой из этих полос Δx_i приближалась к 0. При этом указанная сумма будет стремиться к пределу, которым является интеграл

$$\int_a^b y \cdot dx,$$

или

$$[638] \quad \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ n \to \infty}} \left[y_1 \Delta x_1 + y_2 \Delta x_2 + y_3 \Delta x_3 + \ldots + y_n \Delta x_n \right] = \int_a^b y \, dx,$$

где Δx есть наибольшая из всех значений ширины полос Δx_i.

Иногда сумма членов, заключенная в квадратные скобки, сокращенно пишется в таком виде:

$$\sum_{i=1}^{h} f(x_i) \Delta x_i.$$

Члены $y_1 \Delta x_1$, $y_2 \Delta x_2$ и т. д. выражают площади прямоугольников. Легко заметить, что по мере того как число этих прямоугольников беспредельно увеличивать, сумма площадей их будет приближаться к площади, расположенной под данной кривой, как к своему предельному значению. В своем месте было доказано, что эта площадь представляет собою определенный интеграл; отсюда следует, что предельное значение суммы площадей указанных прямоугольников, при беспредельном увеличении числа их, представляет собою также определенный интеграл данной функции между пределами $x = a$ и $x = b$.

В большинстве трудов по интегральному исчислению, начиная от открывшего его Ньютона и до настоящего времени, указанный выше процесс суммирования излагается, как составление суммы бесконечно малых полос, которые, складываясь вместе, дают определенный интеграл. Отсюда и возник знак интегрирования $\int$, который представляет собою измененную букву S, выражающую слово *сумма*. Результатом указанного толкования процесса суммирования явились значительные затруднения в правильном понимании истинного смысла процесса интегрирования, ибо вследствие указанного представления о суммировании следовало пренебрегать малыми треугольниками, находящимися у вершины полос, причем получалось впечатление, что интегральное исчисление является только приближенным методом. Поэтому, весьма важно обратить внимание на то обстоятельство, что рассматриваемое понятие есть *предел этой суммы*, а не сама сумма, которую мы рассматриваем.

Этот предел представляет собою вполне определенную величину и никакой ее частью нельзя пренебрегать. Если такой взгляд понят, то представление об определенном интеграле как о некотором выражении площади или объема не вызовет никаких затруднений.

Точно таким же образом теорему о суммировании можно применить к вычислению работы, объема и т. д.

Работа равна:

$$\lim_{\Delta s \to 0}\left[F_1\Delta s_1 + F_2\Delta s_2 + F_3\Delta s_3 + \ldots + F_n\Delta s_n\right]_a^b = \int_a^b F\,ds$$

Объем равен:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left[A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + A_3\Delta x_3 + \ldots + A_n\Delta x_n\right]_a^b = \int_a^b A\,dx.$$

Интегрирование для нас теперь является методом вычисления предела суммы.

Этот метод применим во всех тех случаях, когда рассматриваемая величина представляет собою предел суммы, имеющей следующий вид:

$$y_1\Delta x_1 + y_2\Delta x_2 + y_3\Delta x_3 + \ldots + y_n\Delta x_n = \sum f(x)\,dx.$$

При этом следует поступать следующим образом:

Разделить исследуемую величину на части таким образом, чтобы было очевидно, что искомый ответ получится посредством нахождения предела суммы указанных частей. Затем следует составить выражение для величины этих частей и интегрировать между пределами $x=a$ и $x=b$, т. е. найти предел суммы при безграничном увеличении числа частей ее.

Некоторые авторы выражают эту *основную теорему* в таком виде:

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x \to 0}} \sum f(x)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx.$$

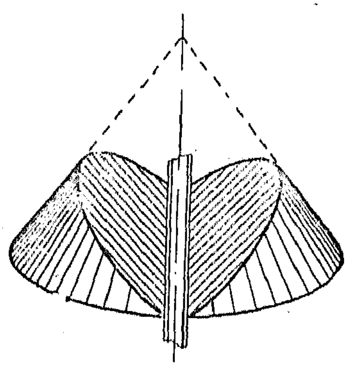


Рис. 610.

Пример. Найти, какое количество угля может быть извлечено из конусообразной кучи, диаметр основания которой равен 30 *м*, а угол естественного откоса 27°, при помощи конвейера шириною в 30 *см*, который движется на одном уровне с землей и проходит через центр основания кучи.

$$a = 15 \times \operatorname{tg} 27° = 15 \times 0{,}5095 = 7{,}643$$

$$b = 0{,}15 \times \operatorname{tg} 27° = 0{,}15 \times 0{,}5095 = 0{,}076.$$

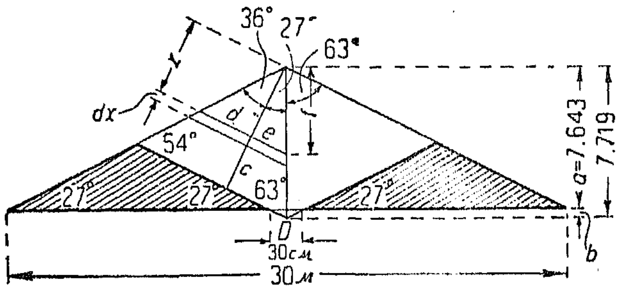


Рис. 611.

Расстояние от вершины конуса до точки $D = 7{,}643 + 0{,}076 = 7{,}719$.

Перпендикулярное расстояние $c = 7{,}719 \times \cos 27°$

$$= 7{,}719 \times 0{,}891 = 6{,}878.$$

Если мы берем переменные расстояния x на прямой c и выделяем слои dx перпендикулярно к прямой c, то в сечениях получатся параболы, подобные показанной на рис. 612.

При этом

$$d \text{ (выраженное через } x) = \operatorname{tg} 36° \times x = 0{,}7265\,x.$$

$$e \text{ (выраженное через } x) = \operatorname{tg} 27° \times x = 0{,}5095\,x.$$

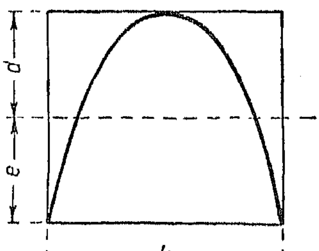


Рис. 612.

Высота параболы $= d + e = 1{,}2360\,x$

$$f = \frac{x}{\cos 27°} = \frac{x}{0{,}891} = 1{,}122\,x$$

$$k = 2f \times \operatorname{tg} 63° = 2 \times 1{,}122\,x \times 1{,}963 = 4{,}405\,x.$$

Архимед установил, что парабола, вписанная в прямоугольник, имеет площадь, равную двум третям площади последнего (см. n⁰ 560). Поэтому, мы можем принять, что наши бесконечно тонкие слои толщины dx высекают прямоугольники высотою $1{,}236\,x$, шириною $4{,}405\,x$, две трети площади которых равняются площадям рассматриваемых парабол.

$$2\int_0^{6{,}878} \frac{2 \times 1{,}236\,x \times 4{,}405\,x}{3} = 2\int_0^{6{,}878} 3{,}6297\,x^2\,dx$$

$$= 2 \left| \begin{matrix} 6{,}878 \\ \\ 0 \end{matrix} \right. \frac{3{,}6297\,x^3}{3}$$

$$= 2{,}42 \times 6{,}878^3 = 787{,}395.$$

Вычислим объем малого треугольного клина у точки D[1]):

$$\frac{30 \times 0{,}3 \times 0{,}076}{2} = 0{,}684\ м^3$$

$$787{,}395 - 0{,}684 = 786{,}711\ м^3$$

$$786{,}711 \times 1{,}25\ (\text{удельный вес угля}) = 983{,}389\ \text{тонн}.$$

$$\text{Объем всего конуса} = \frac{3{,}14 \times 15^2 \times 7{,}643}{3} = 1799{,}926.$$

$$\text{Процент извлеченного угля} = \frac{786{,}711}{1799{,}926} \times 100 = 43{,}7\%.$$

1037. Площади, ограничиваемые плоскими кривыми. Прямоугольные координаты. Метод суммирования. Пред-

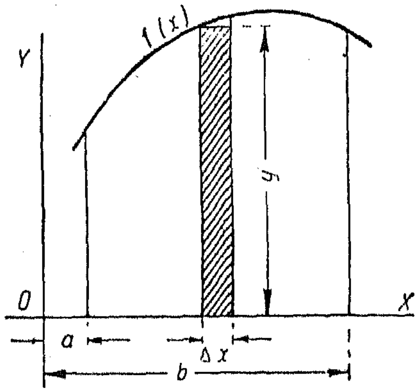


Рис. 613.

положим, мы желаем найти площадь, ограниченную кривой $y = f(x)$, осью X и двумя ординатами $x = a$ и $x = b$.

Искомая площадь есть предел суммы прямоугольников $y\Delta x$, т. е.

[639]
$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b y\,\Delta x = \int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx,$$

---

1) При вычислении объема малого треугольного клина он принимается за объем трехгранной призмы, имеющей в основании треугольник со стороной, равной 0,3 и высотой 0,076.

Высота призмы равна диаметру кучи, т. е. 30.

Прим. ред.

Этот результат получается согласно изложенного в n⁰ 1011.

Таким же образом, площадь, ограниченная кривой, осью Y и абсциссами $y=c$ и $y=d$, есть

[640] $$A=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{c}^{d} x\Delta y=\int_{c}^{d} x\,dy.$$

Пример 1. Найти площадь, ограниченную кривой (рис. 614 и 615)

$$x=2+y-y^2$$

и осью Y.

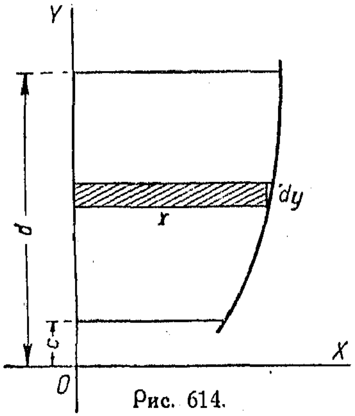


Рис. 614.

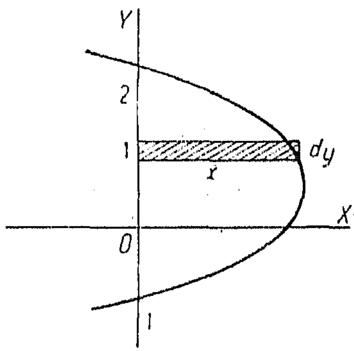


Рис. 615.

Точкам пересечения данной кривой с осью Y соответствует абсцисса $x=0$; подставив $x=0$ в наше уравнение и решив его относительно y, получим

$$y=-1,\quad y=2$$

$$A=\int_{-1}^{2} x\,dy=\int_{-1}^{2}(2+y-y^2)\,dy=$$

$$=\left[2y+\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{2}$$

$$=\left(4+2-\frac{8}{3}\right)-\left(-2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$

$$=4\frac{1}{2}.$$

Пример 2. Найти площадь гипоциклоиды (рис. 613)

$$x=a\sin^3\theta,\quad y=a\cos^3\theta.$$

Из рис. 616

$$A = 4\int_0^a y\,dx.$$

Из $x = a\sin^3\theta$

$$dx = 3a\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta.$$

Подставив эти значения y и x в формулу площади, получим

$$A = 4\int^{\frac{\pi}{2}} a\cos^3\theta\,3a\sin^2\theta\cos\theta\cdot d\theta = 12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\cdot\sin^2\theta\cdot d\theta.$$

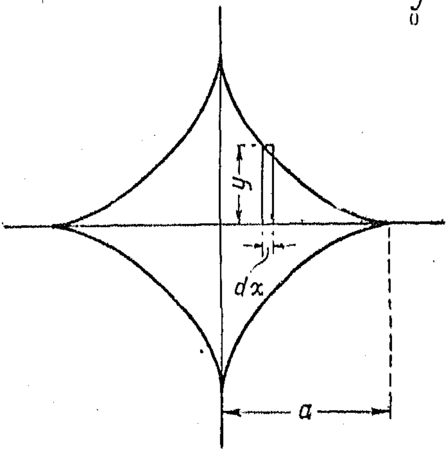


Рис. 616.

Применяя формулу приведения (n^0 1027), [627],

$$\int\cos^m x\cdot\sin^n x\,dx = \frac{\cos^{m-1}x\cdot\sin^{n+1}x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int\cos^{m-2}x\sin^n x\,dx,$$

получим:

$$\int\cos^4\theta\cdot\sin^2\theta\cdot d\theta = \frac{\cos^3\theta\cdot\sin^3\theta}{6} + \frac{3}{6}\int\cos^2\theta\sin^2\theta\,d\theta.$$

Так как $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$, то

$$\cos^2\theta\sin^2\theta = \frac{1}{4}\sin^2 2\theta.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2}\int\cos^2\theta\sin^2\theta\,d\theta = \frac{1}{8}\int\sin^2 2\theta\,d\theta.$$

Последнее выражение можно проинтегрировать по способу, показанному в примере n^0 1021.

$$\frac{1}{2}\int\cos^2\theta\ \sin^2\theta\,d\theta = \frac{1}{16}\left(\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right) = \frac{4\theta - \sin 4\theta}{64}.$$

Поэтому

$$12a^2 \int \cos^4\theta \sin^2\theta \, d\theta = 12a^2\left(\frac{\cos^3\theta \cdot \sin^3\theta}{6} + \frac{4\theta - \sin 4\theta}{64}\right).$$

Подставляя значения пределов, получим:

$$\text{площадь} = 12\,a^2\left(\frac{\pi}{32}\right) = \frac{3\pi a^2}{8}.$$

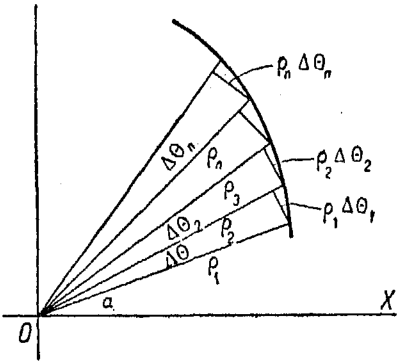


Рис. 617.

1038. Полярные координаты. Если уравнение кривой, данной в полярных координатах, есть

$$\rho = f(\theta),$$

и если требуется найти величину площади, находящейся между кривой и двумя радиусами-векторами, то искомая площадь представляет собою предел суммы круговых секторов, как например это показано на рис. 617.

Указанная сумма площадей этих секторов есть

$$\frac{1}{2}\rho_1{}^2\Delta\theta_1 + \frac{1}{2}\rho_2{}^2\Delta\theta_2 + \ldots + \frac{1}{2}\rho_n{}^2\Delta\theta_n = \sum_1^n \frac{1}{2}\rho_i{}^2\Delta\theta_i.$$

[641] $$\lim_{n\to\infty} \sum \frac{1}{2}\rho_i{}^2\Delta\theta_i = \int_\beta^\alpha \frac{1}{2}\rho^2\,d\theta = \text{искомая площадь}$$

(согласно основной теореме).

Пример. Найти площадь кардиоиды, уравнение которой

$$\rho = a\,(1 + \cos\theta),$$

изменяется от 0 до 2π.

Из $\int_\beta^\alpha \frac{1}{2}\rho^2\,d\theta$, имеем

$$\text{площадь} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{2}(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta.$$

Но $\cos^2\theta = \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{2}$ (n° 604) [298], поэтому

$$\text{площадь} = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(1 + 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{2}\right)d\theta =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(1{,}5 + 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta = \frac{a^2}{2}\left[1{,}5\,\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(1{,}5 \times 2\pi\right) = \frac{3\pi a^2}{2}.$$

1039. Длина кривой. Прямоугольные координаты. Из сказанного в n° 962 об измерении кривых, а также из некоторых теорем геометрии следует, что длина кривой определяется как предел суммы вписанной ломаной линии при безграничном возрастании ее сторон при одновременном уменьшении каждой из них до нуля.

Положим, кривая дана некоторым уравнением

$$y = f(x)$$

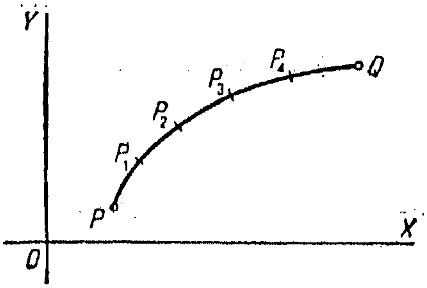


Рис. 618.

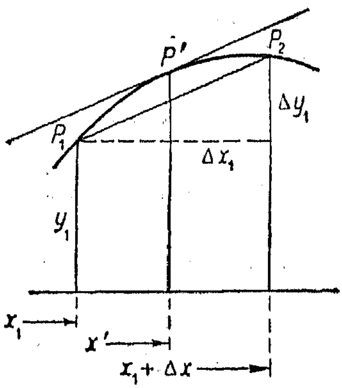


Рис. 619.

и требуется определить длину дуги PQ. Точки $P(a, c)$ и $Q(b, d)$ даны.

Возьмем какое-либо число точек на дуге PQ и проведем хорды, соединяющие эти точки. Тогда, при безграничном возрастании числа этих хорд дуга PQ является пределом суммы их длины.

Рассмотрим одну из указанных хорд, например хорду P_1P_2 (рис. 619).

Здесь

$$\text{хорда } P_1P_2 = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta y_1)^2}.$$

Разделим выражение, находящееся под знаком радикала, на $(\Delta x_1)^2$, а сам радикал умножим на Δx_1; тогда

$$P_1 P_2 = \left[1 + \left(\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \Delta x_1.$$

Согласно теореме о среднем значении

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = f'(x'),$$

где x' — абсцисса точки P', касательная в которой к кривой параллельна хорде $P_1 P_2$. Тогда

$$\text{хорда } P_1 P_2 = [1 + f'(x')^2]^{\frac{1}{2}} \Delta x_1 = \text{длине первой хорды.}$$

Таким же самым путем можно выразить длину хорд $P_2 P_3$ $P_3 P_4$ и т. д.

Сумма этих хорд равна

$$[1 + f'(x')^2]^{\frac{1}{2}} \Delta x_1 + [1 + f'(x'')^2]^{\frac{1}{2}} \Delta x_2 + \cdots$$
$$\cdots + [1 + f'(x^{(n)})^2]^{\frac{1}{2}} \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} [1 + f'(x_i)^2]^{\frac{1}{2}} \Delta x_i.$$

Согласно основной теореме

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{1}^{n} [1 + f'(x_i)^2]^{\frac{1}{2}} \Delta x_i = \int_a^b [1 + f'(x)^2]^{\frac{1}{2}} dx$$

или

[642] $$S = \int_a^b \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx.$$

Если за независимую переменную принимается y вместо x, то эта формула превращается в

[643] $$S = \int_c^d \left[\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1\right]^{\frac{1}{2}} dy,$$

где пределами интегрирования являются значения y, равные c и d.

Пример. Найти длину кривой $y = x^2$ от $x = 3$ до $x = 6$.
Если

$$y = x^2, \text{ то } \frac{dy}{dx} = 2x \text{ и } \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4x^2.$$

Тогда

$$S = \int_3^6 [1 + 4x^2]^{\frac{1}{2}}\, dx.$$

Пусть $2x = \operatorname{tg}\varphi$, откуда

$$dx = \frac{1}{2}\sec^2\varphi\, d\varphi.$$

Треугольник рис. 620 показывает, что

$$\sqrt{1 + 4x^2} = \sec\varphi.$$

Тогда

$$\int_3^6 [1+4x^2]^{\frac{1}{2}} dx = \int_3^6 \sec\varphi \cdot \frac{1}{2}\sec^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_3^6 \sec^3\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_3^6 \frac{d\varphi}{\cos^3\varphi}.$$

Из [633] имеем

$$\frac{1}{2}\int_3^6 \frac{d\varphi}{\cos^3\varphi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\varphi}{2\cos^2\varphi} + \frac{1}{2}\int_3^6 \frac{d\varphi}{\cos\varphi}\right].$$

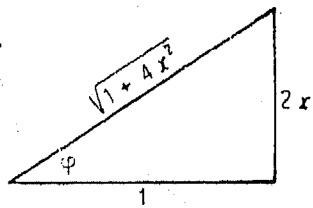


Рис. 620.

Из рис. 620 следует, что

$$\frac{\sin\varphi}{2\cos^2\varphi} = \frac{\dfrac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}}{\dfrac{2}{1+4x^2}} = x\sqrt{1+4x^2}.$$

Из [610]

$$\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \lg(\sec\varphi + \operatorname{tg}\varphi) = \lg\left(\sqrt{1+4x^2} + 2x\right).$$

Поэтому

$$\frac{1}{2}\left[x\sqrt{1+4x^2}\,\Big|_3^6 + \frac{1}{2}\lg\left(\sqrt{1+4x^2} + 2x\right)\Big|_3^6\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[6\sqrt{1+144} - 3\sqrt{1+36}\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\lg\left(\sqrt{1+144} + 12\right) - \lg\left(\sqrt{1+36} + 6\right)\right] = \frac{72{,}24 - 18{,}25}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2}[3{,}18 - 2{,}49] = 27{,}34 \text{ единиц}.$$

1040. Длина кривой. Полярные координаты. Пусть из точки P проведена прямая PN' перпендикулярно к OQ (рис. 621)

$$(\text{хорда } PQ)^2 = (PN')^2 + (N'Q)^2.$$

Напишем это равенство в таком виде:

$$(\text{хорда } PQ)^2 = \left(\frac{PN'}{\text{дуга } PN}\right)^2 (\text{дуга } PN)^2 + \left(\frac{N'Q}{NQ}\right)^2 (NQ)^2.$$

После соответствующей подстановки в последнее равенство получим:

$$(\text{хорда } PQ)^2 = \left(\frac{PN'}{\text{дуга } PN}\right)^2 (r \cdot \Delta\theta)^2 + \left(\frac{N'Q}{NQ}\right)^2 (\Delta r)^2$$

или

$$(\text{хорда } PQ)^2 = \left[\left(\frac{PN'}{\text{дуга } PN}\right)^2 r^2 + \left(\frac{N'Q}{NQ}\right)^2 \left(\frac{\Delta r}{\Delta\theta}\right)^2\right] (\Delta\theta)^2.$$

Длина кривой в этом случае представляет собою предел суммы длины хорд по мере приближения $\Delta\theta$ к нулю. Дроби $\frac{PN'}{\text{дуга } PN}$ и $\frac{N'Q}{NQ}$ приближаются к 1 по мере того, как $\Delta\theta$ стремится к нулю, при этом дуга PQ приближается к хорде PQ.

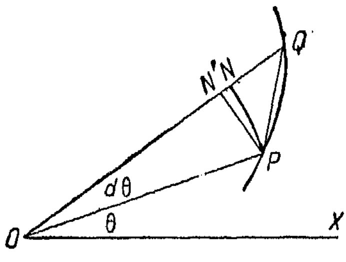


Рис. 621.

Отсюда длина дуги

$$[644] \quad S = \int \left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} d\theta.$$

Тогда определенный интеграл, т. е. длина дуги, взятая между двумя предельными углами,

$$[645] \quad S = \int_{\alpha}^{\beta} \left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} d\theta.$$

Длина дуги, кроме того, может быть выражена и таким образом:

$$[646] \qquad S = \int_{r_0}^{R} \left[1 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dr.$$

Пример. Найти полную длину кардиоиды

$$r = 2a(1 - \cos\theta).$$

Продифференцировав это выражение, получим

$$\frac{dr}{d\theta} = 2a \sin\theta.$$

Представляем последние два выражения в формулу длины кривой

$$S=\int_0^{\pi}2a\left[(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta\right]^{\frac{1}{2}}d\theta=$$

$$=2\int_0^{\pi}4a\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta=16a\left[-\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}=16a.$$

1041. Поверхности тел вращения. При вращении кривой $y=f(x)$ вокруг оси X образуется соответствующая криволинейная поверхность. Обозначим площадь этой поверхности через S.

Рассмотрим бесконечно малую дугу ds, при вращении которой образуется узкая полоса, опоясывающая указанную поверхность. Длина этой полосы равна $2\pi y$, ширина ее ds, а ее площадь $2\pi y\,ds$. Из n° 1039 мы имеем для длины кривой ds выражение

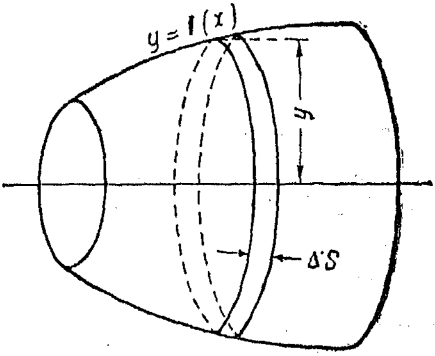


Рис. 622.

$$PP'=ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx;$$

подставив его в формулу, выведенную выше, получим

$$\text{поверхность}=\int 2\pi y\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}dx$$

или

[647] площадь поверхности тела вращения $=$

$$=2\pi\int_a^b y\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}dx.$$

А так как

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}dx,$$

то

$$[648] \qquad \text{площадь поверхности} = \int_a^b 2\pi y\, ds = 2\pi \int_a^b y\, ds.$$

Пример. Найти площадь поверхности, образуемой вращающейся параболой

$$y^2 = 4x$$

вокруг оси X, между $x = 0$ и $x = 8$

$$y^2 = 4x; \qquad y = 2x^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Следовательно поверхность $=$

$$= \int_0^8 4\pi x^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} dx = 4\pi \int_0^8 (x+1)^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{8}{3}\pi (x+1)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^8 = \frac{208}{3}\pi.$$

1042. Объемы тел вращения. Пусть V обозначает объем тела, образующегося при вращении кривой CD вокруг оси AB или оси OY.

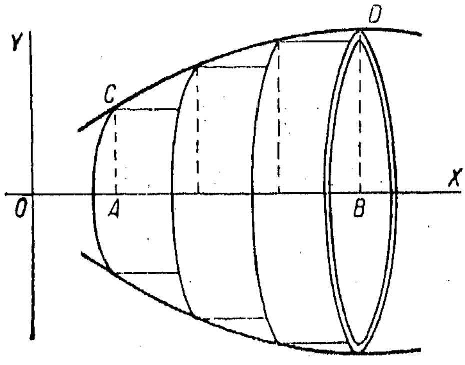


Рис. 623.

Пусть уравнение кривой CD

$$y = f(x).$$

Разделим площадь $ACDB$ на прямоугольные полосы, как это показано на рис. 623.

Каждый прямоугольник при вращении образует цилиндр.

Искомый объем равен пределу суммы объемов этих цилиндров, по мере того как число их безгранично возрастает.

Если толщину таких цилиндрических пластов обозначить через Δx_1, Δx_2, Δx_3 и т. д., а соответствующие радиусы их основания через y_1, y_2, y_3 и т. д., то объем первого из указанных цилиндров будет $\pi y_1^2\, \Delta x_1$.

Сумма же объемов всех подобных цилиндров в этом случае

$$\pi y_1^2 \Delta x_1 + \pi y_2^2 \Delta x_2 + \pi y_3^2 \Delta x_3 + \cdots + \pi y_n^2 \Delta x_n =$$
$$= \sum_1^n \pi y_i^2 \, \Delta x_i.$$

Применяя основную теорему, получим

$$\lim_{n \to \infty} \sum \pi y_i^2 \Delta x_i = \int_a^b \pi y^2 \, dx,$$

откуда

$$[649] \qquad \text{объем} = V = \pi \int_a^b y^2 \, dx.$$

Пример. Найти объем, образующийся при вращении эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

вокруг оси X (рис. 624).

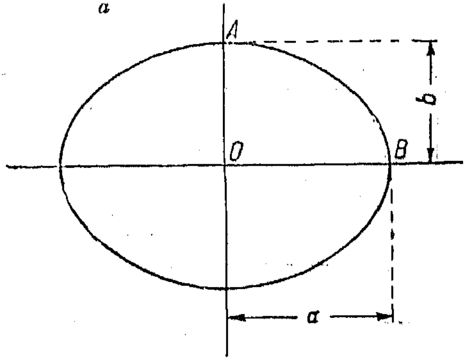


Рис. 624.

Преобразуем данное уравнение

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

Так как более удобно рассматривать вращение только одной правой половины эллипса, т. е. вращение правого верхнего квадрата его AB вокруг оси OB, а затем умножить полученный результат на 2, то

$$\frac{V}{2} = \pi \int_0^a y^2 \cdot dx = \pi \int_0^a \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\, dx = \frac{2\pi a b^2}{3}.$$

Следовательно

$$V = \frac{4\pi \cdot ab^2}{3}.$$

1043. Давление жидкости на вертикальные стенки. Положим $ABCD$ представляет собою часть площади стенки резервуара и требуется найти полное давление жидкости на нее.

Разделим AC на n частей, в результате чего получим n элементарных площадей вида $y\Delta x$. Так как давление на квадратный метр равно глубине, умноженной на вес W одного куб. метра жидкости, то давление на одну прямоугольную полосу есть

$$Wxy\,\Delta x.$$

Сумма же всех давлений на n прямоугольников приблизительно равняется

$$\sum Wxy\,\Delta x.$$

Давление на $ABCD$ представляет собою предел этой суммы. Отсюда, согласно основной теореме,

$$\lim_{n\to\infty}\sum Wxy\,\Delta x=\int Wxy\,dx=W\int xy\,dx.$$

Давление же жидкости на вертикальную погруженную в нее поверхность, которая ограничена кривой, осью X и двумя горизонтальными линиями $x=a$ и $x=b$, выражается таким образом:

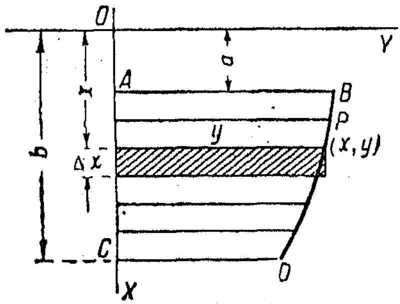


Рис. 625.

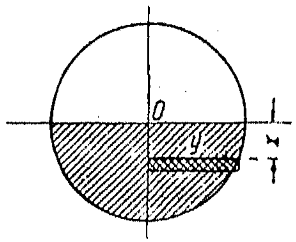


Рис. 626.

[650] $$\text{давление жидкости}=W\int_a^b yx\,dx.$$

Пример. Найти давление на задвижку, закрывающую круглую трубу, наполненную наполовину водой. Диаметр трубы 2 *м* (рис. 626).

Уравнение окружности в поперечном сечении трубы

$$x^2+y^2=1,$$

откуда

$$y=\sqrt{1-x^2};\quad W=1000\ \textit{кг}.$$

Пределы интегрирования:

$$x=0 \text{ и } x=1.$$

Тогда:

$$\text{давление жидкости} = 1000\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,x\,dx = -\left[\frac{1000}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 1000 = 333 \text{ кг}$$

$$\text{все давление} = 2\times 333 = 666 \text{ кг}.$$

Заметим, что y должно быть функцией x.

1044. Работа, совершаемая при подъеме жидкости до некоторого уровня. Работа, производимая при поднимании тела, равна весу его, умноженному на вертикальную высоту подъема. По мере того как цистерна или вообще какой-либо резервуар опоражнивается, уровень жидкости в нем понижается, а расстояние этого уровня от его первоначального положения увеличивается. Таким образом здесь мы можем рассматривать указанное изменяющееся расстояние уровня жидкости как переменную величину.

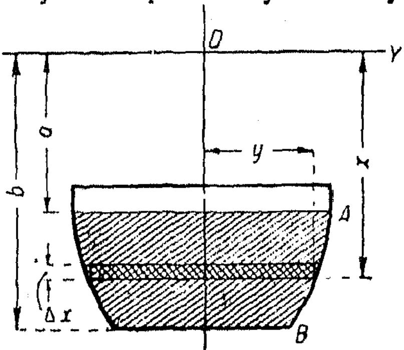


Рис. 627.

Рассмотрим резервуар, показанный на рис. 627. Мы желаем знать величину работы, происходящей при опорожнивании резервуара с уровня a до уровня b, а также при подъеме наполняющей его жидкости до высоты O.

Разделим AB, как обычно, на n цилиндров, из которых каждый имеет толщину Δx. Объем каждого цилиндра равен $\pi y^2\Delta x$, а его вес есть

$$W\pi y^2\Delta x.$$

Работа, затрачиваемая на поднимание одного такого цилиндра жидкости, равна

$$W\pi y^2\Delta x\cdot x.$$

Работа, затрачиваемая на поднимание всех этих цилиндров, равна

$$\sum W\pi y^2 x\cdot\Delta x$$

и

$$\lim_{n \to \infty} \sum W\pi y^2 x\,\Delta x = \int W\pi y^2 x\,dx.$$

Следовательно, между пределами $x = a$ и $x = b$

[651] $$\text{работа} = \int_a^b W\pi y^2 x\,dx = W\pi \int_a^b y^2 x\,dx.$$

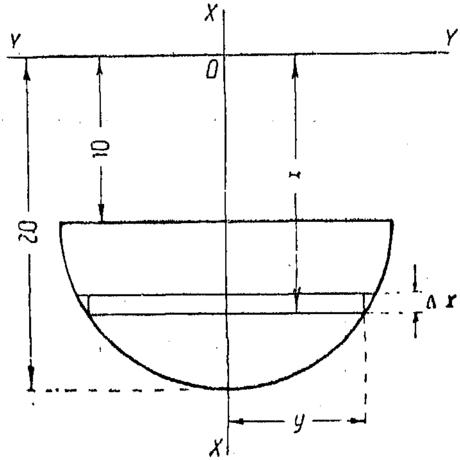


Рис. 628.

Пример. Найти работу, расходуемую на выкачивание воды из полусферического резервуара глубиною 10 *м* и на поднимание ее до уровня, лежащего на 10 *м* выше указанного резервуара (рис. 628).

Уравнение окружности с центром в точке O:

$$x^2 + y^2 = 100.$$

Уравнение окружности того же радиуса, но с центром в точке O_1:

$$(x - 10)^2 + y^2 = 100.$$

Раскрывая скобки, имеем:

$$y^2 = 20x - x^2.$$

Следовательно

$$\text{работа} = 1000\pi \int_{10}^{20} (20x - x^2)\ x\,dx = 3140 \int_{10}^{20} (20x^2 - x^3)\ dx =$$

$$= 3140 \left[\frac{20x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{10}^{20} = 28\,784\,380\ \text{кг} \cdot \text{м}$$

Глава LVI.

ПРИМЕРЫ НА ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРИРОВАНИЯ.

1045. Пример интегрирования. Некоторая величина y возрастает одновременно с увеличением x со скоростью, постоянно равной $0{,}06y$. Найти уравнение, определяющее функцию y, если при $x = 0$, $y = 80$.

Прежде всего заметим, что данная величина y изменяется со скоростью, которая выражается в процентах от самой функции. Поэтому изменение ее происходит по закону сложных процентов (n° 958).

Из условий задачи следует, что

$$\frac{dy}{dx} = 0{,}06\,y.$$

Это выражение не может быть проинтегрировано в том виде, который оно сейчас имеет, но если мы разделим обе части его на y, то

$$\frac{1}{y}\,\frac{dy}{dx} = 0{,}06.$$

Левый член этого равенства представляет собою производную $\lg_e y$, взятую по x. Тогда

$$\lg y = 0{,}06x + C.$$

Но при $x = 0$, $y = 80$. Следовательно

$$\lg y = \lg 80 = 0 + C,$$

откуда

$$C = \lg 80.$$

Тогда

$$\lg y = 0{,}06\,x + \lg 80$$

или

$$\lg y - \lg 80 = 0{,}06\,x,$$

откуда

$$\lg \frac{y}{80} = 0{,}06\,x.$$

Это равенство означает, что $0{,}06\,x$ есть показатель степени, в которую следует возвести основание e, чтобы получить дробь $\frac{y}{80}$.

Поэтому

$$\frac{y}{80} = e^{0{,}06x} \text{ или } y = 80\,e^{0{,}06x}.$$

1046. Напряжение в ремне и в приводном шкиве. Рассмотрим весьма малый элемент ремня, находящийся у вершины шкива и стягивающий угол $\Delta\theta$, который является частью всего угла обхвата θ, выраженного в радианах.

Указанный элемент Δs рассматриваем как твердое тело, находящееся под действием некоторых сил. Это дает возможность применить здесь законы механики твердого тела.

Так как тело в этом случае находится в покое, то горизонтальные и вертикальные силы, действующие в противоположные стороны, будут равны друг другу.

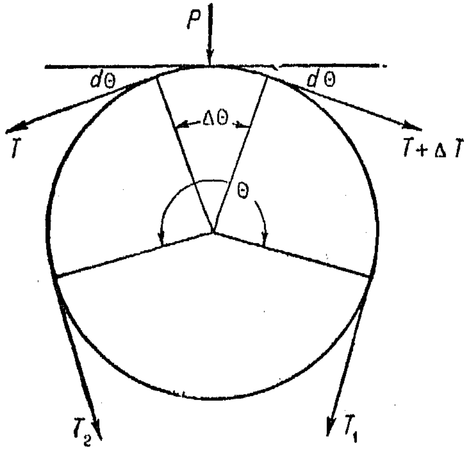


Рис. 629.

Пусть T — напряжение на одном конце элемента Δs, $T+\Delta T$ — напряжение на другом конце Δs, P — нормальное давление, μ — коэффициент трения.

Разность между горизонтальными составляющими сил T и $T+\Delta T$ равна трению, возникающему вследствие давления P, т. е. равняется μP. Тогда

$$(T+\Delta T)\cos\frac{\Delta\theta}{2} - T\cos\frac{\Delta\theta}{2} = \mu P.$$

Приведя подобные члены, получим

$$\Delta T\cos\frac{\Delta\theta}{2} = \mu P.$$

Разложив силы по вертикали, получим

$$P = (T+\Delta T)\sin\frac{\Delta\theta}{2} + T\sin\frac{\Delta\theta}{2} = 2T\cdot\sin\frac{\Delta\theta}{2} + \Delta T\sin\frac{\Delta\theta}{2}.$$

Подставляя это значение P, получим:

$$\Delta T\cos\frac{\Delta\theta}{2} = \mu(2T+\Delta T)\sin\frac{\Delta\theta}{2}$$

или

$$\Delta T = \frac{\mu(2T+\Delta T)}{\cos\frac{\Delta\theta}{2}}\cdot\sin\frac{\Delta\theta}{2}$$

или

$$2\,\frac{\Delta T}{\Delta\theta}=\frac{\mu(2T+\Delta T)}{\cos\frac{\Delta\theta}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}}.$$

По мере того как $\Delta\theta$ приближается к 0, $\cos\frac{\Delta\theta}{2}$ приближается к 1, выражение $\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}}$ стремится к 1, а $\frac{\Delta T}{\Delta\theta}$ стремится к $\frac{dT}{d\theta}$.

Отсюда вытекает, что, взяв предел обеих частей последнего равенства, получим

$$2\,\frac{dT}{d\theta}=\mu\cdot 2T,\quad \text{или}\quad \frac{dT}{d\theta}=\mu T.$$

$$dT=\mu T\,d\theta.$$

Группируя для интегрирования одинаковые переменные, получим

$$\frac{dT}{T}=\mu d\theta\ ^{1)}.$$

Устанавливаем должные пределы переменных и интегрируем

$$\int_{T_2}^{T_1}\frac{dT}{T}=\mu\int_0^{\theta}d\theta,$$

откуда

$$\lg_e T_1-\lg_e T_2=\mu\theta$$

или

[652] $$\lg_e\frac{T_1}{T_2}=\mu\theta \quad \text{(в логарифмическом виде)}$$

---

1) На рис. 629 изображено разложение сил, действующих на элемент ремня, лежащего в верхней части шкива. Однако рассуждения, послужившие для вывода соотношения

$$\frac{dT}{T}=\mu d\theta,$$

остаются без изменения для всякого другого элемента ремня. Давление P будет направлено для каждого элемента по радиусу, а натяжение на концах элемента ремня придется проектировать на радиус и соответствующую касательную. *Прим. ред.*

или

[653] $$\frac{T_1}{T_2} = e^{\mu\theta} \text{ (в виде показательной функции).}$$

В случае сдвоенного ременного привода, где A и B соединены как один привод (рис. 630):

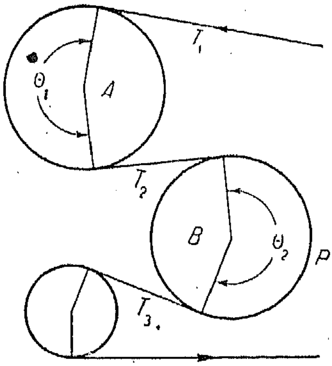


Рис. 630.

$$\frac{T_1}{T_2} = e^{\mu\theta_1} \text{ и } \frac{T_2}{T_3} = e^{\mu\theta_2}.$$

Соединив эти два выражения вместе, получим

$$\frac{T_1}{T_3 \cdot e^{\mu\theta_2}} = e^{\mu\theta_1},$$

т. е. отношение напряжений ведущей части ремня (натянутой) и ведомой есть

[654] $$\frac{T_1}{T_3} = e^{\mu(\theta_1+\theta_2)}.$$

Если угол обхвата одинаков у обоих шкивов, то

[655] $$\frac{T_1}{T_3} = e^{\mu 2\theta}.$$

При трех приводных шкивах

$$\frac{\text{напряжение ведущей стороны}}{\text{напряжение ведомой стороны}} = e^{(\theta_1+\theta_2+\theta_3)\mu}.$$

В этом случае конечно предполагается, что отношение скоростей соответственным образом компенсируется натяжением ремня или что передаваемая приводными шкивами сила уравновешена.

1047. Закон охлаждения. Закон охлаждения был открыт Ньютоном; этот закон говорит, что температура нагретого тела, находящегося в среде постоянной температуры, например в воздухе, падает со скоростью, пропорциональной разности температур этого тела и окружающей его среды.

Если буквой θ обозначена указанная разность в градусах, то скорость изменения температуры равна $\frac{d\theta}{dt}$ и указанное данным законом соотношение есть

$$-\frac{d\theta}{dt}=k\theta,$$

где k постоянный коэффициент, зависящий от применяемых единиц.

Напишем последнее выражение в форме дифференциалов

$$dt=-\frac{1}{k}\cdot\frac{d\theta}{\theta}.$$

Теперь мы подошли к главному вопросу этого примера. Мы можем интегрировать каждую переменную между должными пределами: t между t_1 и t_2, а θ — между θ_1 и θ_2. Таким образом,

$$\int_{t_1}^{t_2} dt=-\frac{1}{k}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{d\theta}{\theta}=-\frac{1}{k}\lg\theta\Big]_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$=\frac{1}{k}\lg\frac{\theta_1}{\theta_2}$$

[656] $$t_2-t_1=\frac{1}{k}\lg\frac{\theta_1}{\theta_2}.$$

Отсюда легко видеть, что чем больше разность температур, тем значительнее скорость охлаждения. Поэтому, если требуется остудить кофе в кратчайший срок во время поспешного завтрака, оставьте его стоять возможно дольше, прежде чем добавлять молока.

1048. Работа расширения газа. Расширение газов, происходящее изотермически, т. е. при постоянной температуре, изображается гиперболой $y=\frac{1}{x}$. Из выражения дифференциала $\lg_e x$ (n⁰ 952) [542] следует, что кривая производной $\lg_e x$ представляется уравнением

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}.$$

Поэтому работа, совершаемая при расширении газа, выражается логарифмическим графиком.

1049. Вывод уравнений движения тяжелой точки (посредством интегрирования). Если мы пренебрегаем сопротивлением воздуха, то горизонтальное ускорение отсутствует и остается только одно вертикальное ускорение силы тяжести, равное — 9,81 *м/сек*^{2}, т. е.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0; \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -9{,}81. \tag{1}$$

Интегрирование обоих этих выражений, выполненное дважды, дает искомые уравнения. Постоянные интегрирования определяются начальными условиями, при которых точка была приведена в движение.

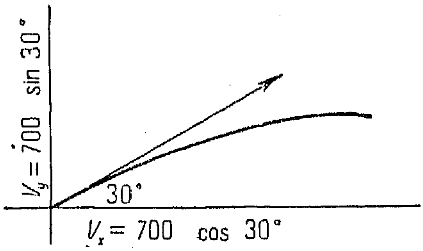


Рис. 631.

Пример. Найти уравнения движения проекции снаряда, выпущенного со скоростью 700 *м/сек.* под углом в 30° к горизонту (рис. 631).

Интегрируя приведенные выше равенства (1), получим

$$\frac{dx}{dt} = C; \quad \frac{dy}{dt} = -9{,}81t + C_1.$$

Интегрируем вторично

[657] $$x = Ct + k; \quad y = -4{,}905t^2 + C_1 t + k_1. \tag{3}$$

Если мы выберем наши оси так, чтобы они проходили через начальную точку полета, то при $t = 0$ $x = 0$ и $y = 0$.

Отсюда $k = 0$ и $k_1 = 0$.

Значения C и C_1 определяем из (2) при $t = 0$.

$$\frac{dx}{dt} = C; \quad \frac{dy}{dt} = C_1.$$

Составляющие начальной скорости равны

$$V_x = \frac{dx}{dt} = 700 \cdot \cos 30° = 606{,}2$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = 700 \sin 30 = 350.$$

Подставляя эти значения C и C_1 в (3), получим

$$x = 606{,}2t; \quad y = 350t - 4{,}905t^2.$$

1050. Пройденный путь. Зная скорость v двигающегося тела в любой момент, мы можем найти посредством интегрирования путь S, пройденный за какой угодно промежуток времени.

$$S = \int v\,dt.$$

Если

$$x = t^2 \text{ и } y = \frac{1}{3}t^3 - t,$$

то

$$v_x = 2t, \text{ а } v_y = t^2 - 1.$$

Подставив найденные значения v_x и v_y в формулу

$$v = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2},$$

получим

$$v = \sqrt{(2t)^2 + (t^2 - 1)^2} = \sqrt{t^4 + 2t^2 + 1} = t^2 + 1.$$

Отсюда пройденный путь

[658] $$S = \int v\,dt = \int (t^2 + 1)\,dt = \frac{1}{3}t^3 + t.$$

Постоянная интегрирования равна нулю, ибо при $t = 0$ $S = 0$.

1051. Балки. *Срезывающее усилие* в каком-либо сечении балки есть алгебраическая сумма всех поперечных сил, взятых по одну и ту же сторону от сечения. Если эта сумма, т. е. равнодействующая указанных поперечных сил, действует на часть балки, расположенную влево от сечения, и направлена кверху, то она считается положительной, если же вниз, то — отрицательной.

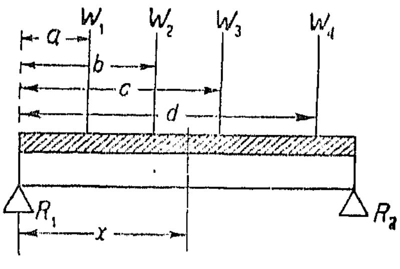


Рис. 632.

Рассмотрим балку, на которую действует, во-первых, равномерно распределенная нагрузка, равная w *кг/м*, и во-вторых, — четыре сосредоточенных силы W_1, W_2, W_3 и W_4. Пусть R_1 и R_2 выражают соответственно реакции левой и правой опор (рис. 632).

Срезывающее усилие тогда в любом сечении, расположенном например между силами W_2 и W_3, равно

$$S = R_1 - W_1 - W_2 - wx.$$

Изгибающий момент в каком-либо сечении балки есть алгебраическая сумма моментов всех сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, взятых относительно центра тяжести этого сечения.

Если равнодействующий момент направлен по часовой стрелке, его считают положительным, если же против часовой стрелки, то — отрицательным.

Обращаясь к рис. 632, видим, что изгибающий момент в этом случае

[659] $$M = R_1 x - W_1 (x-a) - W_2 (x-b) - \frac{wx^2}{2}.$$

Продифференцируем это уравнение изгибающего момента

$$\frac{dM}{dx} = R_1 - W_1 - W_2 - wx.$$

Сравнивая последнее равенство с уравнением срезывающего усилия, замечаем, что они одинаковы.

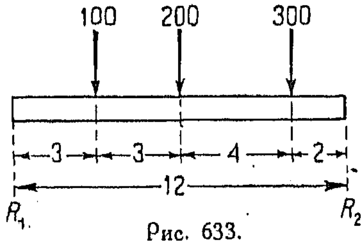


Рис. 633.

Графики момента и срезывающего усилия всегда находятся в таком соотношении друг с другом, как кривые первоначальной функции и ее первой производной.

Если мы построим график момента, а затем продифференцируем его графическим путем, то мы получим график срезывающего усилия.

Если нам дан график срезывающего усилия, который, вообще говоря, легко можно построить, то посредством графического интегрирования мы можем получить график момента.

Предположим, нам дана балка, нагруженная таким образом, как это показано на рис. 633:

$$\text{реакция } R_1 = \frac{100 \times 9 + 200 \times 6 + 300 \times 2}{12} = \frac{900 + 1200 + 600}{12} = 225 \text{ [1]},$$

[1] Величина реакции R_1 определяется так. Балка находится в равновесии под влиянием сил и реакций. Беря момент сил и реакций относительно правого конца балки, получим

$$12 R_1 - 100 \cdot 9 - 200 \cdot 6 - 300 \cdot 2 = 0,$$

откуда следует, что

$$R_1 = \frac{100 \cdot 9 + 200 \cdot 6 + 300 \cdot 2}{12}.$$

Таким же образом находится величина реакции R_2.

Прим. ред.

$$\text{реакция } R_2 = \frac{100 \times 3 + 200 \times 6 + 300 \times 10}{12} =$$

$$= \frac{300 + 1200 + 3000}{12} = 375.$$

Заметим, что наклон графика для первых трех единиц длины балки один и тот же. Поэтому, если найден наклон для одной единицы, то его следует оставить и для всех этих трех единиц (рис. 634).

Так как каждый из изгибающих моментов у концов балки равен нулю, то постоянная интегрирования здесь также равняется нулю. Поэтому мы ведем кривую момента от нуля.

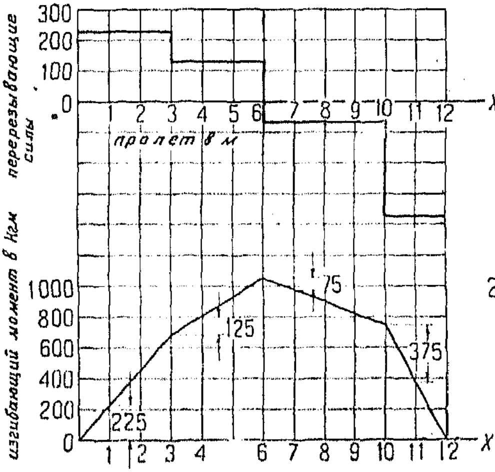


Рис. 631.

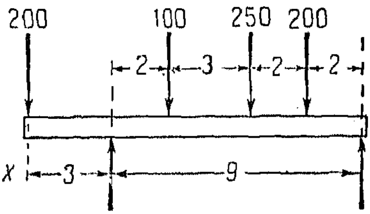


Рис. 635.

1052.

Пример. Рассмотрим балку, нагруженную таким образом, как это показано на рис. 635.

$$R_1 = \frac{200 \times 12 + 100 \times 7 + 250 \times 4 + 200 \times 2}{9} =$$

$$= \frac{2400 + 700 + 1000 + 400}{9} = 500 \text{ [1]}$$

$$R_2 = \frac{100 \times 5 + 250 \times 8 + 200 \times 10 - 500 \times 3}{12} =$$

$$= \frac{500 + 2000 + 2000 - 1500}{12} = 250.$$

[1] Величина реакций опор находится так же, как и в предыдущем примере. *Прим. ред.*

На диаграмме (рис. 636) видим, что изгибающий момент имеет два максимума, один положительный ($x = 3$) и другой отрицательный ($x = 8$).

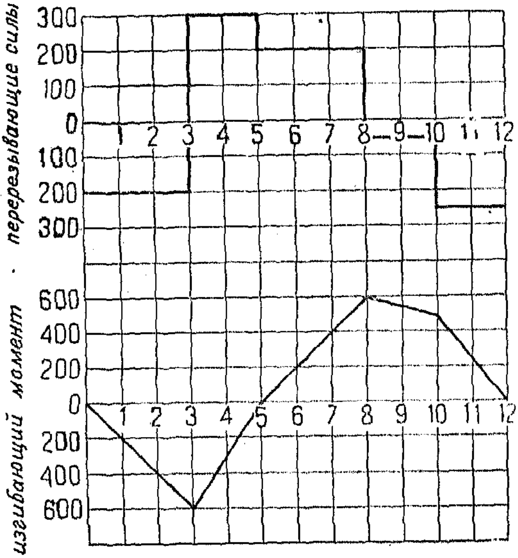


Рис. 636.

1053. Балки, несущие равномерно распределенную нагрузку. Рассмотрим случай равномерно нагруженной балки длиною l *м* с нагрузкой w *кг/м* (рис. 637).

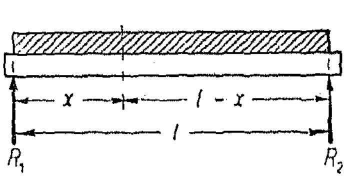


Рис. 637.

Общая нагрузка балки $= w \cdot l$. Давление на каждую опору $= \frac{wl}{2}$.

Срезывающее усилие на расстоянии x от левого конца $= \frac{wl}{2} - wx$.

Изгибающий момент $= \frac{wlx}{2} - \frac{wx^2}{2}$.

Исследуем характер графика этого момента, обозначая изгибающий момент, т. е. значение функции, буквой Y.

Тогда

$$Y = \frac{wlx}{2} - \frac{wx^2}{2}$$

или

$$\frac{wlx}{2} - \frac{wx^2}{2} - Y = 0.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением второй степени, данном в общем виде, замечаем, что

$$A = \frac{w}{2}\ ;\ D = -\frac{wl}{2};\ E = 1 \text{ и } B^2 - 4AC = 0,$$

т. е. наше уравнение выражает смещенную относительно начала координат параболу.

Разделив на $\frac{w}{2}$, получим

$$x^2 - lx = -\frac{2Y}{w}$$

$$x^2 - lx + \frac{l^2}{4} = \frac{l^2}{4} - \frac{2Y}{w}$$

[660] $$\left(x - \frac{l}{2}\right)^2 = \frac{-8Y + l^2w}{4w} = -\frac{2}{w}\left(Y - \frac{l^2w}{8}\right).$$

Отрицательный знак указывает, что парабола обращена вершиной кверху (рис. 638).

Кроме того, характер последнего равенства говорит о том, что начало координат находится влево от оси параболы на расстоянии $\frac{l}{2}$ единиц и ниже вершины ее на $\frac{l^2w}{8}$ единиц.

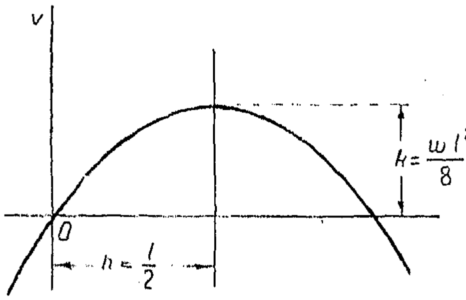


Рис. 638.

Заметим также, что k, равное $\frac{l^2w}{8}$, представляет собою максимальный изгибающий момент балки, величина которого может быть найдена в любой книге по сопротивлению материалов.

В виде пояснительного примера, на диаграммах рис. 639 представлен случай равномерно нагруженной балки длиною 12 *м*, нагрузка ее составляет 200 *кг/м*.

Выведенный выше параболический закон распределения моментов весьма полезен, так как он позволяет составить чертеж, из которого могут быть найдены максимальные изгибающие моменты как при любой равномерно распределенной нагрузке, так и при любой величине пролета.

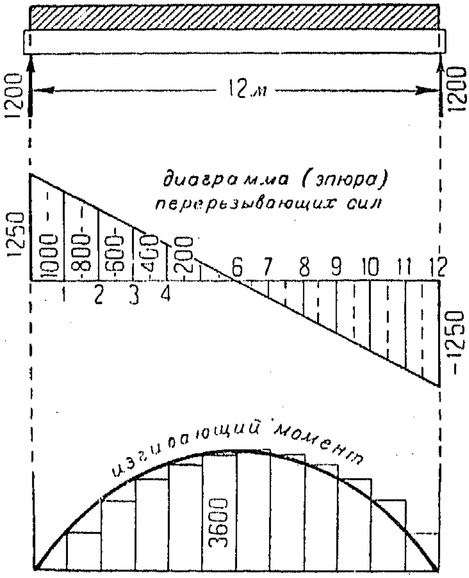


Рис. 639.

Из равенства

$$x^2 = \frac{2}{w} Y,$$

которое является уравнением кривой изгибающего момента для того случая, когда начало координат совпадает с вершиной параболы, ордината кривой изгибающего момента в любом сечении x может быть получена посредством умножения величины $\frac{x^2}{2}$ на нагрузку, приходящуюся на один метр длины балки. Для этого следует предварительно выбрать соответствующие горизонтальную и вертикальную шкалу.

Так например, для балки с пролетом в 16 *м*, нагруженной 200 *кг* на погонный метр, максимальная ордината параболической кривой, т. е. максимальный изгибающий момент, равняется

$$\frac{8^2}{2} 200 = 6400 \text{ кг}.$$

Для балки пролётом в 20 *м*, нагруженной 300 *кг* на погонный метр, максимальный изгибающий момент равен

$$\frac{10^2}{2} w = 50 \; w = 50 \times 300 = 15\,000 \text{ кг}.$$

Рассмотрим рис. 640, где изображена парабола $y = \frac{x^2}{2}$. Для балки какого-либо пролета, например в 15 *м*, раствором циркуля на 15 единиц найдем на чертеже место, где ширина параболы будет равна 15 единицам. Наибольшая ордината, соответствующая такой ширине кривой, будучи умножена на

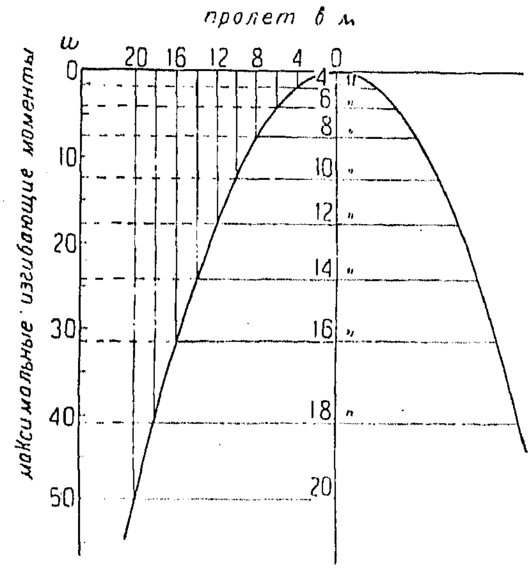


Рис. 640.

нагрузку погонного метра балки, дает максимальный изгибающий момент.

Если желательно определить изгибающий момент в некоторой точке балки, следует измерить ординату, соответствующую этой точке, в вертикальных единицах, а затем умножить ее на нагрузку погонного метра.

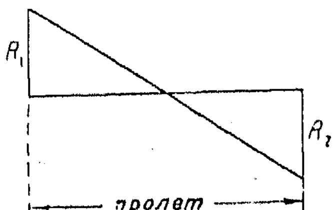


Рис. 641.

Диаграмма срезывающих усилий также может быть весьма просто построена путем откладывания реакций, как это показано на рис. 641, и проведения диагональной линии.

Графический метод определения срезывающего усилия и изгибающего момента балок является наиболее целесообразным на практике, особенно в случае, если на балку действует совокупность сосредоточенных сил и равномерно распределенной нагрузки.

1054. Уравновешивание изгибающих моментов балки. Изгибающие моменты балки, вызываемые нагрузкой, должны быть уравновешены соответствующими моментами внутренних сил, действущих на ее сечениях. Представим себе некоторое сечение балки, как это показано на рис. 642. Примем во внимание, что в этом сечении лежит особая линия, называемая *нейтральной осью*. Эта линия обладает тем свойством, что сумма взятых около нее моментов внутренних сил, приходящихся на площади полос, лежащих на растягиваемой части балки, будет уравновешиваться суммой таких же моментов внутренних сил, приходящихся на площади полос сжимаемой части балки.

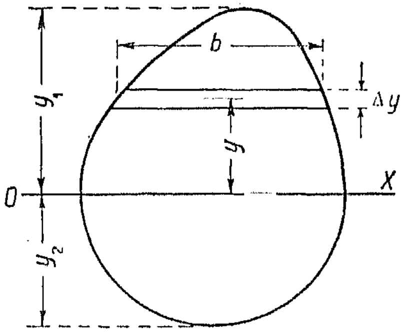


Рис. 642.

Кроме того, будем иметь в виду, что напряжение изменяется в зависимости от величины деформации и что модуль Юнга одинаков при растяжении и сжатии.

Заметим еще, что радиус кривизны балки чрезвычайно велик по сравнению с размерами ее сечения.

Пусть OX — нейтральная ось, пусть кроме того f — напряжение, действующее на расстоянии от оси OX, равном единице. Тогда напряжение в точках сечения, находящихся от оси OX на расстоянии y, будет fy.

Сила сопротивления (внутренние силы), приходящаяся на полосу:

$$\text{напряжение} \times \text{площадь полосы} = b\,\Delta y \times fy.$$

Момент внутренних сил, приложенных на одной полосе,

$$b\,\Delta y \cdot fy \cdot y = fb\,\Delta y\, y^2.$$

Сумма моментов внутренних сил всех полос растягиваемой стороны равна сумме моментов сжимаемой и суммирование моментов для всех полос дает

$$\sum_{-y_2}^{y_1} fb\, y^2 \Delta y.$$

При переходе к пределам это выражение равняется

$$f\int by^2\, dy,$$

т. е.

$$\text{момент внутренних сил} = f\int [\text{площадь} \times (\text{расстояние})^2].$$

Здесь выражение $\int$ [площадь $\times$ (расстояние)^2], являющееся моментом второго порядка, имеет случайно ту же форму, что и интеграл *момента инерции*. Автору неясно, почему же мы можем считать, что *неподвижная* балка имеет *момент инерции*, хотя бы даже для нее и получалась та же самая форма уравнения, что и для последнего. Это обстоятельство в моей институтской работе представлялось мне более или менее загадочным и очень неудачно, что такое сближение с моментом инерции было сделано уже давно. Термин „момент инерции" целесообразнее было бы здесь заменить термином „момент сечения". Однако, так как все существующие книги пользуются первым названием, мы можем только указать на изложенное выше обстоятельство, а затем, все-таки, следовать примеру других авторов.

Тогда

[661] $$\text{момент внутренних сил} = fI.$$

Так как изгибающий момент M равен моменту внутренних сил, то имеем

$$M = fI.$$

Если f_1 — максимальное напряжение на растягиваемой стороне $= fy_1$;

f_2 — максимальное напряжение на сжатой стороне $= fy_2$, то

$$f = \frac{f_1}{y_1} = \frac{f_2}{y_2} = \frac{M}{I}$$

или

[662] $$\frac{M}{I} = \frac{f_1}{C},$$

где C есть расстояние от нейтральной оси сечения волокна, в котором возникает наибольшее напряжение. C может равняться значению либо y_1, либо y_2 в зависимости от того, какое из них больше.

1055. Энергия. Если некоторое тело может производить работу, преодолевая при этом приложенные к нему силы, то оно обладает энергией.

Растянутая пружина может выполнить работу, преодолевая растягивающую силу, при том условии, что указанная сила позволит ей сократиться. Двигающееся тело также может производить работу, преодолевая силу, пытающуюся его остановить, т. е. силу сопротивления движению. И тело и пружина в этом случае обладают энергией.

Энергия положения, т. е. энергия тела, находящегося в покое, называется *потенциальной энергией*, а энергия движения называется *кинетической энергией*. Пружина, находящаяся в растянутом состоянии, как это было в приведенном выше примере, имеет потенциальную энергию, а двигающееся тело обладает энергией кинетической.

Количество энергии, имеющееся у тела в любой момент врѐмени, есть то количество работы, которое может тело произвести, преодолевая при этом силу сопротивления, за время изменения его положения от рассматриваемого момента до некоторого предельного положения. Поэтому единица энергии одинакова с единицей работы.

Количество кинетической энергии тела в любой момент равно той работе, которую тело может произвести за время изменения скорости от ее величины в данный момент до некоторой предельной величины.

Обыкновенно за предельную величину скорости принимают нуль. Тогда кинетическая энергия представляет собою ту работу, которую тело может произвести, израсходовав всю свою скорость, т. е. придя в состояние покоя.

Положим, сила в p *кг* действует на тело, весом W и массой m $\left(m = \dfrac{W}{g}\right)$, которое движется в направлении силы со скоростью v. Перемещение Δs тела за промежуток времени Δt есть $\Delta s = v \cdot \Delta t$, так как

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = v.$$

Работа, производимая силою p *кг*, за промежуток Δt, есть

$$\Delta u = p \cdot \Delta s = p \cdot v\, \Delta t.$$

Известно, что сила p *кг* равна произведению массы на ускорение, а так как ускорение за промежуток времени Δt равняется $\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$, то

$$p = \frac{W}{g} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t}. \tag{2}$$

Подставим (2) в (1). Тогда

$$\Delta u = \frac{W}{g} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} v \Delta t$$

или

$$\frac{\Delta u}{\Delta v} = \frac{Wv}{g}.$$

Переходя к пределу, имеем

$$\frac{du}{dv} = \frac{Wv}{g}.$$

Следовательно

[663] $$u = \frac{Wv^2}{2g}.$$

Если тело приходит в движение с начальной скоростью v_0, пределами интегрирования служат значения v и v_0; если же начальная скорость равна нулю, то указанные пределы v и 0. Поэтому формула **[663]** дает величину всей работы, производимой при возрастании скорости тела от 0 до v.

Так как указанная работа сообщает телу скорость, то последняя в свою очередь даст равное этой работе количество кинетической энергии, которое будет освобождаться телом при переходе его в состояние покоя. Поэтому

$$\text{кинетическая энергия (в килограммо-метрах)} = \frac{\text{(вес) (скорость)}^2}{2 \times 9{,}81 \text{ (ускорение)}} = \frac{1}{2} \text{(масса)} \times \text{(скорость)}^2.$$

Потенциальная энергия, т. е. энергия положения, может быть иллюстрирована примером тела некоторого веса, поднятого на данную высоту над землей.

Такое тело может произвести работу, равную произведению его веса на высоту подъема.

Если нет потерь энергии, вызываемых трением или изменением количества тепла в теле, то сумма потенциальной и кинетической энергии его или системы тел остается постоянной.

1056. Количество движения. Произведение массы движущегося тела на скорость его называется *количеством движения*. Если масса тела и его скорость остаются постоянными, то количество движения измеряется произведением массы на скорость

$$M = m \cdot v.$$

Если же скорость является величиной переменной, то дифференцируя последнее выражение по времени t, имеем

$$\frac{d(m \cdot v)}{dt} = m \cdot \frac{dv}{dt} = \text{скорость изменения количества движения.}$$

Но так как

$$m\frac{dv}{dt} = f = \text{сила},$$

то сила также может быть измерена как скоростью изменения количества движения, так и массой, умноженной на ускорение.

Количество движения является величиной векториальной и поэтому оно может быть как разложено на составляющие, так и получено в виде равнодействующего вектора.

Единица количества движения есть количество движения единицы массы, движущейся с единицей скорости.

Так как $m = \frac{W}{g}$ (где W в килограммах [1]), g в метрах в секунду-квадрат), то

$$m = \frac{\text{килограммы}}{\frac{\text{метры}}{\text{секунды}^2}} = \frac{\text{килограммы} \times \text{секунды}^2}{\text{метры}}$$

и

[664] $$mv = M = \frac{\text{килограммы} \times \text{секунды}^2}{\text{метры}} \times$$

$$\times \frac{\text{метры}}{\text{секунды}} = \text{килограммы} \times \text{секунды}.$$

1057. Соотношения, связывающие работу, импульс, мгновенный импульс и количество движения. Действие силы может быть дано, во-первых, в виде произведения силы на путь, которое называется *работой*, во-вторых — в виде произведения силы на время, что называется *импульсом*. Произведение массы на ускорение, которое выражает *скорость изменения количества движения*, есть сила.

---

[1]) Килограммы, выражающие вес W, суть килограммы веса. Они имеют размерность $\frac{\text{масса} \times \text{длина}}{(\text{время})^2}$. Их не следует смешивать с килограммами массы.

Подобно силе, импульс является величиной векториальной. Если в течение времени t сила F постоянна как по величине, так и по направлению, то импульс ее Q равняется Ft. Если же величина силы F изменяется, то импульс за время Δt есть $F\Delta t$.

$$\Delta Q = F\Delta t,$$

откуда

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = F \text{ и } \frac{dQ}{dt} = F.$$

Тогда для любого промежутка времени t

$$Q = \int_0^t F dt.$$

Здесь F должно быть выражено через t, для того чтобы можно было выполнить интегрирование.

Единицей импульса является импульс единицы силы, действующей в течение единицы времени; эта единица выражена в килограмм-секундах.

Если сила F, действующая на массу M, сообщает ей ускорение a, то

$$F = Ma.$$

Если F постоянна, то и a также постоянно, и

$$a = \frac{v - v_0}{t},$$

т. е.

[665] $$F = M \times \frac{v - v_0}{t} \text{ или } Ft = Mv - Mv_0.$$

Если F изменяется по величине, то

[666] $$F = M\frac{dv}{dt}, \text{ ибо } a = \frac{dv}{dt}$$

и

$$Fdt = M \cdot dv.$$

Если в момент времени $t = 0$ скорость v_0, а спустя t секунд скорость v, то

[667] $$\int_0^t F \cdot dt = \int_{v_0}^{v} Mdv.$$

или

$$\int_0^t F\,dt = Mv - Mv_0.$$

Следовательно, за любой период времени импульс равнодействующей силы, действующей на тело, равен изменению количества движения.

Теперь является очевидным, почему применяются указанные единицы импульса и количества движения. Это происходит потому, что задачи, заключающие в себе силу, массу и скорость, могут быть решены непосредственно, вместо того чтобы составлять два уравнения: одно между силой, массой и ускорением, другое же между скоростью, ускорением и временем.

Кратковременный импульс силы, которая действует весьма малый интервал времени, называется *мгновенным импульсом.*

1058. Инерция. Инерция представляет собою такое свойство тела, которое является причиной сопротивления последнего любому изменению его состояния покоя или равномерного и прямолинейного движения. Тело остается в покое или в равномерном и прямолинейном движении, пока на него не подействует какая-либо сила.

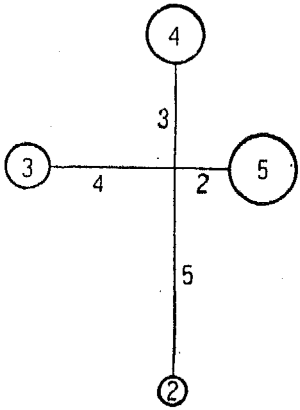


Рис. 643.

1059. Момент инерции. Вычисление кинетической энергии вращающихся тел производится посредством определения *момента инерции* тела.

Рассмотрим массы (не веса) четырех тел, присоединенных легкой проволокой к оси вращения. Пусть эти массы будут 5, 4, 3 и 2 единицы на расстоянии в 2, 3, 4 и 5 *м* от оси, соответственно. Пусть кроме того вся данная система тел вращается со скоростью ω радиан в секунду.

Масса в 5 единиц, находящаяся на расстоянии 2 *м* от оси должна иметь линейную скорость, равную 2ω *м/сек.*

Поэтому ее кинетическая энергия

$$\frac{1}{2} \times 5 \times (2\omega)^2 = \frac{5}{2} \times 2^2\omega^2.$$

Общая кинетическая энергия данной системы является суммой кинетических энергий тел, входящих в систему, т. е.

$$\text{кинетическая энергия} = \frac{1}{2}[5 \cdot 2^2 + 4 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + $$
$$+ 2 \cdot 5^2]\omega^2 = \frac{1}{2}[20 + 36 + 48 + 50]\,\omega^2 = \frac{1}{2}154\,\omega^2.$$

Общая масса всех тел $M = 2 + 3 + 4 + 5 = 14$.

Разделив 154 на 14, получим $11 = (3{,}317)^2$.

Подставляя в выведенное выше выражение вместо числа 154 его значение $M(3{,}317)^2$, имеем

$$\text{кинетическая энергия} = \frac{1}{2}M\,3{,}317^2\,\omega^2.$$

Здесь весьма уместно входящий в последнее выражение сомножитель $M(3{,}317)^2$ называют *моментом инерции системы* вращающихся масс. Если бы данные массы были сосредоточены в одной точке, находящейся на расстоянии 3,317 *м* от оси вращения, то кинетическая энергия системы осталась бы неизменной. Указанное расстояние (3,317) называется *радиусом инерции* системы.

Момент инерции обычно обозначают буквой I. Из предыдущего следует, что

[668] $$\text{кинетическая энергия вращения} = \frac{I\omega^2}{2},$$

где I — момент инерции системы, ω — угловая скорость в радианах.

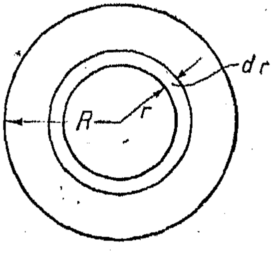


Рис. 644.

Пример. Найти момент инерции сплошного колеса равномерной плотности и толщины относительно оси, перпендикулярной к плоскости колеса и проходящей через его центр.

Дано: внешний радиус колеса R и масса колеса, приходящаяся на 1 $м^2$ площади плоской стороны его. Разделим колесо на концентрические кольца шириною Δr и радиуса r.

Масса одного кольца равна $M\,2\pi r \cdot \Delta r$.

Момент инерции одного кольца

$$(M \cdot 2\pi\; r\Delta r)r^2 \text{ или } 2\pi Mr^3 \cdot \Delta r.$$

Момент инерции всего колеса есть предел суммы выражений

$$2\pi Mr^3 \cdot \Delta r,$$

взятой для всех колец, по мере того как πr приближается к нулю, как своему предельному значению, а r изменяется между $r = 0$ и $r = R$.

Поэтому:

$$\text{момент инерции колеса} = \int\limits_0^R 2\pi Mr^3\,dr = \frac{\pi MR^4}{2}$$

$$\text{масса всего колеса} = \pi MR^2,$$

отсюда

$$\text{момент инерции} = \pi MR^2 \times \frac{R^2}{2}:$$

Из этого выражения видно, что энергия вращающегося колеса такая же самая, как если бы вся масса данного колеса была сосредоточена в узком кольце радиуса

$$\frac{R}{\sqrt{2}} = 0{,}707\,R.$$

Выражение $\int x^2 \cdot dM$ (dM обозначает любой дифференциал массы, соответствующей элементу, расположенному на расстоянии x от оси) представляет собою общую форму для момента инерции. Сумма дифференциалов масс равна всей массе. Выражение $\int x^2 dA$[1]) называется также моментом второго порядка, взятым для массы.

1060. Моменты инерции площади плоской фигуры относительно двух параллельных осей, лежащих в ее плоскости.

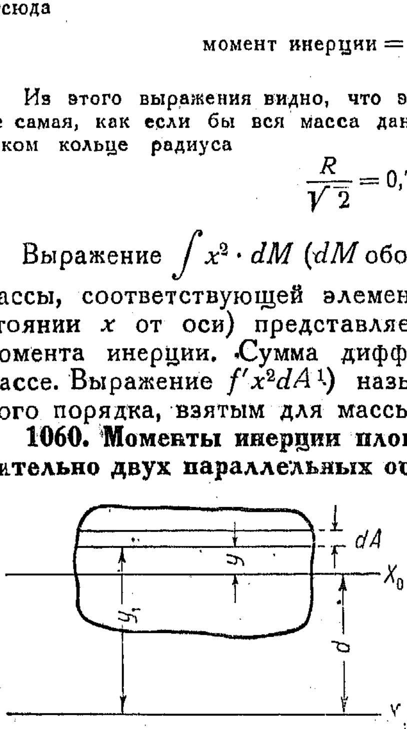


Рис. 645.

Пусть X_0 — центральная ось данной фигуры [2]), а X_1 — какая либо другая ось, параллельная первой и расположенная на расстоянии d от нее.

Момент инерции относительно оси X_1

$$I_{x_1} = \int y_1^2\,dA. \qquad (1)$$

$$y_1^2 = (y+d)^2 = {}^2 + 2yd + d^2. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), имеем:

$$I_{x_1} = \int y^2\,dA + 2d\int y\,dA + d^2\int dA.$$

---

[1]) Буквой A обозначается площадь.

Прим. ред.

[2]) Центральной осью называется ось, проходящая через центр тяжести.

Прим. ред.

и

$$2d\int y\,dA = \text{момент массы относительно } X_0 = 0,$$

ибо X_0 проходит через центр тяжести, т. е. центр масс.

Тогда

[669] $$I_{x_1} = I_{x_0} + Ad^2.$$

Момент инерции площади плоской фигуры относительно любой оси, лежащей в плоскости ее, равен моменту инерции площади относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр тяжести площади, плюс произведение последней на квадрат расстояния между этими двумя осями.

Пример. Дано

$$I_{x_0}\ (\text{для прямоугольника}) = \frac{bh^3}{12},$$

где h — высота, b — основание.

Найти I относительно основания.

$$I = I_{x_0} + Ad^2 = \frac{bh^3}{12} + bh\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{bh^3}{12} + \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{3}.$$

1061. Радиус инерции. Из n⁰ 1059 известно, что

$$I = \int x^2\,dA = R^2 A,$$

где R — радиус инерции, т. е. расстояние от оси такой точки, в которой можно условно считать сосредоточенной всю массу тела, причем момент инерции остается тем же самым. Из приведенной выше формулы имеем

[670] $$R = \sqrt{\frac{I}{A}}.$$

1062. Центр параллельных сил. В случае системы параллельных сил (так же, как и в других случаях) момент равнодействующей равен сумме моментов самих сил, т. е.

$$xR = F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 + \ldots + F_n x_n$$

или

$$x = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 + \ldots + F_n x_n}{R}.$$

Если какую-нибудь геометрическую величину, т. е. линию, площадь или объем, разделить на бесконечно малые элементы, то центр тяжести этих геометрических величин может быть найден посредством определения точки приложения равнодействующей сил тяжести, приложенных к соответствующим элементам. Последнее может быть произведено тем же путем, что и в случае равнодействующей нескольких параллельных сил.

Если через $\bar{x}$ обозначена абсцисса центра тяжести линии длиною s, то она определяется равенством

$$s\bar{x} = \lim_{\Delta s \to 0}[x_1\,\Delta s + x_2\,\Delta s + x_3\,\Delta s + \ldots + x_n\,\Delta s] = \int x\,ds\ ^{1)}$$

где Δs_i являются бесконечно малыми элементами линии, каждый из которых находится на соответствующем расстоянии x_i по горизонтальному направлению от начала координат. Тогда

[671] $$\bar{x} = \frac{\int x\,ds}{s}; \quad \bar{y} = \frac{\int y\,ds}{s}; \quad \bar{z} = \frac{\int z\,ds}{s}.$$

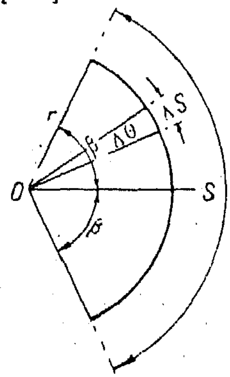


Рис. 646.

Пример. Найти координаты центра тяжести дуги окружности радиуса r, в зависимости от величины стягиваемого ею центрального угла 2β.

Возьмем OX на линии симметрии дуги. Тогда

$$\bar{y} = 0,$$

а потому центр тяжести будет лежать на линии OX.

Применяя полярные координаты, имеем

$$x = r\cos\theta, \quad ds = rd\theta$$

и

$$s = 2r\beta.$$

Подставив эти значения в [671], получим:

$$\bar{x} = \frac{\int x\,ds}{s} = 2\,\frac{\int_0^\beta r\cdot\cos\theta\cdot rd\theta}{2r\beta} = 2\,\frac{\int_0^\beta r^2\cdot\cos\theta\cdot d\theta}{2r\beta} =$$

$$= \frac{2r^2\sin\beta}{2r\beta} = \frac{r\cdot\sin\beta}{\beta}.$$

Центр тяжести площади А. Составляя сумму моментов элементарных площадей, имеем

$$A\bar{x} = \lim_{\Delta A \to 0}[x_1\,\Delta A_1 + x_2\,\Delta A_2 + x_3\,\Delta A_3 + \ldots + x_n\,\Delta A_n] = \int x\,dA$$

---

1) При определении центра тяжести дуги эта дуга считается однородной и удельный вес принимается равным единице.

Прим. ред.

и

[672] $$\bar{x} = \frac{\int x dA}{A}; \quad \bar{y} = \frac{\int y dA}{A}; \quad \bar{z} = \frac{\int z dA}{A}.$$

Пример. Найти положение центра тяжести треугольной пластинки, равномерной толщины и плотности, вычисляя моменты *относительно* оси, проходящей через одну из вершин пластинки и параллельной противоположной стороне.

Берем элемент площади

$$\Delta A = y\ \Delta x,$$

так как вся треугольная пластинка может быть составлена из элементов этого вида.

Из подобия треугольников имеем

$$\frac{x}{y} = \frac{h}{b} \text{ и } y = \frac{bx}{h}$$

$$A = \frac{bh}{2}.$$

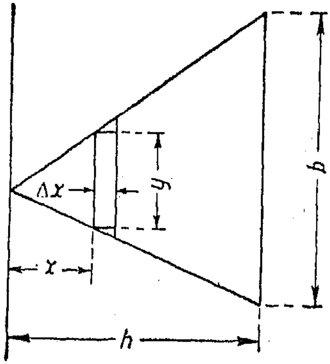


Рис. 647.

Тогда

$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{A} = \frac{\int xy\, dx}{\frac{bh}{2}} = \frac{\int_0^h x \frac{bx}{h}\, dx}{\frac{bh}{2}} = \frac{\int_0^h \frac{b}{h}\, x^2\, dx}{\frac{bh}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{bh^2}{3}}{\frac{bh}{2}} = \frac{2h}{3}\ ^{1}).$$

Центр тяжести объема. Составляя уравнение моментов, имеем

$$v\bar{x} = \lim_{\Delta v \to 0} [x_1\ \Delta v_1 + x_2\ \Delta v_2 + x_3\ \Delta v_3 + \ldots + x_n\ \Delta v_n] = \int x\, dv$$

и

[673] $$\bar{x} = \frac{\int x\, dv}{v}; \quad \bar{y} = \frac{\int y\, dv}{v}; \quad \bar{z} = \frac{\int z\, dv}{v}.$$

---

[1]) Центр тяжести лежит на прямых, параллельных сторонам треугольника и проходящих в расстоянии, равном двум третям высоты от противолежащих вершин. Точка пересечения этих прямых совпадает с точкой пересечения медиан треугольника.

Прим. ред.

Пример. Найти центр тяжести полушара.

Выбирая оси таким образом, как это показано на рис. 648, имеем

$$\bar{y} = 0 \text{ и } \bar{z} = 0.$$

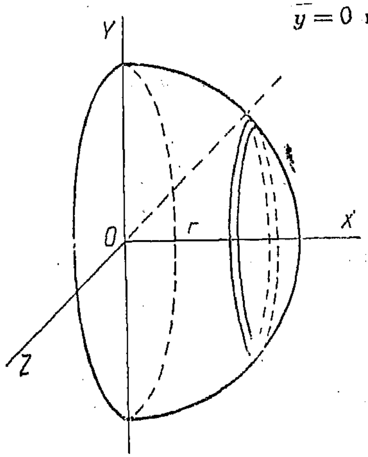


Рис. 648.

Известно, что

$$v = \frac{2}{3}\pi r^3.$$

Элементарный слой имеет площадь основания πy^2 и высоту Δx, отсюда

$$\Delta v = \pi y^2 \cdot \Delta x, \text{ а } dv = \pi y^2\, dx;$$

кроме того

$$x^2 + y^2 = r^2$$

или

$$y^2 = r^2 - x^2.$$

Подставив эти значения в

$$\bar{x} = \frac{\int x\, dv}{v},$$

получим

$$\bar{x} = \frac{\int x\pi y^2\, dx}{\frac{2}{3}\pi r^3} = \frac{\int_0^r \pi x\,(r^2 - x^2)\, dx}{\frac{2}{3}\pi r^3} = \frac{\int_0^r r^2 x\, dx}{\frac{2}{3} r^3} - \frac{\int_0^r x^3\, dx}{\frac{2}{3} r^3} =$$

$$= \frac{3r^4}{4r^3} - \frac{3r^4}{8r^3} = \frac{3}{8} r.$$

Глава LVII.

ЧАСТНОЕ И КРАТНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ.

1063. Частное интегрирование. Частное интегрирование представляет собою действие, обратное частному дифференцированию. При интегрировании данного дифференциального выражения, заключающего в себе две или более независимых переменных, мы рассматриваем сначала только одну из них как величину, изменяющую свои значения, а остальные—как величины, остающиеся во время интегрирования постоянными. Полученное в результате такого интегрирования выражение мы опять интегрируем, но рассматривая при этом уже другую переменную как величину, изменяющуюся во время этого вторичного интегрирования, а остальные переменные принимаем за постоянные, и т. д.

Таким образом

$$u=\int\int f(x, y)\,dy\,dx$$

указывает, что требуется найти такую функцию u от x и y, чтобы

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=f(x,y) \quad (\text{n}^0\,987).$$

Получающаяся при первоначальном интегрировании по y, когда x рассматривается как постоянная, величина постоянная интегрирования может зависеть от x, но может и оставаться постоянной.

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\int f(x, y)\,dy+\varphi(x)$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\int f(x, y)\,dy+C.$$

Так как дифференцирование по y обоих выражений дает в общем виде один и тот же результат $f(x, y)$, то будем рассматривать общий случай,

[674] $$\frac{\partial u}{\partial x}=\int f(x, y)\,dy+\varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — некоторая произвольная функция x.

Пример. Дано $u=\int\int e^{2x}y^2dy\,dx$; требуется найти u.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=e^{2x}y^2.$$

Интегрируя сначала по y и рассматривая при этом x как величину постоянную, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{3}e^{2x}y^3+\varphi(x).$$

Интегрируя это выражение по x и принимая при этом y за постоянную, получаем

$$u=\frac{1}{6}e^{2x}y^3+\int\varphi(x)\,dx+\psi(y).$$

Так как $\varphi(x)$ и $\int \varphi(x)\,dx$ являются выражениями произвольными, мы можем написать получившийся ответ в такой форме:

$$u = \frac{1}{6} e^{2x} y^3 + \psi_1(x) + \psi_2(y),$$

где $\psi_1(x)$ и $\psi_2(y)$ представляют собою некоторые произвольные функции.

1064. Геометрическое значение частного интегрирования. Пусть поверхность CD выражается в прямоугольных координатах уравнением $z = f(x, y)$ (рис. 649).

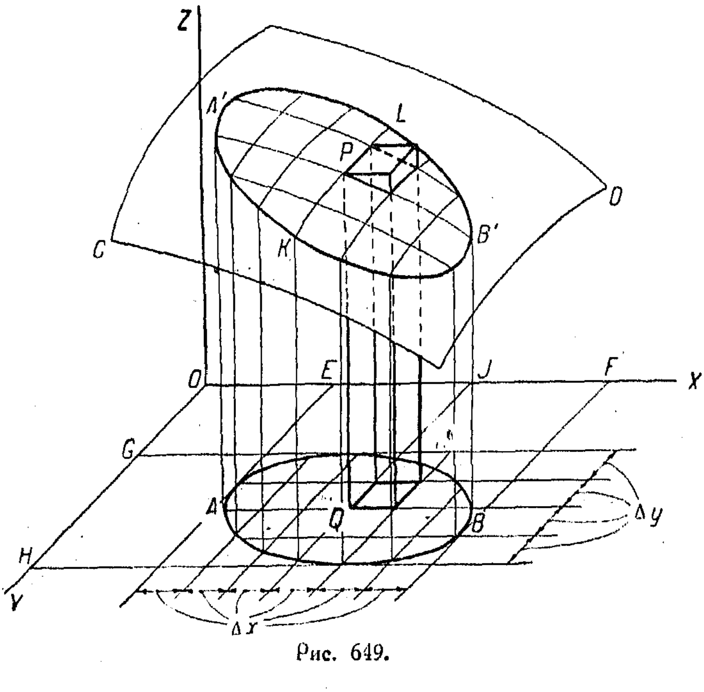


Рис. 649.

Возьмем на плоскости XY некоторую площадь AB и построим прямой цилиндр $ABA'B'$ с образующими, параллельными оси OZ. Пересечение этого цилиндра с поверхностью $z = f(x, y)$ происходит по некоторой кривой $A'B'$.

Проведем перпендикулярно плоскости YX и параллельно ZY ряд плоскостей, пересекающих цилиндр и отстоящих друг от друг на расстояние Δx. Кроме того, проведем перпендикулярно YX и параллельно ZX другой ряд плоскостей на расстоянии Δy друг от друга. Эти плоскости рассекут цилиндр на некоторое число вертикальных столбов, которые имеют у вершины криволинейную поверхность, а в основании — площадь $\Delta x\, \Delta y$.

Рассмотрим столбик PQ и призму PQ, образованную плоскостью, проходящей через точку P и параллельной плоскости XY. Координатами точки P являются x, y, z, а высота призмы есть z, т. е. $f(x, y)$, ибо $z = f(x, y)$. Поэтому, объем нашей призмы PQ равен $f(x, y)\, \Delta x\, \Delta y$.

Тогда, применив способ суммирования, получим

$$\text{объем призм} = \sum\sum f(x, y)\, \Delta x\, \Delta y.$$

Если теперь мы будем увеличивать число секущих плоскостей, уменьшая при этом Δx и Δy безгранично, то сумма объемов призм будет приближаться к объему цилиндра, т. е.

[675] $$V = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \sum\sum f(x, y)\, \Delta x\, \Delta y.$$

Это выражение есть

$$\int\int z\, dx\, dy.$$

1065. Частное интегрирование. Другой метод. Объем цилиндра может быть найден не только таким путем, как это имело место в предыдущем n⁰; этот объем можно найти, рассматривая его как тело, составленное из множества слоев, вырезанных из цилиндра плоскостями, параллельными координатной плоскости YZ и отстоящими друг от друга на расстояние Δx.

Если подставить в равенство

$$z = f(x, y)$$

вместо x величину OA, то значения z при этом будут давать различные точки пересечения поверхности $z = f(x, y)$ с плоскостью $BCDE$, т. е. мы будем иметь значения z, соответствующие различным точкам прямой CD, откуда площадь

$$BCDE = \int_{AB}^{AE} f(OA, y) \cdot dy.$$

Объем слоя, ограниченного гранями $BCDE$ и $FGHI$ (рис. 650), равняется

$$\text{площадь } BCDE \times \Delta x = \Delta x \int_{AB}^{AE} f(OA, y)\, dy.$$

Объем всего цилиндра есть предел суммы объемов всех слоев, расположенных между K и L, т. е.

$$V=\int_{OK}^{OL}dx\int_{AB}^{AE}f(x,\ y)\,dy,$$

где AE и AB являются функциями x.

Эту формулу обычно пишут в виде

[676] $$V=\int_{a_2}^{a_1}\left[\int_{u_2}^{u_1}f(x,\ y)\,dy\right]dx,$$

где u_1 и u_2 представляют собою функции x, а a_1 и a_2 — постоянные величины, служащие пределами для x.

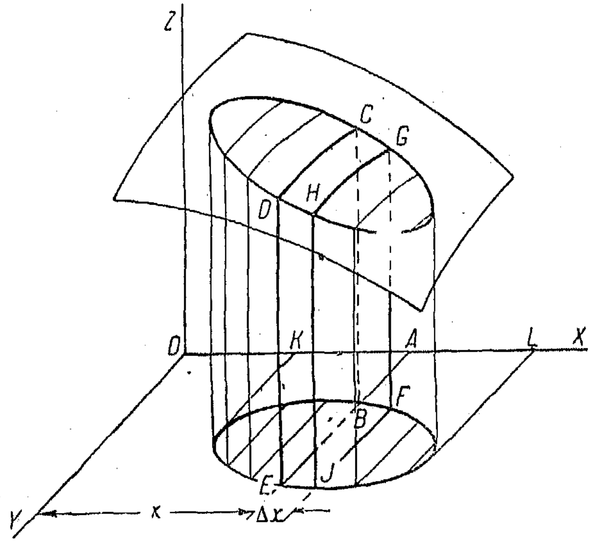


Рис. 650.

В отделе аналитической геометрии трех измерений (n^0 847) было показано, что уравнения проекций кривой на координатные плоскости были одинаковы с уравнениями соответствующих цилиндров. В следующих за указанным параграфом будут рассматриваться только величины x и y, а z будет исключаться.

1066. Вычисление площадей двойным интегрированием. Пусть $y=f(x)$ — данная кривая и мы желаем применить метод двойного интегрирования к решению задачи о вычислении площади, расположенной под указанной кривой. Многие из задач этого рода могут быть решены при помощи простого интегрирования, но их можно решить также и двойным интегрированием. Следует заметить, что применение в подобных случаях двойного интегрирования является наиболее целесообразным.

Рассмотрим площадь между кривой AC, ординатами $x=a$ и $x=b$ и осью X. Разделим интервал $(b-a)$ на n весьма малых полос, шириною Δx каждая. Возьмем затем какую-либо одну из этих полос, например PB, и разрежем ее на ряд небольших прямоугольников высотою Δy.

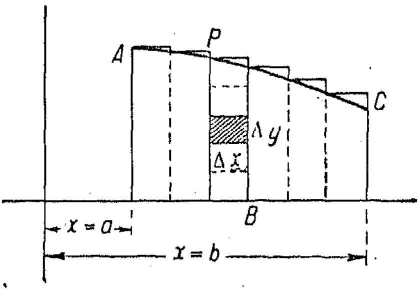


Рис. 651.

Тогда площадь каждого из получившихся прямоугольников равна $\Delta x \Delta y$. Если просуммировать эти прямоугольники по y, мы получим площадь полосы PB, т. е.

$$\Delta x \sum_{0}^{f(x)} \Delta y = \text{площадь полосы } PB.$$

Если теперь мы просуммируем все полосы между пределами $x=a$ и $x=b$, то будем иметь

$$\sum_{a}^{b}\left[\sum_{0}^{f(x)} \Delta y\right] \Delta x = \text{площадь всех полос.}$$

Переходя к пределу при том условии, что сначала Δy, а затем Δx стремятся к нулю, мы получим искомую площадь

[677] $$A = \int_{a}^{b}\int_{0}^{f(x)} dy\,dx.$$

Заметим, что знак интеграла, находящийся внутри последнего выражения, относится к dy, а снаружи его — к dx.

Пример. Найти двойным интегрированием площадь круга

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Для того чтобы упростить решение, будем находить площадь первого квадранта, а затем полученный результат умножим на 4.

В первом квадранте

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Площадь прямоугольника

$$\lim_{\Delta y \to 0} \left[\sum_{y=0}^{y=\sqrt{a^2-x^2}} \Delta y \right] \Delta x = \left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \right) \Delta x$$

$$\text{Площадь суммы полос} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\sum_{x=0}^{x=a} \left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \right) \right] \Delta x =$$

$$= \int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \right) dx = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\, dx =$$

$$= \int_0^a [y]_{y=0}^{y=\sqrt{a^2-x^2}} dx = \int_0^a \sqrt{a^2-x^2} \cdot dx =$$

$$= \left[\frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} \right]_0^a = \frac{\pi \cdot a^2}{4}.$$

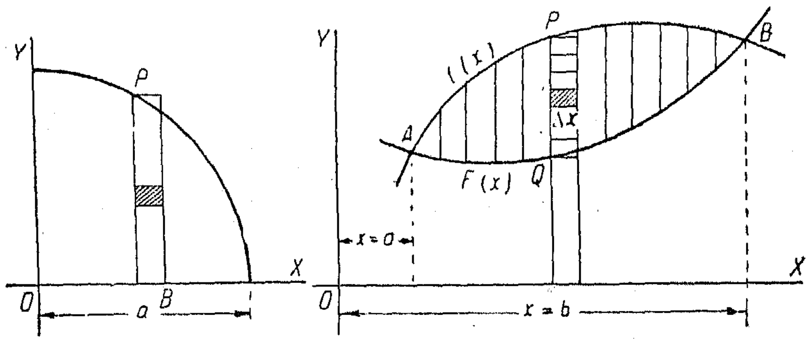


Рис. 652. Рис. 653.

Площадь круга в четыре раза больше полученного результата, т. е. она равна πa^2.

1067. Вычисление двойным интегрированием площади между двумя кривыми. Из рис. 653 непосредственно видно, что площадь, заключенную между двумя кривыми, можно получить, вычитая простой интеграл от $F(x)$ из простого интеграла от $f(x)$. Такой же результат можно получить и при помощи двойного интегрирования.

Рассмотрим элемент площади $\Delta x \Delta y$, как это делалось и ранее. Тогда площадь полосы PQ равна

$$\Delta x \sum_{F(x)}^{f(x)} \Delta y.$$

Суммирование полос от A до B между пределами $x=a$ и $x=b$ дает

$$\sum_{a}^{b}\left[\sum_{F(x)}^{f(x)} \Delta y\right] \Delta x = \sum_{a}^{b} \sum_{F(x)}^{f(x)} \Delta y \cdot \Delta x.$$

Переходя к пределам при условии, что сначала Δy стремится к нулю, а затем Δx, получаем

[678] $$\text{площадь} = \int_{a}^{b} \int_{F(x)}^{f(x)} dy\, dx.$$

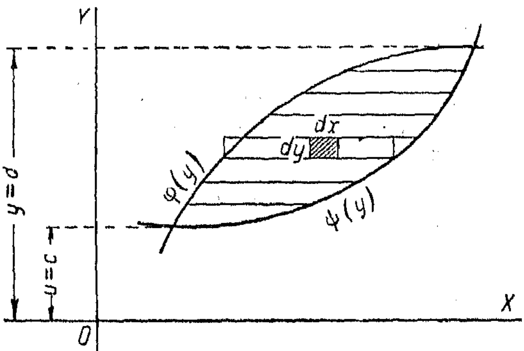


Рис. 654.

Это выражение можно привести к той же самой форме, как и в случае простого интегрирования, так как

$$\int_{F(x)}^{f(x)} dy = [y]_{F(x)}^{f(x)} = f(x) - F(x).$$

Тогда

$$\int_{a}^{b} \int_{F(x)}^{f(x)} dy\, dx = \int_{a}^{b} [f(x) - F(x)]\, dx = \int_{a}^{b} f(x)\, dx - \int_{a}^{b} F(x)\, dx.$$

Мы можем, также, сначала просуммировать по x, а затем по y. Тогда

[679] $$\text{площадь} = \int_c^d \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} dx\,dy,$$

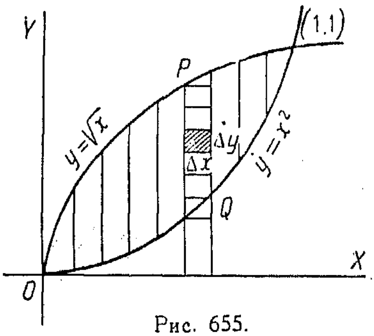


Рис. 655.

где $\psi(y)$ и $\varphi(y)$ являются функциями, обратными функциям $f(x)$ и $F(x)$.

Пример. Найти двойным интегрированием площадь, находящуюся между параболами $y^2 = x$ и $y = x^2$.

Применяем формулу,

$$\text{площадь} = \int_a^b \int_{F(x)}^{f(x)} dy\,dx. \qquad [678]$$

Сначала пишем с соответствующими пределами интеграл полосы PQ,

$$\int_{y=F(x)}^{y=f(x)} dy = \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy.$$

Затем, чтобы найти пределы для второго интеграла, решаем совместно уравнения двух данных парабол, в результате чего получаем значения пределов 1 и 0.

Теперь следующее действие, т. е. суммирование полос от a до b (в данном случае $a=0$ и $b=1$), выражается припиской к $\int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy$ знака интеграла, имеющего соответствующие пределы, в результате чего имеем

$$\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dy\,dx.$$

Интегрируем сначала по y:

$$\int_0^1 [y]_{x^2}^{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,dx - \int_0^1 x^2 \cdot dx.$$

Интегрируем по x:

$$\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,dx - \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

1068. Графическое решение предыдущей задачи. Задача на вычисление площади между двумя кривыми $y^2 = x$ и $x^2 = y$ может быть решена графически следующим образом:

Построив данные кривые, рассмотрим полосы, 0,2 единицы шириною каждая, и приведем горизонтальные прямые таким образом, чтобы получились соответственные равные треугольные площади, как это изображено на рис. 656. Установим затем циркуль для пропорционального деления на отношение 5 : 1, так как каждая из полос имеет ширину в 0,2 единицы.

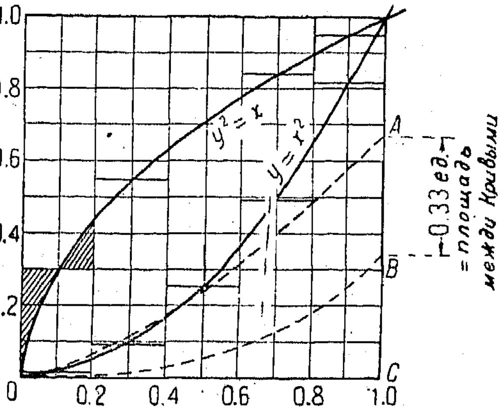


Рис. 656.

Графиками интегралов являются кривые OA и OB. Так, ордината AC выражает в данном вертикальном масштабе площадь, находящуюся под кривой $y^2 = x$, а ордината BC — площадь между кривой $y = x^2$ и осью X, то разность этих ординат, т. е. AB, выражает разность между указанными площадями, т. е. площадь, находящуюся между данными кривыми. На практике не является необходимым заштриховывать треугольные площадки.

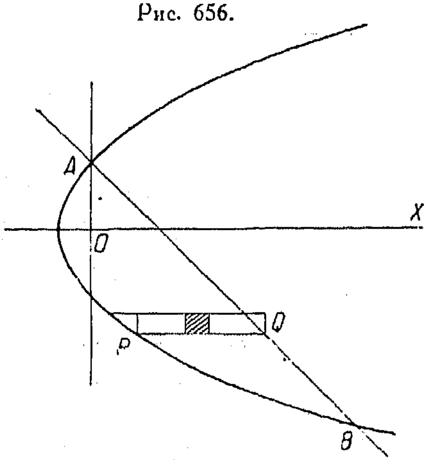


Рис. 657.

Пример. Найти площадь, заключенную между параболой $y^2 = 4ax + 4a^2$ и прямой линией $y = 2a - x$.

Решая совместно данные уравнения, получим, что прямая и парабола пересекаются в точках $A(0, 2a)$ и $B(8a, -6a)$.

Строим полосы, как это показано на рис. 657, и затем применяем формулу

$$\text{площадь} = \int_{y=c}^{y=d} \int_{x=\varphi(y)}^{x=\psi(y)} dx\,dy \quad [679].$$

Из уравнения $y^2 = 4ax + 4a^2$

$$x = \frac{y^2 - 4a^2}{4a}.$$

Из уравнения $y = 2a - x$ имеем

$$x = 2a - y.$$

Пишем интегралы

$$A = \int\limits_{-6a}^{2a} \int\limits_{\frac{y^2-4a^2}{4a}}^{2a-y} dx\, dy = \int\limits_{-6a}^{2a} \left(2a - y - \frac{y^2 - 4a^2}{4a}\right) dy = \frac{64}{3} a^2.$$

Если это выражение сначала интегрировать по x, то задача сделается значительно более трудной. Вертикальные полосы ограничиваются влево от оси Y только кривой параболы и должны быть составлены отдельно от остальной площади, расположенной вправо от оси Y.

Для площади влево от оси Y имеем

$$2 \int\limits_{x=-a}^{x=0} \int\limits_{y=0}^{y=2\sqrt{ax+a^2}} dy\, dx = 2^2 \int\limits_{-a}^{0} \sqrt{ax + a^2}\, dx =$$

$$= \frac{2^2 \times 2}{a} \frac{(ax + a^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \Bigg|_{-a}^{0} = \frac{8a^2}{3}.$$

Для площади вправо от оси Y имеем

$$\int\limits_{x=0}^{x=8a} \int\limits_{y=-2\sqrt{ax+a^2}}^{y=2a-x} dy\, dx =$$

$$= 2ax - \frac{x^2}{2} + \frac{4}{3a}(ax + a^2)^{\frac{3}{2}} \Bigg|_{0}^{8a} =$$

$$= 16a^2 - 32a^2 + 36a^2 - \frac{4}{3}a^2 = 20a^2 - \frac{4}{3}a^2 = 18\frac{2}{3}a^2.$$

$$\text{Вся площадь} = \frac{8a^2}{3} + 18\frac{2}{3}a^2 = \frac{64}{3}a^2,$$

т. е. то, что у нас получалось и выше.

1069. Вычисление двойным интегрированием площадей плоских фигур. Полярные координаты. Дано уравнение $\rho = f(\theta)$ кривой в полярных координатах, требуется найти площадь, заключенную между радиусами-векторами ρ_1 и ρ_2, и данной кривой.

Рассмотрим элементы площади (рис. 659). Из элементарной геометрии известно, что

$$\text{сектор } AOC = \frac{1}{2}\rho \times \rho\Delta\theta = \frac{1}{2}\rho^2\Delta\theta$$

$$\text{сектор } BOD = \frac{1}{2}(\rho + \Delta\rho)^2\Delta\theta,$$

отсюда площадь

$$ABCD = \frac{1}{2}(\rho + \Delta\rho)^2\Delta\theta - \frac{1}{2}\rho^2\Delta\theta = \left(\rho + \frac{1}{2}\Delta\rho\right)\Delta\theta\,\Delta\rho.$$

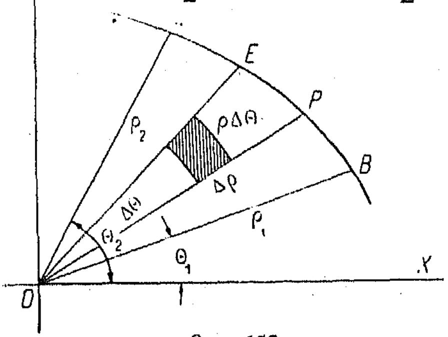


Рис. 658.

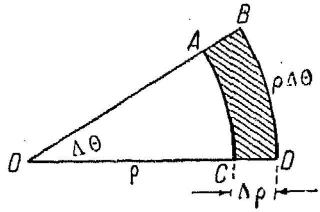


Рис. 659.

Если мы принимаем $\Delta\theta$ за постоянную и производим суммирование по ρ, то получаем площадь сектора POE, которая равняется

$$\Delta\theta \lim_{\Delta\rho \to 0} \sum_{\rho=0}^{\rho=f(\theta)} \left(\rho + \frac{1}{2}\Delta\rho\right)\Delta\rho = \Delta\theta \int_{\rho=0}^{\rho=f(\theta)} \rho\cdot d\rho.$$

Если мы теперь произведем суммирование по θ, то получим сумму клинообразных заштрихованных площадок, т. е.

$$A = \lim_{\Delta\theta \to 0} \sum_{\theta_1}^{\theta_2} \Delta\theta \int_{\rho=0}^{\rho=f(\theta)} \rho\,d\rho = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\rho=0}^{\rho=f(\theta)} \rho\,d\rho\,d\theta.$$

Площадь, заключенная между двумя кривыми, данными в полярных координатах, может быть вычислена двойным интегрированием, точно так же как это производилось, когда кривые были даны в прямоугольных координатах.

В этом случае выражение для площади принимает форму

[680] $$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\rho=F(\theta)}^{\rho=f(\theta)} \rho \, d\rho \, d\theta.$$

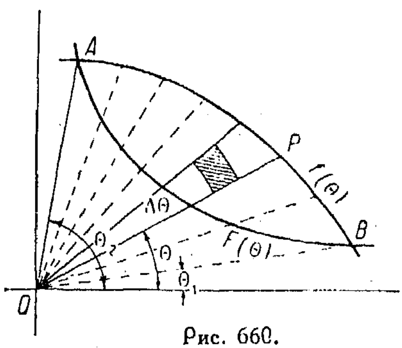


Рис. 660.

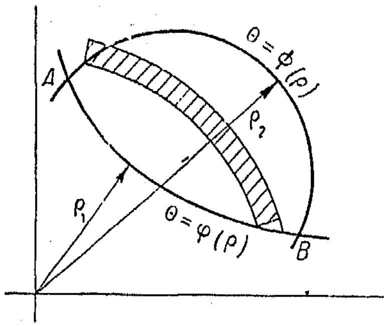


Рис. 661.

Если суммирование производить сначала по θ, считая при этом ρ за постоянную, мы получим кольцевой сегмент круга, как это показано на рис. 661.

Предел суммы таких круговых сегментов

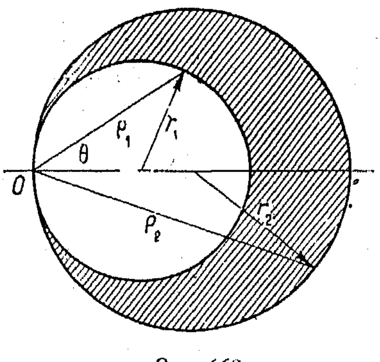


Рис. 662.

[681] $$A = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \int_{\theta=\varphi(\rho)}^{\theta=\psi(\rho)} \rho \, d\theta \, d\rho.$$

Пример. Найти площадь, заключенную между двумя окружностями, которые касаются друг друга изнутри и имеют радиусы r_1 и r_2 (рис. 662).

Известно, что

$$\rho_1 = 2r_1 \cos\theta$$

$$\rho_2 = 2r_2 \cos\theta.$$

Интегрируем между пределами $\frac{\pi}{2}$ и 0, тогда для половины искомой площади имеем

$$\frac{1}{2} A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\rho_1 = 2r_1 \cos\theta}^{\rho_2 = 2r_2 \cos\theta} \rho \, d\rho \, d\theta.$$

Затем

$$\frac{1}{2}A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{2r_1\cos\theta}^{2r_2\cos\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{4r_2^2\cos^2\theta-4r_1^2\cos^2\theta}{2}\right]d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\left[r_2^2-r_1^2\right]\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=2\left[r_2^2-r_1^2\right]\left[\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2\left[r_2^2-r_1^2\right]\left[\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\sin\pi\right]\quad(\sin\pi=0).$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[r_2^2-r_1^2\right].$$

Так как этот результат является выражением для половины искомой площади, то вся она равняется

$$A=\pi\left[r_2^2-r_1^2\right].$$

1070. Вычисление момента площади двойным интегрированием. Рассмотрим какой либо элемент площади, например PQ, точка P которого имеет координаты x и y. Площадь этого элемента равна $\Delta x\,\Delta y$. Момент же этой площади относительно оси Y есть произведение самой площади на расстояние ее до указанной оси, т. е. момент равняется выражению $\Delta x\,\Delta y$, умноженному на x, т. е. $x\,\Delta x\,\Delta y$ (рис. 663).

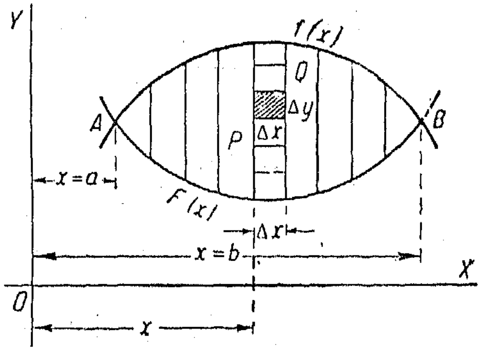


Рис. 663.

Составим подобные произведения для каждого из элементов, находящихся внутри кривой AB, ограничивающей полную площадь, а затем при помощи двойного суммирования сложим все эти элементы вместе. Тогда

$$M_y=\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta x\to 0}}\sum\sum x\,\Delta y\,\Delta x=\iint x\,dy\,dx.$$

Это выражение представляет собою момент площади относительно оси Y.

Таким же образом найден момент площади относительно оси X. Этот момент

[682] $$M_x = \int\int y\,dx\,dy.$$

В этих формулах пределы интегрирования определяются подобно тому, как это производится при вычислении площади. Тогда

[683] $$M_y = \int_{x=a}^{x=b}\int_{y=F(x)}^{y=f(x)} x\,dy\,dx$$

и

[684] $$M_x = \int_{x=a}^{x=b}\int_{y=F(x)}^{y=f(x)} y\,dy\,dx.$$

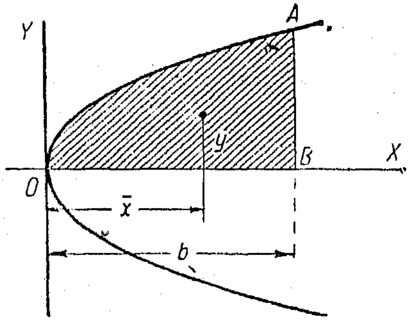


Рис. 664.

1071. Вычисление двойным интегрированием координат центра тяжести (рис. 664). Если мы будем считать, что масса исследуемой площади сконцентрирована в точке $(\bar{x}, \bar{y})$ таким образом, что момент площади не изменился, то указанная точка будет центром масс или центром тяжести. Согласно сказанному,

$$M_y = \text{площадь} \times \bar{x}$$

$$M_x = \text{площадь} \times \bar{y}$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{\text{площадь}}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{\text{площадь}}$$

или

[685] $$\bar{x} = \frac{\displaystyle\int_{x=a}^{x=b}\int_{y=F(x)}^{y=f(x)} x\,dy\,dx}{\displaystyle\int_{a}^{b}\int_{F(x)}^{f(x)} dy\,dx};$$

$$\bar{y} = \frac{\int\limits_{x=a}^{x=b} \int\limits_{y=F(x)}^{y=f(x)} y\,dy\,dx}{\int\limits_{a}^{b} \int\limits_{F(x)}^{f(x)} dy\,dx}.$$

Точно так же выводятся подобные выражения и в полярных координатах.

[686] $$\bar{x} = \frac{\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \int\limits_{\rho=F(\theta)}^{\rho=f(\theta)} \rho^2 \cos\theta\,d\rho\,d\theta}{\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \int\limits_{F(\theta)}^{f(\theta)} \rho\,d\rho\,d\theta}$$

$$\bar{y} = \frac{\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \int\limits_{\rho=F(\theta)}^{\rho=f(\theta)} \rho^2 \sin\theta\,d\rho\,d\theta}{\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \int\limits_{F(\theta)}^{f(\theta)} \rho\,d\rho\,d\theta}.$$

Пример. Найти центр тяжести площади, ограниченной линиями

$$y^2 = 4x, \quad x = 4 \quad \text{и} \quad y = 0.$$

$$M_y = \int\limits_0^4 \int\limits_0^{2x^{\frac{1}{2}}} x\,dy\,dx = \int\limits_0^4 [xy]_{y=0}^{y=2\sqrt{x}}\,dx = \int\limits_0^4 x2\sqrt{x}\,dx =$$

$$= \int\limits_0^4 2x^{\frac{3}{2}}\,dx = \left[\frac{4x^{\frac{5}{2}}}{5}\right]_0^4 = \frac{128}{5}.$$

$$M_x = \int\limits_0^4 \int\limits_{y=0}^{y=2x^{\frac{1}{2}}} y\,dy\,dx = \int\limits_0^4 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=2\sqrt{x}}\,dx =$$

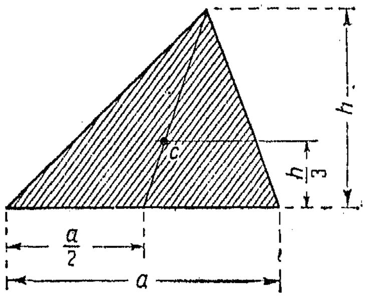
$$= \int\limits_0^4 2x\,dx = [x^2]_0^4 = 16.$$

$$\text{Площадь} = \int\limits_0^4 \int\limits_0^{2\sqrt{x}} dy\,dx = \int\limits_0^4 y\,dx = \int\limits_0^4 2\sqrt{x}\,dx = \left[\frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^4 = \frac{32}{3}.$$

Подставив эти значения в формулу n° 1071, получим

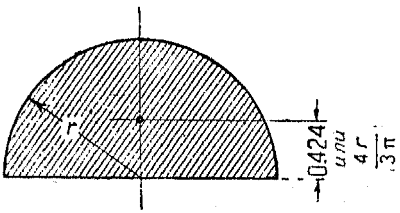
$$\bar{x}=\frac{\frac{128}{5}}{\frac{32}{3}}=\frac{12}{5};\qquad \bar{y}=\frac{\frac{16}{1}}{\frac{32}{3}}=\frac{3}{2}.$$

1072. Положение центров тяжести различных фигур.



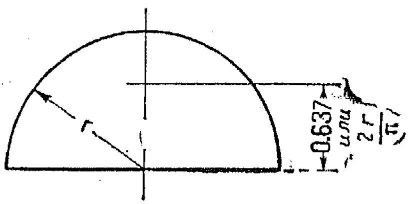
Треугольник.

Рис. 665.



Полукруг.

Рис. 666.



Дуга полуокружности.

Рис. 667.

Параболический сегмент.

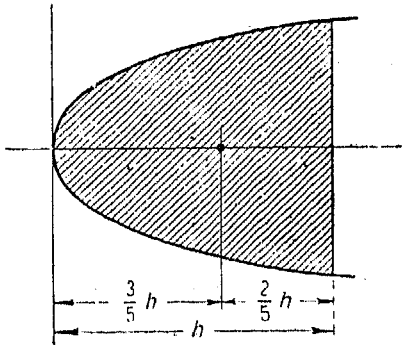


Рис. 668.

Половина параболического сегмента.

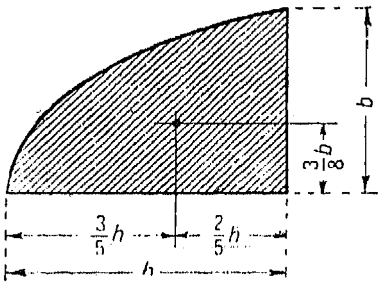


Рис. 669.

Площадь над параболической кривой.

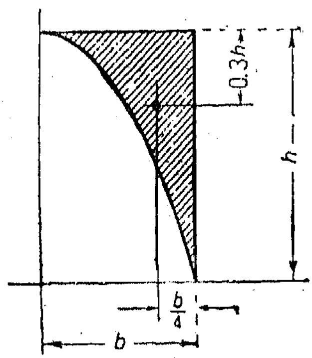


Рис. 670.

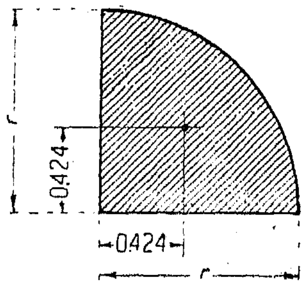


Рис. 671.

Четверть круга.

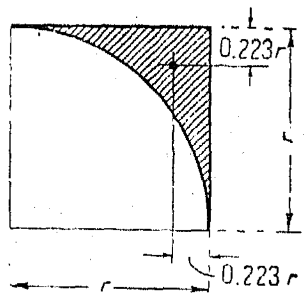


Рис. 672.

Площадь разности квадрата и вписанной в него четверти круга.

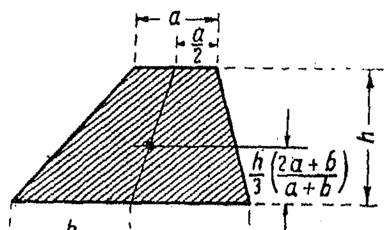


Рис. 673.

Трапеция.

Трапеция.

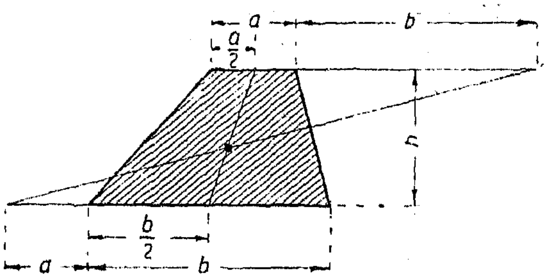


Рис. 674

Четырехугольник.

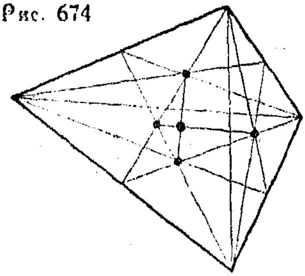


Рис. 675.

1073. Вычисление двойным интегрированием момента инерции площади плоской фигуры (рис. 676). Если мы рассматриваем какой-либо элемент площади, например элемент PQ, точка P которого имеет координаты x и y, то умножение площади этого элемента, равной $\Delta y\, \Delta x$, на квадрат расстояния его до оси Y дает произведение $x^2 \Delta y\, \Delta x$, которое называется *моментом инерции* данного элемента относительно оси Y.

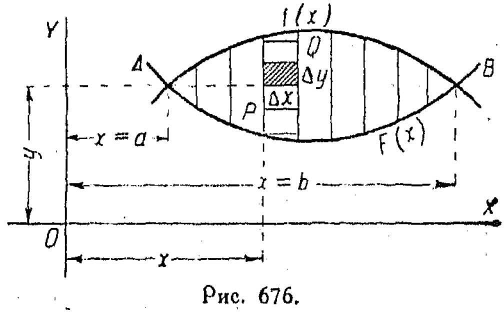


Рис. 676.

Если мы составим подобные произведения для каждого из элементов, а затем при помощи двойного суммирования все эти произведения сложим, то получим

$$\lim_{\substack{\Delta y \to 0 \\ \Delta x \to 0}} \sum \sum x^2 \Delta y\, \Delta x = \int \int x^2\, dy\, dx\,.$$

Устанавливая пределы так же, как и в случае вычисления площади, имеем выражение

$$[687] \qquad I_y = \int_a^b \int_{y=F(x)}^{y=f(x)} x^2 dy\, dx,$$

которое представляет собою момент инерции площади AB относительно оси Y.

Точно так же момент инерции относительно оси X

$$[688] \qquad I_x = \int_a^b \int_{y=F(x)}^{y=f(x)} y^2 dy\, dx.$$

Эта формула отличается от предыдущей только тем, что в ней вместо x^2 подставлено y^2.

1074. Полярный момент инерции. Прямоугольные координаты (рис. 677). Момент инерции площади плоской фигуры относительно оси, перпендикулярной к ее плоскости, определяется при помощи двойного интегрирования.

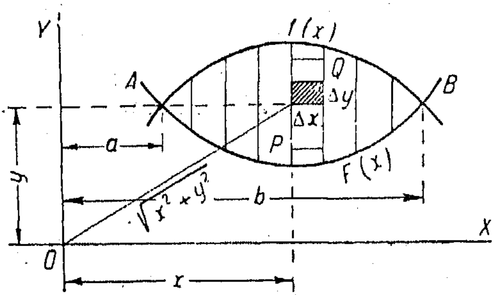


Рис. 677.

Если точка P какого-либо элемента указанной площади имеет координаты x и y, то расстояние от P до O равно

$$\sqrt{x^2+y^2}.$$

Если теперь площадь этого элемента $\Delta y \Delta x$ будет умножена на квадрат его расстояния от O, то мы получим так называемый полярный момент инерции нашего элемента, т. е.

$$(x^2+y^2)\Delta y\, \Delta x.$$

Суммирование полярных моментов инерции всех элементов дает

$$\lim_{\substack{\Delta y \to 0 \\ \Delta x \to 0}} \sum\sum (x^2+y^2)\Delta y\, \Delta x = \int\int (x^2+y^2)\, dy\, dx.$$

Вводя пределы, получим выражение

$$I_0=\int\limits_a^b\int\limits_{y=F(x)}^{y=f(x)}(x^2+y^2)\,dy\,dx,$$

представляющее собою уравнение полярного момента инерции, который обозначается через I_0.

Из написанных выше равенств имеем:

[689] $$I_0=\int\int(x^2+y^2)\,dy\,dx=\int\int x^2\,dy\,dx+\\+\int\int y^2\,dy\,dx.$$

Сравнивая эту формулу с формулами моментов инерции около осей прямоугольных координат X и Y, видим, что

$$I_0=I_x+I_y.$$

Пример. Найти I_0 площади, ограниченной прямыми

$$x=a,\quad y=0\quad \text{и}\quad y=\frac{b}{a}x\quad (\text{рис. }678).$$

Данные прямые образуют треугольник OAB. При суммировании площадок вертикальной полосы пределами являются величины $\frac{b}{a}x$ и 0.

При суммировании же полос в треугольнике, пределы равняются a и 0

Тогда из формулы

$$I_0=\int\int(x^2+y^2)\,dy\,dx \qquad [689]$$

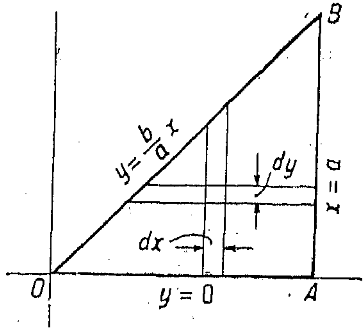


Рис. 678.

имеем

$$I_0=\int\limits_0^a\int\limits_0^{\frac{b}{a}x}(x^2+y^2)dy\,dx=\int\limits_0^a\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_0^{\frac{b}{a}x}dx=\int\limits_0^a\left[\frac{b}{a}+\frac{b^3}{3a^3}\right]x^3dx=$$

$$\left[\left(\frac{b}{a}+\frac{b^3}{3a^3}\right)\frac{x^4}{4}\right]_0^a=\left(\frac{b}{a}+\frac{b^3}{3a^3}\right)\frac{a^4}{4}=ab\left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{12}\right).$$

1075. Вычисление полярного момента инерции двойным интегрированием. Полярные координаты. В этом случае элемент площади равен $\rho\Delta\rho\Delta\theta$ (см. n° 1069 относительно площади в полярных координатах). Здесь мы также имеем соотношение

$$\rho^2=x^2+y^2,$$

подставив которое в уравнение полярного момента инерции в полярных координатах

$$I_0 = \int\int (x^2 + y^2)\, dy\, dx,$$

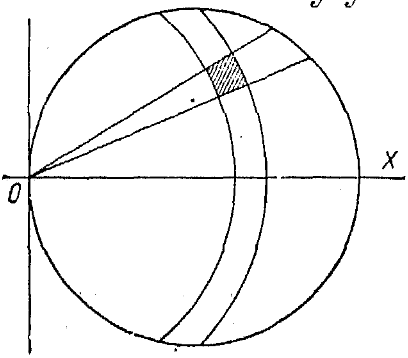


Рис. 679.

получим

$$I_0 = \int\int \rho^3\, d\rho\, d\theta.$$

Вводя пределы, получаем выражение

$$[690] \quad I_0 = \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \int\limits_{\rho = F(\theta)}^{\rho = f(\theta)} \rho^3 d\rho\, d\theta,$$

которое представляет собою полярный момент инерции в полярных координатах.

Пример. Найти I_0 площади круга

$$\rho = 2r \cos \theta$$

около точки 0 (рис. 679).

Подставив $\rho = 2r \cos \theta$ в формулу [620], получим

$$I_0 = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{\rho=0}^{\rho = 2r\cos\theta} \rho^3\, d\rho\, d\theta = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_{\rho=0}^{\rho = 2r\cos\theta} d\theta =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4r^4 \cos^4\theta\, d\theta =$$

$$= 4r^4 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\, d\theta = 4r^4 \left[\frac{\cos^3\theta \sin\theta}{4} + \frac{3}{4}\int \cos^2\theta\, d\theta\right] =$$

$$= 4r^4 \left[\frac{\cos^3\theta \sin\theta}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 4r^4 \left[0 + \frac{3\pi}{16} + 0\right] - \left[-\frac{3\pi}{16}\right] = 4r^4 \cdot \frac{3}{8}\pi = \frac{3r^4\pi}{2}.$$

1076. Вычисление двойным интегрированием площадей криволинейных поверхностей (рис. 680).

Предположим, что данная поверхность CB выражается уравнением

$$z=f(x, y).$$

Требуется найти площадь A поверхности CB.

Пусть A' является прямоугольной проекцией некоторой части данной поверхности A на плоскость XY.

Проведем один ряд плоскостей параллельно координатной плоскости YZ на расстоянии Δx друг от друга и другой ряд — параллельно ZX — на расстоянии Δy. Эти плоскости образуют усеченные призмы, ограниченные у их вершины элементом поверхности, проекцией которого на плоскость XY является площадка $\Delta x \Delta y$. Рассмотрим плоскость, касательную к нашей поверхности в точке P. Из аналитической геометрии известно, что

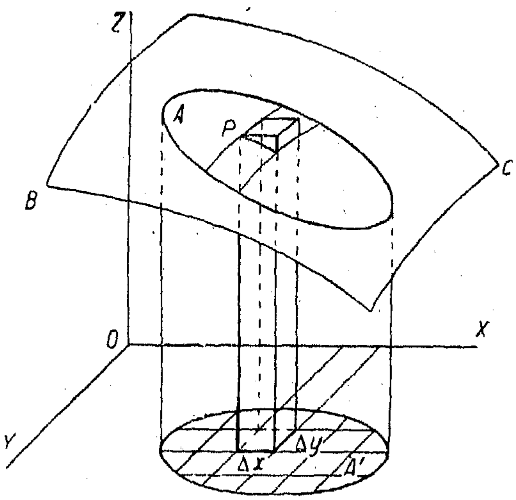


Рис. 680.

$$\text{площадь элемента } \Delta x \Delta y = \text{площадь элемента касательной плоскости} \times \cos\gamma,$$

где γ есть угол, который касательная плоскость образует с координатной — XY. Тогда

$$\Delta x \Delta y = \text{площадь элемента касательной плоскости} \times \cos\gamma.$$

Но так как

$$\cos\gamma=\frac{1}{\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}},$$

то

$$\Delta x\,\Delta y = \frac{\text{площадь элемента касательной плоскости}}{\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Отсюда

$$\text{площадь элемента касательной плоскости} = \left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\Delta x\,\Delta y.$$

Произведя суммирование всех элементов касательной плоскости, получим

$$\lim_{\substack{\Delta y \to 0\\ \Delta x \to 0}} \sum\sum\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\Delta x\,\Delta y.$$

Тогда

$$[691]\qquad \text{площадь} = \int\int\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dy\,dx.$$

Вводя пределы интегрирования, имеем:

$$[692]\qquad \text{площадь} = \int\limits_{x=a}^{x=b}\int\limits_{y=F(x)}^{y=f(x)}\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dy\,dx,$$

где $y=f(x)$ и $y=F(x)$ являются уравнениями проекций кривых, ограничивающих площадь, на плоскость XY.

Если по какой-либо причине является более удобным проектировать площадь на плоскость XZ, выведенная формула получает вид

$$[693]\qquad \text{площадь} = \int\limits_{x=a}^{x=b}\int\limits_{z=\psi(x)}^{z=\varphi(x)}\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dz\,dx.$$

В случае же проекции на плоскость YZ, имеем:

$$[694] \qquad \text{площадь} = \int_{y=c}^{y=d} \int_{z=g(y)}^{z=G(y)} \left[1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dz\, dy.$$

Для надлежащего усвоения настоящего n° весьма полезно восстановить в памяти метод, при помощи которого находят проекцию площади на плоскость XY (см. отдел аналитической геометрии, n° 847). В основном, этот метод заключается в том, что посредством исключения z из уравнений поверхностей, пересечение которых образует кривую, ограничивающую рассматриваемую площадь данной поверхности, находится уравнение проекции указанной кривой на плоскость XY.

Пример. Найти поверхность шара (рис. 681)

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

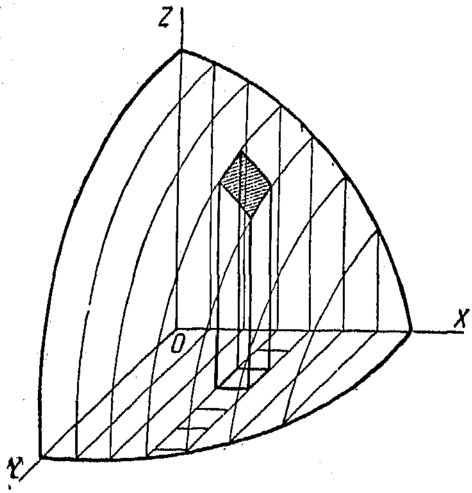


Рис. 681.

Рассмотрим восьмую часть искомой поверхности, т. е. площадь поверхности шара, заключающуюся в одном квадранте между координатными плоскостями.

Из уравнения

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}.$$

Тогда

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2} = \frac{z^2}{z^2} + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2 - y^2}.$$

Приравнивая z нулю ($z=0$), мы получаем проекцию площади на плоскость XY, т. е.

$$x^2+y^2=r^2.$$

Составляем искомое равенство

$$\frac{A}{8}=\int\limits_{x=a}^{x=b}\int\limits_{y=F(x)}^{y=f(x)}\left[\frac{r^2}{r^2-x^2-y^2}\right]^{\frac{1}{2}}dy\,dx=$$

$$=\int\limits_{x=0}^{x=r}\int\limits_{y=0}^{y=\sqrt{r^2-x^2}}\left[\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}\right]dy\,dx=\frac{\pi r^2}{2},$$

откуда

$$A=4\pi r^2.$$

1077. Вычисление объемов тройным интегрированием. Объемы, ограниченные поверхностями, уравнения которых даны, могут быть вычислены при помощи трех последовательно выполненных интегрирований, тем же самым способом, что и при двойном интегрировании.

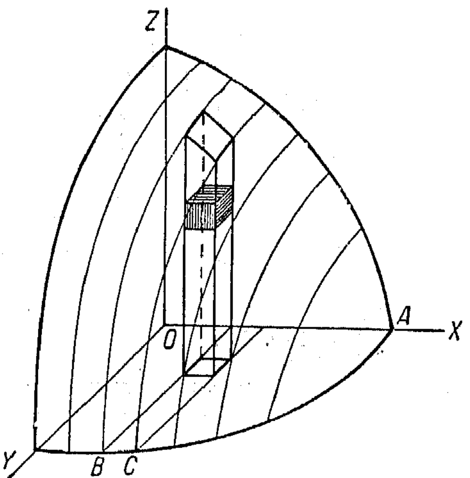


Рис. 682.

Прежде всего, данное тело разделим на прямоугольные параллелепипеды с размерами Δx, Δy, Δz. Тогда объем каждого из них равняется

$$\Delta x\,\Delta y\,\Delta z,$$

что и представляет собою элемент объема.

Просуммируем все эти элементы объема, лежащие в пространстве, ограниченном данными поверхностями, следующим образом: сначала сложим элементы каждого столбца, затем сложим столбцы таким способом, чтобы получить отдельные параллельные между собою слои, и наконец возьмем сумму всех слоев, в результате чего и получим полный объем.

Тогда

[695] $$V=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0\\ \Delta z\to 0}}\sum\sum\sum\Delta x\,\Delta y\,\Delta z=\int\int\int dz\,dy\,dx.$$

Рассмотрим пределы интегрирования для того случая, когда вычисляется объем части эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

лежащей в первом квадранте.

Прежде всего, выясним пределы суммирования элементов

$$\Delta x\,\Delta y\,\Delta z,$$

в столбцы. Это суммирование производится по z в пределах от $z=0$ до $z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$.

Суммирование столбцов в слои выполняется по y в пределах от

$$y=0 \text{ до } y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$$

Так как кривая, ординаты которой служат при указанном суммировании столбцов пределами, лежит в плоскости XY, то она находится из уравнения

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

путем приравнивания z нулю ($z=0$).

Суммирование же слоев, производящееся для получения всего объема, выполняется по x в пределах от

$$x=0 \text{ до } x=OA=a.$$

Приняв во внимание сказанное о пределах суммирования, мы можем составить искомое уравнение объема:

$$V=\int_{x=0}^{x=a}\int_{y=0}^{y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\int_{z=0}^{z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz\,dy\,dx$$

$$V=c\int_{x=0}^{x=a}\int_{y=0}^{y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}dy\,dx=$$

$$=\frac{\pi cb}{4a^2}\int_{x=0}^{x=a}(a^2-x^2)\,dx=\frac{\pi abc}{6}.$$

Объем всего эллипсоида $=\frac{4\pi abc}{3}$.

Обычное обозначение тройного интеграла в случае вычисления объема таково:

$$V=\int_0^a\int_0^{y=\varphi(x)}\int_0^{z=f(x,y)} dz\,dy\,dx.$$

Легко заметить, что здесь пределы интегрирования по x и y одинаковы с теми, которые мы берем при вычислении площади $ACBO$ плоскости XY, т. е. — площади проекции данного тела на указанную координатную плоскость. Действительно, упомянутая площадь $ACBO$ выражается так:

$$A=\int_0^a\int_{y=0}^{y=\varphi(x)} dy\,dx.$$

Это обстоятельство означает, что мы можем найти искомый объем и при помощи двойного интегрирования, т. е.

$$V=\int_0^a\int_{y=0}^{y=\varphi(x)} z\,dy\,dx.$$

Таким образом, действия как с двойным, так и с тройным интегралом, в котором производится интегрирование по z, приводят к одному и тому же результату.

1078. Сравнение простого и двойного интегрирования. Первоначально в n⁰ 997, а затем в nn⁰ 1011 и 1036 было показано, что вычисляемая простым интегрированием площадь выражается так:

$$A=\int y\,dx.$$

При вычислении же двойным интегрированием (n⁰ 1066) площадь выражается иначе:

$$A=\int\int dy\,dx.$$

Мы можем это выражение привести к первому путем интегрирования его сначала по y. Тогда

$$A=\int y\,dx.$$

1079. Вычисление моментов посредством интегрирования (рис. 683). Разделим на элементы данную геометрическую величину, как например линию, поверхность или объем. При этом первая разделится на элементы длины, вторая — на элементы площади и третий разделится на элементы объема. Пусть каждый из этих элементов, Δs, ΔA или ΔV будет умножен на его расстояние от некоторой выбранной точки, или на расстояние его относительно прямой, либо какой-нибудь плоскости. Полученные при этом произведения являются соответственно моментами указанных элементов относительно выбранной точки, прямой или плоскости. Предел суммы произведений каждого из элементов на его расстояние относительно точки, прямой или плоскости, получающиеся по мере того, как число элементов безгранично возрастает, а размеры их безгранично убывают, называется моментом первого порядка соответствующей геометрической величины относительно точки, прямой, либо плоскости.

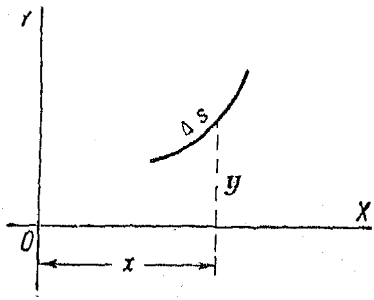


Рис. 683.

$$M_x = \lim_{\Delta s \to 0} \sum y \, \Delta s =$$
$$= \int y \, ds$$
$$= \text{момент линии.}$$

Таким же образом момент площади плоской фигуры относительно оси X выражается

$$M_x = \lim_{\Delta A \to 0} \sum y \, \Delta A.$$

Кроме того, так как

$$\Delta A = \Delta x \cdot \Delta y,$$

то имеем равенство,

$$\int y \, dA = \int \int y \, dx \, dy,$$

которое указывает на то обстоятельство, что здесь двойное интегрирование равносильно по получаемому результату простому интегрированию.

Формула момента первого порядка для объема относительно одной из координатных плоскостей, например относительно XY, такова:

$$M_{xy} = \lim_{\Delta V \to 0} \sum z\Delta V = \int z\, dV.$$

Перед интегрированием, вместо символов Δs, ΔA и ΔV следует подставить соответствующие им выражения элементов длины, площади и объема.

Таким образом, так как

$$\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z,$$

то

$$\int z\, \Delta V = \int \int \int z\, dz\, dy\, dx.$$

Заметим, что посредством подстановки $\sqrt{dy^2 + dx^2}$ вместо ds, $dy\, dx$ вместо dA и $dz\, dy\, dx$ вместо dV, фор-

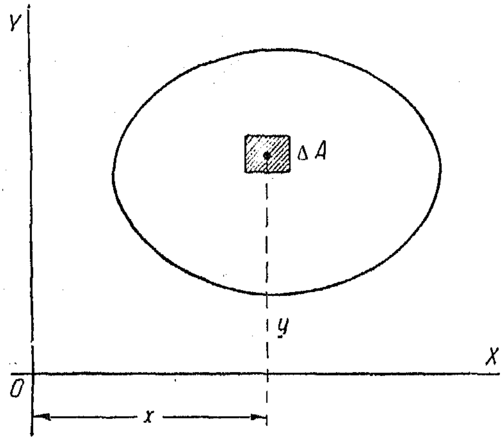


Рис. 681.

мулы для простого интегрирования превращаются в двойные и тройные интегралы.

1030. Приближенное интегрирование (рис. 685). В так называемом способе трапеций для вычисления площади, находящейся под некоторой данной кривой, вместо прямоугольных площадок берутся площади трапеций, что позволяет получать результат с большей степенью точности относительно действительной величины данной площади. Разделим расстояние от a до b

на любое число n равных между собою делений и построим на них трапеции. Чем больше взята величина n, тем ближе будет вычисленная площадь к точному значению данной.

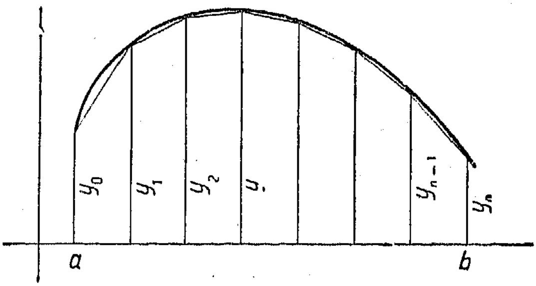


Рис. 685.

Площадь трапеции равна полусумме параллельных сторон ее, умноженной на ширину ее, которую мы обозначаем через Δx.

Тогда

$\frac{1}{2}(y_0+y_1)\Delta x$ — площадь первой трапеции;

$\frac{1}{2}(y_1+y_2)\Delta x$ — площадь второй трапеции;

$\frac{1}{2}(y_2+y_3)\Delta x$ — площадь третьей трапеции;

. . . . .
. . . . .
. . . . .

$\frac{1}{2}(y_{n-1}+y_n)\Delta x$ — площадь n-ой трапеции.

Складывая площади трапеций от a до b, получаем

$$\frac{1}{2}(y_0+2y_1+2y_2+2y_3+\cdots+2y_{n-1}+y_n)\Delta x.$$

По этому правило, вытекающее из способа трапеций, заключается в том, что

[696] $$\text{площадь}=\left(\frac{1}{2}y_0+y_1+y_2+y_3+\cdots+y_{n-1}+\frac{1}{2}y_n\right)\Delta x.$$

Пример. Посредством способа трапеций вычислить $\int\limits_1^{10} x^2\,dx$.

Делим промежуток от $x=1$ до $x=10$ на 9 частей.

Тогда каждая часть, т. е. $\Delta x=1$.

Подставляем значения $x=1$, $x=2$, $x=3, \cdots x=9$ в уравнение $y=x^2$, так как оно выражает кривую, площадь под которой мы желаем найти.

Тогда

$$y_0=1,\quad y_1=4,\quad y_2=9,\ldots y_n=81.$$

Подставляя эти значения в формулу [696], получим

$$\text{площадь}=\left(\frac{1}{2}+4+9+16+25+36+49+64+81+\frac{1}{2}\right)1= \\ =334\frac{1}{2}.$$

Посредством же интегрирования имеем:

$$\int\limits_1^{10} x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^{10}=\frac{1000}{3}-\frac{1}{2}=333.$$

Таким образом ошибка меньше $0{,}5\%$.

1081. Правило Симпсона для приближенного вычисления (рис. 686). Приближенное вычисление площади, расположенной под данной кривой, может быть произведено с большей степенью точности, если вместо того чтобы проводить прямые

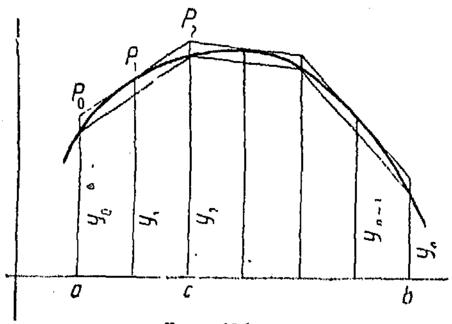


Рис. 686.

линии, образующие верхние стороны трапеций, провести параболическую кривую, а затем просуммировать находящиеся под нею площади. Параболическая кривая может быть проведена через любые три точки данной кривой. Вычисленная посредством такой параболы площадь будет ближе к точной величине площади, чем в том случае, когда применяется трапецоидальный метод и верхними сторонами трапеций являются прямые линии.

Разделим интервал от a до b на n равных частей, ширина которых равна Δx. Через три точки, взятые на данной кривой, например через точки P_0, P_1, P_2, проведем дугу параболы.

Тогда площадь полосы $aP_0P_1P_2c$ равняется площади трапеции aP_0P_2c плюс площадь параболического сегмента $P_0P_1P_2$:

$$\text{площадь трапеции} = \frac{1}{2}(y_0 + y_2)\,2\Delta x = (y_0 + y_2)\,\Delta x.$$

Площадь параболического сегмента $P_0P_1P_2$ равна двум третям площади описанного параллелограмма:

$$\text{площадь } P_0P_1P_2 = \frac{2}{3}\left[y_1 - \frac{1}{2}(y_0 + y_2)\right]2\Delta x =$$

$$= \frac{2}{3}(2y_1 - y_0 - y_1)\,\Delta x,$$

откуда площадь первой полосы есть

$$\text{площадь} = (y_0 + y_2)\,\Delta x + \frac{2}{3}(2y_1 - y_0 - y_2)\,\Delta x =$$

$$= \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Площадь остальных полос находится точно так же: площадь второй полосы

$$\frac{\Delta x}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4),$$

площадь третьей полосы:

$$\frac{\Delta x}{3}(y_4 + 4y_5 + y_6);$$

площадь последней полосы:

$$\frac{\Delta x}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n).$$

Сложив площади всех полос, получим:

[697] $$\text{площадь} = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + y_n).$$

Это выражение и представляет собою правило Симпсона в том случае, когда n есть четное число.

Пример. Вычислить $\int\limits_1^{10} x^2\,dx$ посредством правила Симпсона.

Возьмем 10 частей. Тогда $\Delta x = 0{,}9$ единицы.

Подставляя в уравнение $y = x^3$ абсциссы

$$x = 1;\ x = 1{,}9;\ x = 2{,}8;\ x = 3{,}7;\ x = 4{,}6;\ x = 5{,}5;\ x = 6{,}4;\ x = 7{,}3;$$
$$x = 8{,}2;\ x = 9{,}1;\ x = 10$$

и соответствующие ординаты

$$y = 1;\ y = 3{,}61;\ y = 7{,}84;\ y = 13{,}69;\ y + 21{,}16;\ y = 30{,}25;\ y = 40{,}96;$$
$$y = 53{,}29;\ y = 67{,}24;\ y = 82{,}81;\ y = 100$$

в формулу Симпсона, получим:

$$\text{площадь} = \frac{0{,}9}{3}[1 + 4\cdot 3{,}61 + 2\cdot 7{,}84 + 4\cdot 13{,}69 + 2\cdot 21{,}16 +$$
$$+ 4\cdot 30{,}25 + 2\cdot 40{,}96) + 4\cdot 53{,}29 + 2\cdot 67{,}24 + 4\cdot 82{,}81 + 100] =$$
$$= 0{,}3\,(1 + 14{,}44 + 15{,}68 + 54{,}76 + 42{,}32 + 121 + 81{,}92 + 213{,}16 +$$
$$+ 134{,}43 + 331{,}24 + 100) = 0{,}3\cdot 1110 = 333.$$

Этот ответ является точным значением данного интеграла, что мы и должны были ожидать, ибо кривая $y = x^2$ — парабола.

Величина Δx была взята дробной с той целью, чтобы показать, как может быть вычислена площадь в подобном случае.

1082. Применение планиметра для целей интегрирования. Планиметр представляет собою инструмент, измеряющий площади. Он может так же широко применяться, как и данные нами методы приближенного вычисления площадей. Так как планиметр вычисляет площади механически, то им можно пользоваться таким же путем и при интегрировании. В этом случае не требуется каких-либо специальных указаний за исключением того, что следует быть хорошо знакомым с пользованием инструментом для нахождения площадей.

Применение планиметра в интегрировании ограничено нахождением определенных интегралов, т. е. измерением определенных площадей, как например площади, заключенной между двумя вычерченными кривыми, или площади между кривой и осью X или Y внутри некоторых пределов.

Для того чтобы найти величину площади при помощи планиметра, подвижным острием инструмента обводят периметр, т. е. пограничные кривые измеряемой фигуры, а искомая величина площади ее дается отсчетом особого регистрирующего колесика планиметра.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Глава I.

Арифметические вычисления с помощью алгебраических формул.

Применение алгебраических формул при умножении.

Проверка арифметических действий девятками

Глава II.

Приближенные вычисления. Абсолютная и относительная погрешности.

Формулы для приближенных вычислений.

Глава III.

Алгебраические обозначения. Отношение и пропорция. Двучлены, трехчлены, многочлены. Разложение на множители. Радикалы.

Алгебраические обозначения.

Отношение и пропорция.

Умножение и разложение на множителей.

Радикалы.

Глава IV.

Функции и их графики. Составление уравнений. Переменные и функции.

Глава V.

Уравнения первой степени или линейные. Аналитическое и графическое решение.

Глава VI.

Уравнения второй степени (квадратные). Явные функции. Аналитическое и графическое решения.

Глава VII.

Неявные квадратные функции и их графики Системы квадратных уравнений.

Глава VIII.

Дроби. Дробные уравнения. Иррациональные уравнения.

Дроби.

Дробные уравнения.

Иррациональные уравнения.

Глава IX.

Кубические функции.

Глава X.

Целые рациональные функции.

Глава XI.

Степенные функции.

Глава XII.

Неравенства и переменные.

Глава XIII.

Прогрессии.

Глава XIV.

Переменные, пределы и неопределенные выражения.

Глава XV.

Логарифмы.

Глава XVI.

Показательные функции и их отношение к логарифмическим.

Глава XVII.

Логарифмическая линейка.

Глава XVIII.

Бесконечные ряды.

Глава XXV.

Решение треугольников.

Косоугольные треугольники.

Глава XXVI.

Полярные координаты.

Глава XXVII.

Векторы, мнимые и комплексные величины.

Векторы.

Мнимые и комплексные величины.

Глава XXVIII.

Гиперболические функции.

Глава XXIX.

Решение тригонометрических уравнений.

Глава XXX.

Простейшие приложения координат.

Глава XXXI.

Линейные уравнения. Прямая линия.

Глава XXXII.

Уравнения второй степени. Конические сечения. Парабола.

Глава XXXVI.

Уравнения в параметрической форме и в полярных координатах.

Глава XXXVII.

Эмпирические уравнения.

Глава XXXVIII.

Приложение координат к геометрии трех измерений.

Глава XXXIX.

Линейные уравнения с тремя переменными.

Глава XL.

Уравнения второй степени с тремя переменными (в пространстве).

Глава XLI.

Дифференциальное исчисление.

Глава XLII.

Основные правила дифференцирования.

Глава XLIII.

Дифференцирование алгебраических функций.

Глава XLIV.

Приложения дифференциального исчисления.

Глава XLV.

Дифференцирование тригонометрических функций.

Глава XLVI.

Дифференцирование логарифмических и показательных функций.

Глава XLVII.

Дифференциалы.

Глава LIII.

Определенный интеграл.

Глава LIV.

Интегрирование посредством приведения.

Глава LV.

Метод суммирования.

Глава LVI.

Примеры на применение интегрирования.

Глава LVII.

Частное и кратное интегрирование.

Ответственный редактор *Е. В. Пулькина.* Технический редактор *Р. В. Эмдина.*
Сдана в набор 21/V 1933 г. Подписана к печати 27/XI 1933 г.
Формат 82×111 1/32. ГТТИ № 201. Инд. Т-20-5(5а)-5. Тип. зн. в 1 п. л. 41.760.
Ленгорлит № 25139. Тираж 7.000—58 3/4 л. Заказ № 070.